Digitized by Google

Acheté par l'Académie
de Lausanne à M. le Prof.
J.-P. de Crousaz le 27 juin 1760
pour 20 francs

[ACV Bdd 51/7 t.4 p.2]

BCU - Lausanne
1094383119

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Bibliotheca Academiæ Lausannensis

LA THEORIE ET LA PRATIQUE DE LA COUPE DES PIERRES ET DES BOIS,

POUR LA CONSTRUCTION DES VOUTES

Et autres Parties des Bâtimens Civils & Militaires,

OU

TRAITÉ DE STEREOTOMIE

A L'USAGE DE L'ARCHITECTURE,

Par M. FREZIER, Chevalier de l'Ordre Militaire de Saint Louis, Ingenieur ordinaire du Roy en Chef à Landau.

TOME PREMIER.

A STRASBOURG,
Chez JEAN DANIEL DOULSSEKER le Fils, Marchand Libraire à l'entrée de la Ruë dite Flader-Gaſs,

A PARIS,
Chez L. H. GUERIN l'aîné, Ruë St. Jacques, vis-à-vis St. Yves.

M DCC XXXVII.

Digitized by Google

Digitized by Google

Bennart inv.t del. *Herisset Scul.*

A MONSEIGNEUR
LE MARQUIS D'ASFELD,
MARECHAL DE FRANCE,

CHEVALIER DE L'ORDRE DE LA TOISON D'OR, Commandeur de l'Ordre de Saint Louis, Gouverneur des Ville & Citadelle de Strasbourg, Directeur General des Fortifications de France, General des Armées du Roy.

MONSEIGNEUR,

J'ai l'honneur de VOUS préſenter le Fruit du loiſir que m'ont laiſſé les Saiſons, qui interrompent les Tra-

Digitized by Google

vaux des Fortifications. Occupé pendant les Etés à exécuter Vos ordres pour augmenter les Forces d'une Place des plus conſiderables de la Frontiere, j'ai paſſé quelques parties des Hyvers, depuis mon ſecond retour de l'Amerique, à mediter ſur les moyens de faire avec juſteſſe, ſolidité & propreté toutes ſortes de Voûtes, de quelque figure qu'on les puiſſe propoſer, ayant reconnu par ma propre experience, que cette partie de l'Architecture, qui eſt ſans contredit la plus difficile, étoit ſouvent neceſſaire à un Ingenieur. Et comme les Auteurs qui ont traité de cette matiere, ſe ſont bornez à dreſſer des Ouvriers dans une routine quelquefois peu exacte, je me ſuis propoſé d'inſtruire ceux qui les conduiſent, des raiſons Geometriques des Traits *qu'on y met en œuvre, perſuadé qu'il convient à un Officier d'avoir autant de ſuperiorité de Science, que d'autorité ſur les Artiſans qu'il employe dans les Travaux du Roy. La Theorie eſt l'ame des Arts auſſi-bien que des Sciences; Le Grand Prince qui Vous a prépoſé aux Fortifications du Royaume, a fait voir qu'Il étoit convaincu de cette verité, lorſqu'il vous a choiſi préferablement aux Officiers du Corps des Ingenieurs pour les diriger. Il ſçavoit qu'une profonde intelligence dans l'Art de la Guerre étoit la premiere Theorie des Fortifications; ſur ce principe, Il a jugé que perſonne ne pouvoit mieux que Vous décider de*

Digitized by Google

leur convenance, & de leur poſition ſuivant la ſituation des Lieux, & que les Ingenieurs ne devoient agir qu'en conſequence de cette premiere détermination.

Il avoit connu par Lui-même en Eſpagne votre Capacité dans l'Art d'attaquer les Places fortes, par les Sieges que Vous y avez faits ſous ſes yeux, & que vous avez heureuſement conduit à une prompte fin, comme à Caſtel-David & à Portalegre, que vous avez emporté l'Epée à la main; à Xativa & à Denia, que vous avez emporté d'Aſſaut, malgré la réſiſtance la plus opiniâtre qu'on ait fait depuis pluſieurs ſiecles; de même qu'à Alcira, & aux Ville & Château d'Alicante, ſans compter le Siege de Barcelone, où Vous avez eu beaucoup de part. Dans toutes ces occaſions ce Prince avoit reconnu le fruit des Leçons des grands Maîtres, que Vous aviez pris dans les Sieges, où vous avez ſervi avec diſtinction dès votre Jeuneſſe, comme à Luxembourg, à Mons, à Namur, à Traerbach, à Briſack, aux deux Sieges de Landau & à Fribourg. Il n'étoit pas moins sûr de votre capacité dans l'Art de deffendre; informé que dans la vigoureuſe réſiſtance que fit Monſieur votre Frere à Bonn, dans laquelle il a glorieuſement terminé ſa vie, vous ne repouſſâtes pas ſeulement les Ennemis à l'attaque du chemin couvert, mais vous les chaſſâtes d'une Demie-Lune dont ils s'étoient emparez. Il ſçavoit

encore combien Vous vous étiez distingué à la Deffense de Namur dans plusieurs Actions qui avoient roulé sur Vous, & particulierement aux deux assauts du Château, où vous repoussâtes les Ennemis qui y étoient entrez & s'étoient emparez d'un Corps de Cazernes.

Enfin, après avoir acquis par une brillante experience la connoissance de l'usage des Fortifications, Vous avez laissé à l'Espagne un precieux Monument de votre Science dans l'Art de fortifier, par les beaux Ouvrages que vous avez fait faire à Tortose, qui ont rendu cette Place, de l'aveu même de Sa Majesté Catholique, une des plus fortes de son Royaume; c'est ainsi qu'il s'en est expliqué dans l'énumeration des Services importans que vous lui avez rendus.

Ce seroit icy le lieu de parler de la Conquête du Royaume de Mayorque, que Vous lui avez soumis en un mois de tems, & d'entrer dans le détail des Actions Héroïques qui vous ont merité les marques de sa reconnoissance, par les honneurs de la Toison d'Or, & d'autres Dignités Militaires en France; mais arrêté par votre ordre qui m'impose silence, & par la brieveté d'une Epitre, je me vois forcé avec douleur d'abandonner cette ample & belle matiere aux Historiens de la vie de Philippe Quint & de Louis XIV, qui profiteront de ce qui auroit pû rendre

Digitized by G

la lecture de cette Epitre intereſſante à toute ſorte de Lecteurs.

Les curieux du Blazon y auroient trouvé pourquoi on voit les Armes du Royaume de Valence au milieu de votre Ecuſſon. Les Gens d'une vertu épurée y auroient vû avec plaiſir des Traits d'une Grandeur d'ame à l'épreuve de tout interrêt, même du plus legitime. Les Politiques y auroient vû l'art de ramener les Rebelles à l'obéïſſance de leur Souverain, & de concilier dans le Gouvernement la crainte & l'affection des Sujets par une exacte obſervance de la Juſtice & des Loix, qui peuvent contribuer à la tranquillité publique, en menageant le Sang des Peuples, & en préferant les voyes de la Clémence à la gloire des Actions d'éclat. Les Grands Capitaines y auroient vû des moyens ingenieux de prévenir une Déroute. Les Generaux y auroient remarqué ceux de faire ſubſiſter les Armées, & de trouver dans des Païs peu abondans les Munitions & les Proviſions des Sieges, ſans leſquelles les Entrepriſes les mieux concertées ſont ſujettes à échoüer. En effet après que l'Armée Navale des Ennemis eut enlevé notre Convoy, ſi M. le Duc d'Orleans n'avoit pas trouvé les reſſources de Vivres & de Munitions de Guerre, que Vous aviez raſſemblé ſans ordre par un excès de prévoyance, & la nombreuſe Artillerie que vous aviez fait fondre de votre

propre mouvement, auroit-il pû faire le Siege de Tortoſe, & fermer aux Ennemis, par la priſe de cette Place, l'entrée des Royaumes de Valence & de Murcie, qui leur étoit ouverte par la perte de la Bataille de Zaragoça? Enfin les bons Critiques de l'Hiſtoire s'y ſeroient confirmez dans la juſte défiance où l'on doit être ſur ce qu'avancent de certains Ecrivains, qui hazardent ſur de frivoles récits des Faits, dont la fauſſeté décrédite l'Hiſtoire; telle eſt dans la Préface d'un Commentaire celui de la Bataille d'Almanza. Sans citer ici les Témoins oculaires, qui ſont en auſſi grand nombre que les hommes, qui ont eu part à cette action, j'aurois pû produire un témoignage, qui vaut ſeul tous ceux qu'on peut raſſembler de l'une & de l'autre Armée; c'eſt celui du Roy d'Eſpagne, qui bien informé de la part que Vous aviez au gain de cette Bataille, s'explique en ces termes ſur la maniere dont vous y avez contribué, dans les Lettres-Patentes, dont Sa Majeſté Vous a gratifié le 30. Avril 1715. datées de Buen-Retiro. „ *L'Armée des Ennemis* (c'eſt S. M. C. qui „ parle) *ayant attaqué celle des deux Couronnes à Al-* „ *manza le 25. Avril 1707. & fait plier la droite* „ *de notre premiere Ligne par le grand feu de leur Infan-* „ *terie ſoutenu de leur Cavalerie, Vous, qui comman-* „ *diez la droite de la ſeconde Ligne, les chargeâtes avec* „ *tant de valeur que vous mîtes leur gauche en deroute,*

Digitized by Google

„ *d'où vous marchâtes contre leur droite, & malgré* „ *la bonne contenance avec laquelle elle ſe retiroit, vous* „ *les chargeâtes ſi à propos que vous l'obligeâtes de pren-* „ *dre la fuite,* ce qui acheva le gain de la Bataille. „ *Le jour ſuivant vous leur fites priſonniers de Guerre cinq Bataillons Anglois, cinq Hollandois & trois Portugais, &c. Si l'on compare ce récit d'un Roy à celui d'un Particulier, qui a écrit ſur de mauvais Mémoires, on verra combien on doit être en garde contre les ſurpriſes dans l'étude de l'Hiſtoire. Je ſuis charmé,* MONSEIGNEUR, *d'avoir trouvé l'occaſion de mettre en évidence la vérité de ce Fait; mais je le ſerois beaucoup plus ſi Vous me permettiez de donner place ici à un grand nombre d'autres de pareille nature, qui ont été juſtement récompenſez de la plus haute Dignité de l'Etat Militaire; ajoûtons enfin qu'ils ont été glorieuſement terminez par la priſe de Philisbourg, que vous avez acquis à la France, malgré les obſtacles de la Nature & de l'Art, en préſence des Forces de l'Empire, raſſemblées ſous la conduite d'un des plus Grands Géneraux de notre ſiecle, Vous ouvrant une route au travers du Feu & des Eaux d'un Fleuve débordé. J'eſpere,* MONSEIGNEUR, *que Vous me pardonnerez d'avoir paſſé les bornes étroites que vous aviez préſcrites à cette Epitre, quand vous ferez attention que ce ſeroit trop mortifier l'amour propre d'un Subalterne,*

que de l'empêcher de publier la Gloire de ſon Commandant; il ſemble qu'il en réjaillit un peu ſur lui, & qu'il eſt honnorable d'être ſous les Ordres d'un Général qui commande par de bons Titres; il m'en reſte encore aſſez à dire pour me croire en droit de me plaindre d'être obligé de paſſer ſous ſilence des Actions dignes de l'Ancienne Vertu Romaine; ce n'eſt pas ſans peine que je ſacrifie le plaiſir de les raconter au devoir de l'obéïſſance. Je Vous prie du moins, MONSEIGNEUR, de m'en tenir compte, comme d'une marque de ma parfaite ſoumiſſion à vos Ordres, & du profond reſpect avec lequel je ſuis,

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble &
très-obéïſſant Serviteur
FREZIER.

Digitized by Google

AVERTISSEMENT.

Avant que de commencer à lire, il faut corriger à la marge, avec la plume ou du crayon, les fautes marquées ci-après dans l'*Errata*; parce que les unes rendent le diſcours inintelligible, & les autres le raiſonnement faux; il en eſt de même des additions à faire pour remplacer les omiſſions.

Il eſt des fautes qu'on n'y a pas compris, parce que le Lecteur peut les corriger de ſoi-même, comme ſont celles de la ſuite des chiffres, des cottes des Problêmes, Chapitres, &c. aux pages 151, 156, 159, 174, 191, 194, 196, 319, 323.

Je prie le Lecteur de ſupléer à celles qui auront pû m'échaper, tant dans l'impreſſion que dans la gravure des Planches, en conſideration de ce que l'impreſſion a été faite loin de moi, & que les occupations de mon état, qui ſont continuelles pendant l'Eté, m'ont empêché de revoir avec attention l'Imprimé tel qu'il eſt.

ERRATA.

Pages.	*Lignes.*	*Fautes.*	*Corrections.*
IX	32	autres	Auteurs
3	37	paſſent	poſent
7	18	Stereometrie	Stereotomie
20	34	le diametre	le demi diametre
24	1	un axe	un angle
31	*en marge*	PLANCHE 2	PLANCHE 1
39	34	Ellipſe	Egliſe
42	30	celles	elles
49	32	Ellipſe	Ellipſimbre
53	25	d'Ellipſe	d'Egliſe
60	8	comme	par exemple
89	21	QUELQUE	QUELLE que
90	19	quelques	quels que
212	11	leſquels	ſur leſquels
ibid.	27	*a* B	*a* P
223	8	obligantes	obligeantes
228	20	*eſt connuë*, ajoutez	*étant donnez*,
272	4	deſſein	diſcours
282	8	coin	coins
296	35	égale	égal
390	20	d'arc	d'arcs
393	1 & 2	d'allignement	d'alignement
394	25	*cherche*	*CERCHE*
400	31	arc	axe
401	22	*lavigare*	*levigare*

OMISSIONS.

Page 21 en marge vis-à-vis la ligne 6. ajoutez, *Voyez le Problème à la page* 223

Page 213 ligne 3. après X x (*ajoutez*) au point G, qui repréſente le centre de la Sphère, duquel & avec le même rayon on décrira des arcs, qui couperont la ligne X x.

TRANSPOSITION.

La Page 377 devoit commencer par la Démonſtration qui a été miſe à la page 286, ligne 31.

DISCOURS

Digitized by Google

DISCOURS PRELIMINAIRES,

PREMIEREMENT,

SUR L'UTILITÉ DE LA THEORIE
Dans les Arts relatifs à l'Architecture.

JE me propoſe dans cet Ouvrage de donner la Theorie des Sections des Corps, autant qu'elle eſt neceſſaire à la démonſtration de l'uſage qu'on en peut faire en Architecture pour la conſtruction des Voutes, & la *COUPE DES PIERRES ET DES BOIS*, ce que perſonne n'avoit encore fait ; & parce que je prends une route differente de ceux qui ont traité de cette Matiere, qui ſe ſont tellement bornez à la Pratique, qu'ils ſemblent mépriſer la Theorie, ou l'ignorer : je vais tâcher d'en établir l'utilité.

VITRUVE, qu'on peut citer pour un bon Connoiſſeur dans les Arts, parce qu'il eſt reconnu pour un fameux Architecte, & qu'il étoit de plus Ingenieur d'Auguſte, y diſtinguoit deux choſes, (*) ſçavoir, *l'Ouvrage* &

(*) *Ex duabus rebus ſingulas Artes eſſe compoſitas, ex opere & ejus* RATIOCINATIONE; *ex his autem unum proprium eſſe eorum, qui ſingulis rebus ſunt exercitati id eſt operis effectus ; alterum commune cum omnibus Doctis*, id eſt *RATIOCINATIO.*

le *Raiſonnement*; l'une, dit-il, eſt l'affaire des Gens qui en ont fait apprentiſſage; l'autre eſt du reſſort des Sçavans. Tout le monde ne penſe pas auſſi juſte que lui; une grande partie des hommes connoiſſent ſi peu la nature des Arts, qu'ils croyent que l'on ne peut s'y rendre habile que par l'experience; ils regardent la Theorie comme une occupation vaine, qui n'a pour objet que des chimeres, dont les Arts ne retirent aucun avantage. (*) On a vû, diſent-ils, de Grands Hommes dans l'Architecture Civile, & méme dans la Militaire, qui ſe ſont diſtinguez par leurs Ouvrages ſans être Geometres ni Algebriſtes, donc on peut ſe paſſer de ces Sciences pour devenir habile dans les Arts.

Pour répondre à ce faux raiſonnement, que bien des gens tâchent de faire valoir par l'intérêt qu'ils ont de l'établir, je dirai qu'abſolument parlant, à la réſerve de la nourriture, les hommes peuvent ſe paſſer de tout, même d'habits dans les Païs froids, témoins les anciens Gaulois nos Ancêtres, & pluſieurs Nations de Sauvages; mais puiſque la Nature nous a deſtinez au travail, & que moyennant un peu d'application elle nous donne l'induſtrie d'ajouter une infinité d'agrémens & de commoditez aux Ouvrages de ceux qui nous ont précedé, & de concilier la beauté & la ſolidité des Edifices, qui nous garantiſſent des injures de l'air & des inſultes de nos ennemis, il ſemble que ce n'eſt pas agir en hommes raiſonnables, que d'attendre que l'experience nous faſſe ſentir nos beſoins; mais que nous devons réflechir aux moyens de pourvoir à ceux, qui peuvent nous arriver dans l'exécution de nos deſſeins, & de combiner ces moyens de tant de manieres differentes, que nous choiſiſſions toujours les plus ſûrs, les plus courts & les plus faciles, ce qui eſt réſervé à la ſeule Theorie.

Galli ſuper Umbilicum erant nudi. Tite-Live l. 22. c. 46.

Qu'on me permette ici une comparaiſon pour rendre cette verité plus ſenſible; avant qu'on eût formé les Grands Chemins par des Chauſſées droites, ſolides, & de largeur commode, on communiquoit comme aujourd'hui d'une Ville à une autre, mais on demeuroit bien plus longtems en chemin, on éprouvoit une plus longue fatigue, on étoit ſujet à demeurer embourbé, & ſouvent à s'égarer.

Avant qu'on eût conſulté la Geometrie & la Mechanique en Architecture, on faiſoit des Voutes des mêmes Materiaux qu'aujourd'hui; mais on ne pouvoit s'aſſûrer de l'équilibre de l'effort de leur *Pouſſée*, & de la réſiſtance des *Piédroits* qu'il tend à renverſer; de ſorte que ne ſçachant garder un milieu convenable entre le trop & le trop peu de leur épaiſ-

(*) Voyez les *Penſées critiques ſur les Mathematiques* par Cartaud, qui oſe avancer que les Mathematiques ont peu contribué à la perfection des beaux Arts. *A Paris* 1734.

Digitized by Google

ſeur, on étoit ſujet à y conſommer une dépenſe ſuperfluë en materiaux, ou à les voir s'écrouler par trop de foibleſſe : l'experience nous en fournit encore aſſez ſouvent des exemples, à la honte de ceux qui ſe mêlent de conſtruction ſans connoiſſance de Geometrie ni de Mechanique, & au grand dommage de celui qui fait bâtir. On faiſoit auſſi des Ceintres de differentes eſpeces, Circulaires, Surbaiſſez, Surhauſſez & Rampans; mais on ignoroit quelle étoit la Courbe, qui leur convenoit le mieux dans les circonſtances des Termes donnez. On rencontroit dans l'exécution des difficultez qu'on n'avoit pas prévû, & qu'on ne ſçavoit réſoudre que comme le nœud Gordien, en démoliſſant & recoupant pluſieurs fois les parties de Voutes qui ne quadroient pas, juſqu'à ce que l'œil fût moins offenſé de leur difformité, d'où il réſultoit beaucoup de perte de tems & de Materiaux; & parce que le tâtonnement n'a de ſuccès que par hazard, de tels ouvrages duroient peu, coûtoient beaucoup de façon, & ſatisfaiſoient rarement la vûë & l'eſprit des Connoiſſeurs.

D'ou vient donc que les Praticiens mépriſent la Theorie, & la comptent pour rien au prix de l'experience qu'ils ne ceſſent de vanter? j'en trouve deux raiſons : la premiere, c'eſt pour détourner la honte qu'ils ont de ne pouvoir rendre d'autre raiſon de leurs Ouvrages, que celle de l'imitation de ceux qui paſſent pour bons, & de la convenance qu'ils ont remarqué dans la pratique, ſentant bien qu'ils ne ſont pas aſſez éclairez pour remonter à la cauſe. Cette raiſon eſt tirée de la vanité du cœur humain; l'homme pour s'élever ſur ſes égaux affecte de mépriſer les choſes qui lui manquent, & cherche à faire parade du peu qu'il poſſede; de-là vient, qu'on ſe mépriſe réciproquement dans le monde, & que la ſcience, dont la beauté & l'utilité ſont peu connuës de la multitude, n'eſt pas élevée au rang qu'elle doit tenir audeſſus de la ſeule pratique; l'inattention & ſouvent le défaut de lumiere des gens en place favoriſent les faux jugemens que l'on porte ſur le mérite de la routine; puiſqu'on voit, que la peine de travailler à acquerir des connoiſſances utiles aux beſoins de la vie, ou à l'ornement de l'eſprit, eſt ordinairement très-inutile pour la fortune; c'en ſeroit aſſez pour énerver toute émulation, arrêter les progrès des Arts, & rappeller la barbarie des Siecles d'ignorance, ſi la Nature n'avoit pourvû à l'aveugle injuſtice des hommes. Elle a attaché à cette peine la récompenſe d'une ſatisfaction intérieure, (*) qui eſt ſeule capable de la ſoutenir contre les dédains d'une ſtupide indifference, ou d'une préſomptueuſe ignorance. En effet ſans les attraits des Sciences, & un certain amour de la Vertu, qu'eſt-ce qui pourroit engager un homme ſenſé à conſacrer ſes veilles ſans intérêt, au ſeul bien du Public, qui fourmille de gens plus diſpoſez à la critique qu'à la reconnoiſſance, à

(*) *Virtutum præmium in ipſis eſt, & rectè factis merces eſt ſe-ciſſe.*

relever les moindres fautes, qu'à leur faire grace en faveur de ce qui doit plus mériter leur attention & leur applaudiſſement ?

La ſeconde raiſon de ceux qui préferent la ſeule Pratique à la Theorie, peut être ſincerement déduite du fond de leur ignorance, parce qu'ils lui attribuent les effets de la Theorie qui leur eſt inconnuë. Daviler, fameux Auteur en Architecture, nous en fournit une preuve, & un exemple comique à la page 237. *La ſeverité des Régles de Geometrie*, dit-il, *eſt inferieure à la Pratique, comme LA METHODE DES CHERCHES RALONGE'ES VAUT MIEUX QUE LES FIGURES GEOMETRIQUES, d'autant qu'en cet Art la Pratique eſt préferable à la Theorie* : On ne peut s'empêcher de rire d'une pareille déciſion, qui montre évidemment que le Juge n'entend pas l'état de la queſtion, & qu'il veut fronder ce qu'il ne connoit pas ; en effet, s'il avoit ſçû que la *Cherche ralongée* tirée du plein ceintre, du ſurhauſſé ou du ſurbaiſſé, étoit une Ellipſe très Geometrique, il n'auroit pas tenu ce langage ridicule. La plûpart des gens ſans Theorie parlent & penſent comme lui; parce que faute de principes ils n'arrivent qu'avec de grands efforts & une longue ſuite de pratique à quelques foibles connoiſſances des choſes, qui ſont les plus aiſées à ceux qui ont de la Theorie ; de-là vient qu'ils font grand cas des moindres, & ſe croyent de grands hommes pour s'être frayé quelques routes un peu aiſées dans la Pratique, quoique ces prétendus Inventeurs ne puiſſent s'aſſûrer de la juſteſſe ni de la réüſſite de leurs operations tâtonnées, dont il ne voyent ni la difference des cas, ni la preuve ; de ſorte qu'ils croyent ſouvent avoir bien réüſſi, lors même qu'ils n'ont fait qu'approcher de la verité, & qu'ils n'ont pas pris la voye la plus ſûre & la plus courte; cependant parce qu'ils ne connoiſſent pas d'autre moyen pour y parvenir que l'experience, ils ne penſent pas qu'il y ait de meilleur maître, appuyez ſur le proverbe qu'ils citent à tout propos, *Experientia rerum magiſtra.*

Je ne prétends pas ici diminuer le mérite de l'experience, j'en connois la neceſſité en pluſieurs choſes ; par exemple, en Phyſique elle fait appercevoir des objets & des effets ſur leſquels on n'étoit pas prévenu par le raiſonnement ; perſonne ne doute qu'elle ne ſoit indiſpenſablement neceſſaire dans les Arts qui dépendent de l'habitude, & dans ceux qui ſont Problématiques, comme la Guerre ; mais elle l'eſt beaucoup moins dans ceux qui émanent des Sciences, c'eſt un guide équivoque, comme le bâton d'un aveugle, qui ne lui ſert à ſe conduire que très-imparfaitement, en ce qu'il ne lui indique pas ſi bien les objets qu'il ne puiſſe prendre l'un pour l'autre, & ſe précipiter ſi le cas y arrive.

Cette diſtinction indique ce que l'on doit penſer ſur la Science

Digitized by Google

& l'Experience neceſſaire à un Ingenieur; puiſque ſon Etat tient à la Guerre & aux Arts dépendans des Mathematiques; ce ſeroit mal décider contre la Theorie, que de citer des Gens élevez aux dignitez par les Actions militaires, quoique bornez à une ſimple routine de conſtruction; les récompenſes dûës à la Valeur n'annoncent qu'une partie du mérite d'un Homme de guerre, laquelle ne ſuffit pas pour un Ingenieur. Ceux de l'Antiquité étoient ſçavans; leurs merveilleuſes inventions dans les Sieges nous le prouvent aſſez; & quoique depuis la décadence des Romains les Sciences ayent en quelque façon fait divorce avec la Guerre (car il n'eſt plus de ces hommes propres à être ſur le Trône de la Juſtice, & à la Tête des Armées) cette ſéparation n'aura jamais lieu à l'égard des Ingenieurs; c'eſt chez eux que doit ſubſiſter cet ancien accord de la Science & de la Guerre; s'ils ont beſoin de la bravoure, du bon ſens & de l'experience d'un Guerrier, ils ont encore beſoin de la ſcience d'un Mathematicien. Sans la Geometrie, la Mechanique & l'Hidraulique de quoi ſont-ils capables dans la conſtruction des Fortereſſes & Places de guerre, que d'imiter ce qu'ils ont vû, & copier ſouvent des fautes? les traces de l'aveugle experience ne ſont pas rares, il n'y a gueres de Ville où l'on n'en reconnoiſſe quelques-unes.

Neque enim Ingenium ſine Diſciplina, aut Diſciplina ſine Ingenio perfectum artificium poteſt efficere. Vitr.

J'AVANCERAI de plus, que les Sciences neceſſaires à la Conſtruction ne ſont pas inutiles à la Guerre; elles ouvrent l'eſprit, fourniſſent des moyens induſtrieux pour les manœuvres & les ouvrages neceſſaires à l'Attaque & à la Deffenſe des Places, que la ſeule valeur ne ſçauroit exécuter ſans ce ſecours. ARCHIMEDE étoit un Mathematicien de pure ſpéculation, qui n'auroit pas daigné deſcendre à la Pratique, s'il n'avoit été engagé par les ſollicitations du Roy HIERON ſon Parent, de faire uſage de ſes connoiſſances pour l'invention des Machines de guerre; cependant ſes coups d'eſſai furent ſi bien des coups de maître, qu'au Siege de Syracuſe il dérouta, par la force de la Theorie, toute l'experience de ces Ingenieurs Romains, qui avoient fait valoir avec de grands ſuccès leur habilité dans la conquête des Places les plus fortes; ſes nouvelles Machines eurent tant d'effet, qu'il intimida & rebuta l'Armée de Marcellus, au point, que ce General renonça aux Approches & aux Aſſauts, forcé de ſe réduire à chercher par la longueur du Siege, ce qu'il ne pouvoit obtenir par la force contre l'ingenieuſe réſiſtance que lui faiſoit Archimede. On peut lui en attribuer tout l'honneur, car Plutarque dit, qu'il étoit l'unique Auteur de la deffenſe, que les Syracuſains n'étoient que comme le corps & les membres, dont lui ſeul étoit l'ame, qui mettoit tout en mouvement, ſans qu'on fit uſage d'autres Armes que des ſiennes; cependant ce grand homme, ajoute-t'il, ne ſe

Digitized by Google

glorifioit point de ces heureuſes nouveautez, il ne les regardoit que comme des *Jeux de la Geometrie*, qu'il eſtimoit ſi peu en comparaiſon de la Theorie, qu'il crut ſe faire plus d'honneur d'en laiſſer des Ecrits, que la deſcription de ces merveilleuſes Machines, dont l'invention & l'uſage lui avoit acquis tant de gloire & un ſi grand Nom, qu'il paſſoit pour un homme *doüé non de Science humaine, mais de Sageſſe toute Divine.* Diſons-le ſans déguiſer, la ſeule experience ne fait que de ſerviles imitateurs, qui étant embaraſſez dans les moindres choſes, & n'ayant de reſſource que dans le recüeil de leur Porte-feüilles, donnent comme des aveugles dans le faux pour les projets, l'exécution & le toiſé.

Plutarqu. *in vita Marcelli.*

Satis abundè is videtur fecisse, qui ex singulis Doctrinis Partes & RATIONES earum mediocriter habet notas, easq; quæ necessariæ sunt ad Architecturam, ut si quid de his rebus & Artib. judicare & probare opus fuerit, ne desiderentur vel deficiat. Vitr. l. 1. c. 1.

Je dirai cependant ſans vouloir favoriſer l'ignorance, qu'un Ingenieur doit ſe borner à l'étude de ce qui peut être utile à la Pratique, ſans ſe livrer à de vaines curioſitez, de peur qu'entraîné par l'amorce du plaiſir des Découvertes, plus capables de flatter ſa vanité que de le conduire à une plus grande perfection des Arts, il ne ſoit ſouvent diſtrait & tenté de negliger ſon devoir; il doit ſes premiers ſoins à la ſolidité & à la propreté des Ouvrages dont il eſt chargé, & éviter l'écüeil du mépris, que les hautes Sciences inſpirent, pour des occupations, qui ſont à la portée des eſprits les plus bornez; il lui ſuffit d'être en état d'entendre & de mettre à profit les ouvrages des Sçavans & des Academies des Sciences, qui ont quelque rapport aux Arts neceſſaires à la conſtruction des Places, remettant les études aux hyvers & autres tems de loiſir que nous laiſſe le Service du Roy.

Parmi les connoiſſances qui nous ſont neceſſaires, celle de la Coupe des Pierres, quoiqu'une des plus negligées, n'eſt pas une des moins importantes. J'ai reconnu par ma propre expérience qu'elle étoit auſſi indiſpenſablement neceſſaire à un Ingenieur qu'à un Architecte; parce qu'il peut être envoyé comme moi dans des Colonies éloignées, & même dans des Provinces où l'on manque d'Ouvriers capables d'exécuter certaines parties de Fortifications, où il faut de l'intelligence dans *l'Appareil.* L'épreuve que je venois d'en faire à mon ſecond retour de l'Amerique me fit naître l'idée d'en compoſer un Traité; invité à cette entrepriſe, premierement par l'extréme rareté des Livres ſur cette matiere, ſecondement par la maniere imparfaite dont elle a été traitée juſqu'à préſent. J'en dreſſois le projet, lorſque j'appris qu'un Architecte en alloit publier un, en effet, quelques mois après, celui de M. de La Rue parut; mais comme il n'eſt fait, de même que celui du P. Deran (qui étoit pour ainſi dire le ſeul) que pour conduire la main ſans éclairer l'eſprit, je reconnus qu'il n'étoit pas aſſez Méthodique pour remplir l'attente du public, qui ſouhaitoit depuis long-tems un Ouvrage plus Geometrique; j'en fus convaincu lorſque les perſon-

Digitized by Google

nes à qui j'avois communiqué mon Plan, m'engagerent à y travailler & à le ſuivre ; parce que la difference en eſt ſi grande, qu'on peut dire, que ce n'eſt pas multiplier les mêmes eſpeces de Livres. Ceux que je viens de citer ſont faits pour les Ouvriers, & celui-ci pour les gens qui les doivent conduire, comme les Ingenieurs & les Architectes, que l'on doit ſuppoſer initiez dans la Geometrie.

Je ſçai que la routine & une certaine Geometrie naturelle tiennent lieu de ſcience aux Appareilleurs dans les cas ordinaires ; mais j'ai éprouvé qu'elle leur devenoit inutile dans ceux qui ne ſont pas énoncez dans les Livres, comme je le ferai remarquer lorſqu'il en ſera queſtion, & qu'ils ſeroient arrêtez tout court, ſi l'Ingenieur n'étoit en état d'y ſuppléer. Il doit donc prévenir la honteuſe neceſſité de ſe livrer à l'ignorance des plus experimentez, qui n'en viennent à bout qu'à force de tâtonner & démolir pluſieurs fois, finiſſant enfin par quelque difformité ou défaut de ſolidité. Ces cas ne ſont pas ſi rares qu'on ſe l'imagine, puiſqu'ils me ſont arrivez ; il n'eſt pas non plus extraordinaire d'en trouver des veſtiges, non ſeulement dans les racordemens des vieux ouvrages avec des nouveaux, mais encore dans ceux qui ſont faits de ſuite.

Je ſuppoſerai ſi l'on veut, que les Entrepreneurs fourniſſent de bons Apparreilleurs ; ne convient-il pas à la dignité d'Ingenieur d'être en état de connoître & d'examiner ce qu'ils font, pour ordonner & décider de la meilleure conſtruction, & ne pas ſouffrir des fautes qu'ils peuvent faire malicieuſement, ou pour faire ſervir des pierres de rebut, ou pour s'épargner un peu plus de ſoin ? D'ailleurs cette matiere eſt aſſez intéreſſante pour mériter l'attention d'une juſte curioſité ; on en pourra juger par ce qui ſuit.

SECOND DISCOURS.

Expoſition & Diviſion du Sujet dont il s'agit.

L'IDE'E que l'on a attaché au Nom de la *Coupe des Pierres*, n'eſt pas ce qui ſe préſente d'abord à l'eſprit ; ce mot ne ſignifie pas préciſément l'ouvrage de l'Artiſan qui taille la Pierre, mais la Science du Mathematicien, qui le conduit dans le deſſein qu'il a de former une Voute, ou un Corps d'une certaine figure par l'aſſemblage de pluſieurs petites parties ; il faut en effet plus d'induſtrie qu'on ne penſe pour qu'elles ſoient faites de façon, que, quoique d'inégales

figures & grandeurs, elles concourrent chacune en particulier à former exactement une ſurface Réguliere ou régulierement Irréguliere, & qu'elles ſoient diſpoſées de maniere qu'elles ſe ſoutiennent en l'air, en s'appuyant réciproquement les unes ſur les autres, ſans autre liaiſon que celle de leur propre péſanteur; car les liaiſons de mortier ou de ciment doivent toujours être comptées pour rien. Par où l'on voit que cette Science tient ſes principes, premierement de la Geometrie, pour la connoiſſance des Lignes & Surfaces courbes & droites, & les Corps ſolides, qui doivent être diviſez.

Secondement de la Mechanique & de la Statique, pour mettre l'équilibre entre les portions des Solides, qui compoſent les Voutes, enſorte qu'ils ſe ſoutiennent mutuellement ſur les appuis qu'on leur fixe.

Notre deſſein n'eſt pas ici de conſiderer les Voutes comme un amas de corps péſans, qui ſont differens efforts les uns ſur les autres, cette Theorie quoique très-curieuſe & très-utile, peut être réduite pour la Pratique au petit nombre de propoſitions démontrées par Mrs. de la Hire, Parent, Couplet & Belidor, touchant la pouſſée des Voutes, à quoi l'on peut ajouter quelques obſervations ſur les Edifices qui ſubſiſtent depuis long-tems, quoiqu'un peu hors des régles du calcul, ſoit par la bonne qualité des Materiaux qui ſont corps, lorſqu'on leur donne le tems de ſe lier, ſoit par la differente péſanteur de ceux des Voutes & de leur Piédroits, à quoi il faut avoir égard dans les calculs; car ſi l'un eſt d'une pierre légere & l'autre plus péſante, la Pouſſée augmente ou diminuë à l'égard des Piédroits.

Nous ne conſiderons donc ici la Coupe des Pierres, que comme rélative à la Geometrie, ſuppoſant ſeulement qu'un Corps Cônique, Piramidal, ou fait en Coin, ne peut ſe faire un paſſage au-travers d'un trou, qui n'eſt pas ſi grand à ſon petit orifice que la baſe du corps qu'on y introduit. Cela ſuppoſé cette ſcience ſe réduira:

1.° A connoître les Lignes courbes formées par la diviſion des Solides, Concaves & Convexes coupez par des Surfaces planes, ou par des Surfaces courbes; c'eſt ce que l'on pourroit appeller d'un ſeul mot d'origine Grecque la *Tomomorphie*, ou *Figure des Sections*, s'il étoit permis de Forger des mots nouveaux pour éviter les Periphraſes.

2.° A décrire ces Lignes courbes ſur des Surfaces planes, lorſqu'il eſt poſſible & neceſſaire, ou ſur des Surfaces courbes, lorſqu'elles ne peuvent s'adapter ſur un Plan dans toute leur étenduë, ce que l'on pourroit appeller la *Tomographie*, ou *Deſcription des Sections*.

3.° A

3.° A trouver des moyens faciles pour repréſenter les Solides & leurs diviſions ſur des Surfaces planes autant qu'il eſt poſſible de le faire; or comme ils ne peuvent y être exprimez que très-imparfaitement, ces moyens ſe réduiſent, 1.° à la projection faite ſur un Plan par des lignes abaiſſées parallelement entr'elles, & perpendiculairement au Plan de la Deſcription, ce qu'on appelle ſur un plan horiſontal *Ichnographie*, & ſur un plan vertical *Ortographie*. 2.° A la deſcription des ſurfaces rangées ſéparément, & dans toute leur étenduë ſur un plan, ce qu'on appelle *Développement*, & qu'on pourroit appeller *Epipedographie*. 3.° A la deſcription des Angles des plans ou ſurfaces quelconques des Solides entr'elles, ce qu'on pourroit appeller la *Goniographie*, *Deſcription des Angles*.

4.° A faire uſage de toutes ces ſortes de repréſentations, pour parvenir à une ſection des corps convenable à la conſtruction des Voutes, en appliquant les modeles des Angles & des Surfaces ſur des Solides, le plus ſouvent faits en Parallelepipedes, pour les tailler & les réduire aux figures requiſes, en abattant les parties excédentes, ce qui eſt proprement l'Art de la *Coupe des Pierres ou des Bois*, c'eſt-à-dire, celui de faire des ſections, qu'on pourroit appeller la *Tomotechnie*.

Ainsi en réſumant ces mots imaginez pour donner une idée nette & ſimple du ſujet dont il s'agit, nous traitons dans la premiere partie de cet Ouvrage de la *Science*, & dans la ſeconde de *l'Art* de la Stereotomie, c'eſt-à-dire, des ſections des Solides.

Nous diviſons la premiere partie en deux Livres, l'un de la *Tomomorphie*, ou figures des Sections, l'autre de la *Tomographie*, ou deſcription des Sections.

La ſeconde auſſi en deux Livres, dont l'un eſt la *Stereographie*, ou deſcription des Solides, & l'autre de la *Tomotechnie*, ou l'Art de faire des Sections.

Tels ſont les Sujets des quatre Livres de cet Ouvrage, ſuivant l'ordre qui nous a paru le plus ſimple & le plus naturel; ce que nous tâcherons d'expliquer & de prouver par des démonſtrations, qui ne ſuppoſent d'autre connoiſſance des parties des Mathematiques, que celle de la Geometrie Elementaire telle qu'elle eſt dans Euclide, & les autres qui l'ont ſuivi.

Je ſçai qu'aujourd'hui la Geometrie Lineaire n'eſt plus gueres à la mode, & que pour ſe donner un air de Science, il faut faire parade de l'Analyſe; cependant „ l'ancienne Geometrie (dit un Sçavant) „ (*) quoique moins ſublime, moins piquante, même moins agréable,

(*) Fontenelle, Eloge d'Ozanam, *Mém. de l'Acad.*

Digitized by Google

» *eſt plus indiſpenſablement neceſſaire, & plus ſenſiblement utile* ; c'eſt elle » ſeule qui fournit à la nouvelle des fondemens ſolides, » particulierement dans la matiere dont il s'agit, où le calcul Algebrique ne pourroit être utile qu'entre les mains de ceux qui y ſont plus avancez, que ne le ſont ordinairement la plûpart des gens qui ſe mêlent d'Architecture, pour qui nous avons entrepris cet Ouvrage. D'ailleurs elle conduit plus naturellement à la pratique des *Traits* de la Coupe des Solides, & fait ſelon moi plus d'impreſſion dans la mémoire, où les Surfaces & les Lignes ſe gravent plus profondément que les préceptes des formules Algebriques. Les Sçavans n'ont pas beſoin d'un petit Ouvrage, qui ne ſeroit qu'un jeu pour eux; animez par l'ambition de la gloire des découvertes, ils ne s'occupent que des choſes difficiles, ſans s'embarraſſer de leur utilité dans les Arts; ſur quoi M. de FONTENELLE fait cette judicieuſe remarque, que la Geometrie eſt aſſez étenduë, mais qu'elle n'eſt pas aſſez appliquée aux uſages; or puiſqu'ils n'ont pas traité notre matiere, j'ai cru rendre ſervice à ceux qui en ſont curieux, de leur en donner les principes dans un recüeil, compris dans le premier Tome, qui eſt ſuffiſant pour leur épargner la longue, ennuïeuſe & peu inſtructive lecture des grands Volumes in-folio, où elle eſt plus embroüillée par le détail de la Pratique que par le fond de la difficulté; ils en pourront tirer d'eux-mêmes la ſolution des Problêmes, qu'on appelle *les Traits* de la Coupe des Pierres; cependant en faveur de ceux qui aiment les Ouvrages faits, nous y avons ajouté leur conſtruction dans la quatriéme partie, qui contiendra beaucoup plus de matiere en moins de Volume que les Livres du P. DERAN & de M. de la RUE; j'eſpere auſſi que la lecture en ſera plus agréable, parce qu'on y trouvera les Démonſtrations, qui ne ſeront qu'une application des Theorêmes & des Problêmes contenus dans les trois premiers Livres. Au reſte je n'ai recherché d'autre agrément dans la diction que celui du raiſonnement. Dans ce genre d'écrire on doit être plus occupé des choſes que des mots; un Lecteur raiſonnable n'exige que de la netteté, & une diction intelligible; c'eſt à quoi je me ſuis le plus attaché; peut-être n'aurai-je pas toujours réüſſi, dans un long Ouvrage il ſe gliſſe toûjours quelque faute; je le prie auſſi de pardonner celles de l'Impreſſion, qui n'a pas été faite ſous mes yeux.

Hiſt. de l'Acad.

IL me reſte à donner quelque choſe à la curioſité que l'on peut avoir touchant l'origine de la Coupe des Pierres, ſur laquelle je vais expoſer mes conjectures pour conclure ce Diſcours Préliminaire.

(o)

Digitized by Google

TROISIEME DISCOURS.

De l'Origine de la Coupe des Pierres, & de l'Uſage qu'on en doit faire.

LE Bois eſt la matiere la plus naturelle & la plus commode pour la conſtruction des Bâtimens neceſſaires à l'habitation des Hommes; mais le déſir commun à tous ceux qui font des Edifices conſiderables, d'en établir la durée pour un long-tems, l'idée que les ouvrages de bois ſont ſujets à tomber en caducité par la pourriture, & la crainte qu'ils ne ſoient ravagez par les incendies, ont fait préferer les Pierres au Bois, où on a pû les lui ſubſtituer. Dans cette vûë on n'a ménagé ni la peine ni les grandes dépenſes pour les arracher des entrailles de la terre, les tranſporter & les tailler.

La neceſſité a auſſi forcé les hommes dans pluſieurs Contrées d'employer des Pierres au lieu de Bois; parce que la nature leur a fourni plus de Carrieres que de Forêts. Cependant la maniere de bâtir avec des arbres a parû ſi naturelle, qu'on a regardé comme une beauté l'imitation de cette ſtructure. C'eſt de-là que nous eſt venu l'uſage des Colomnes dans l'Architecture antique, & celui des Pilliers ronds & des *Perches* dans la Gotique.

Pour rendre cette imitation plus parfaite, les Anciens faiſoient leurs Colomnes, autant qu'ils pouvoient, d'une ſeule piece, comme ſont les troncs des arbres; ils en uſoient de même pour leurs Architraves, qu'ils ſubſtituoient aux principales poutres que les colomnes devoient porter. Il reſte des veſtiges des Edifices des Egyptiens, des Grecs & des Romains, qui font voir qu'ils y employoient des Pierres d'une grandeur énorme.

Dans les derniers Siecles on a abandonné ces manieres de bâtir trop difficiles par l'immenſité des poids qu'il falloit tranſporter, & par la dépenſe des ſommes extraordinaires qu'ils conſommoient; on leur a préferé l'aſſemblage de pluſieurs Pierres d'une groſſeur plus maniable, & ſans s'écarter du goût des Anciens, on a continué d'imiter les troncs d'arbres par des colomnes; mais on les a fait de *Tambours*, c'eſt-à-dire,

de tranches de Cylindre ; on a de même imité les poutres par des Architraves ; mais on les a fait de *Clavaux*, qui ſe ſoutiennent en l'air, comme ſi le tout n'étoit que d'une Piece continuë ; cependant comme cette ſituation eſt trop forcée, & que la pouſſée en eſt grande, les Architectes les ont appuyées par des Arcades, qui leur ont parû plus ſolides, & quoique par cette conſtruction les Colomnes & les Architraves deviennent inutiles, ils les employent toujours pour ornement ; ce goût eſt aujourd'hui le goût dominant dans l'Europe, imité de quelques Monumens de l'Antiquité Romaine, que l'on a repris pour modele après un long intervale d'un goût d'Architecture toute differente.

Les proportions des Colomnes Antiques avoient parû dans les Gaules & d'autres endroits de l'Europe trop maſſives & trop courtes, on leur ſubſtituoit des Groupes de Perches extrémement longues & menuës, & la difficulté d'imiter avec des Pierres la ſituation horiſontale des Poutres avoit fait rejetter les Architraves, à la place deſquelles on faiſoit paſſer d'une Perche à ſon oppoſée, des Arcs de Pierre ſaillans ſous les voutes, qui ſe croiſoient & ſe raſſembloient de differentes façons, imitant en cela les Tonnelles en Berceau, que l'on fait de branches d'arbres pliées en rond d'un côté à l'autre.

Le contour même des Berceaux cylindriques leur ayant parû auſſi trop peſant, c'eſt-à-dire, faiſant trop d'effort pour écarter les murs, les Architectes de ces tems faiſoient leurs Ceintres par deux arcs de cercles égaux, mais de differens centres, dans le deſſein d'en tenir les pentes plus rapides, & par ce moyen diminuer cet effort en les rendant auſſi plus minces & plus légeres : ils les traverſoient encore par d'autres parties de voutes, qui formoient quantité d'angles ſaillans dont les arêtes étoient cachées & fortifiées par des *Nervures d'Ogives*, des *Arcs doubleaux*, des *Tiercerons*, & des *Formerets*, dont ils formoient une infinité de compartimens, aboutiſſans ſouvent à des culs de lampes ſuſpendus en l'air. Toutes ces naiſſances entrelaſſées, & les interſections des Moulures demandoient une grande intelligence dans l'Art de la Coupe des Pierres ; d'où je conjecture, que c'eſt à l'Architecture *Gotique* que nous devons rapporter l'Origine, ou du moins l'Adoleſcence de cet Art Ma raiſon eſt, qu'outre qu'il ne nous reſte pas de Monumens antiques où il ait été mis en uſage, que pour des traits aſſez ſimples, c'eſt que dans l'énumeration que Vitruve fait des connoiſſances neceſſaires à un Architecte, il ne parle point de celle de *la Coupe des Pierres* ; en effet la noble ſimplicité de l'Architecture des Anciens n'exerçoit pas beaucoup le ſçavoir-faire des Appareilleurs, qui n'avoient preſque que des Voutes Cylindriques ou Spheriques à conduire. La forma-

Digitized by Google

tion au contraire d'un grand nombre de figures biſarres & difficiles, qui ſe préſentoient à tous momens dans l'Architecture Gotique, leur a donné lieu d'en imaginer d'autres, pour tirer party de l'irregularité des emplacemens des Bâtimens, ou ſuppléer au deffaut de place. Les Angles, par exemple, qui ne paroiſſent pas des lieux propres à y pratiquer des Portes, n'ont pas empêché qu'on n'y ait couté des paſſages, ſans les émouſſer, ce qui paroit du premier abord contraire à la ſolidité; on a fait porter en l'air des Cabinets ſur des *Trompes* pour laiſſer une place libre audeſſous; on a ſoutenu des Eſcaliers d'une infinité de façons, & l'on a imaginé tant de choſes inconnuës aux Anciens, qu'on a trouvé aſſez de matiere pour en compoſer des Livres.

Philibert de Lorme, Aumônier d'Henri II, eſt, dit-on, le premier qui en ait écrit, non pas exprès, mais par occaſion dans ſon Traité d'Architecture, qu'il publia en 1567. on voit que cette date n'eſt pas fort ancienne; Maturin Jousse produiſit quelques Traits dans ſon Livre intitulé *Secrets d'Architecture*, imprimé à la Flèche en 1642. le P. Deran, l'année ſuivante mit cet Art dans toute ſon étenduë pour les Ouvriers; Bosse, (la méme année) donna un ſiſtême tout different, qu'il tenoit de Desargues, lequel, par ſon obſcurité & la nouveauté de ſon langage, ne fut pas goûté. Enfin M. de la Rue en 1728. a redonné une partie des Traits du P. Deran, avec quelques autres nouveaux. Tous ces Auteurs n'ont produit qu'une ſimple pratique dénuée de toutes preuves. Le P. Dechalles en 1672 fut le premier, & a été le ſeul juſqu'à préſent, qui y ait ajouté des Démonſtrations; mais ſon Traité *de Lapidum Sectione*, inſeré dans ſon grand cours de Mathematiques en Latin, n'eſt preſque qu'un extrait du P. Deran, dont il a quelquefois copié juſqu'aux fautes, comme nous le ferons voir dans ſon lieu.

Apres avoir vû tous ces differens Ouvrages, il m'a paru qu'il reſtoit encore quelque choſe de mieux à faire.

Premierement, qu'il étoit à propos de donner une connoiſſance exacte de la nature des Lignes Courbes, qui ſe forment aux arêtes des voutes, tant à leurs Faces qu'à l'interſection des Doëles, de celles qui ſont compoſées de pluſieurs parties qui ſe croiſent, pour ſçavoir les tracer ſur des plans, lorſqu'il eſt poſſible, ou ſur des ſurfaces courbes, lorſque ces lignes ſont à double Courbure, en quoi conſiſte la *premiere nouveauté* de ce Traité.

La ſeconde ſera la Correction des erreurs de pluſieurs des anciens Traits.

La troiſiéme celle de la Conſtruction de pluſieurs Traits changez, & de quelques-uns qui n'ont pas encore paru.

Je puis compter pour quatriéme nouveauté les démonſtrations des Traits, parce que le P. Dechalles ne m'a précedé qu'en Latin, mais non pas en François, de ſorte que pour me ſervir de l'expreſſion de Jousse, les *Secrets d'Architecture* y ſont tout-à-fait dévoilez.

La nouveauté de cet Art & les difficultez qu'il contient engageoient les Architectes des deux derniers ſiecles à chercher des occaſions de faire parade de leur Science, perſuadez que rien ne pouvoit mieux les rendre recommandables, que ces Ouvrages hardis, où l'on ne pouvoit s'empêcher d'admirer la Coupe des Pierres; de ſorte qu'ils affectoient d'en faire même ſans neceſſité. J'ai vû le tiers d'une Tour quarrée, qu'on pouvoit faire porter de fond, ſoutenuë par la ſeule coupe d'une Platebande Rampante, qui en élevoit un Angle en l'air, & beaucoup de ſemblables témeritez.

Les Architectes de notre tems ne trouvant plus tant de raiſon de ſe faire admirer par une Science devenuë plus commune, ou peut-être devenus plus ſages, ont banni toutes ces hardieſſes biſarres, qui n'ont d'autre beauté, que celle de leur exécution, & qui non ſeulement ne contribuent en rien à la décoration des Edifices, mais leur ſont encore préjudiciables, en ce qu'elles en augmentent les efforts & la charge; en effet il ne convient de mettre en œuvre les Traits de Porte-à-faux comme les Trompes, que lorſqu'on y eſt abſolument contraint, ou pour quelque Degagement, ou pour éviter la dépenſe & l'incommodité de prendre la place dès les fondemens.

J'ajouterai encore, qu'il faut plûtôt conſulter le bon goût que d'affecter de la rareté, & de la difficulté dans les Ouvrages, à quoi ſemblent pencher nos Architectes modernes, qui courrent à la nouveauté : La rencontre & l'interſection de differentes voutes n'eſt pas toujours d'un bon effet. Un Arc de cloitre, par exemple, de ceintre circulaire peu concave, traverſé de lunettes, & ſurmonté d'un cû-de four, tel qu'on en voit à une Chapelle de l'Egliſe de St. Sulpice, ne fait pas ſi bien qu'une voute moins compoſée. Des Lunettes Cylindriques, qui traverſent une portion de Voute Spheroïde, ou Voute de Four ſurbaiſſée, ne ſe préſente pas bien de près; parce que les arêtes d'Enfourchement paroiſſent *Déverſées*, c'eſt-à-dire, penchées à droite & à gauche, comme on peut le remarquer à la même Egliſe de St. Sulpice; cette difformité diminuë, lorſque la Lunette eſt vûë de bas en

Digitized by Google

haut, & de plus loin, comme à St. Roch; mais elle n'eſt pas ôtée totalement, & on ne le peut par la nature de la Courbe, qui n'eſt pas dans un plan, comme on le verra dans le cours du premier Livre.

Enfin on peut encore remarquer, que les Voutes Spheriques, traverſées par deux berceaux, qui ſe croiſent, ont un air Nud & imparfait, ſi elles ne ſont diviſées par une Corniche Horiſontale, qui retranche le Segment de Sphere, & le mette, pour ainſi dire, à part des Panaches; on en apperçoit le beſoin au Noviciat des Jeſuites à Paris. Il ſeroit trop long de rechercher de ſemblables concours de voutes, qui ne ſatisfont pas le coup d'œil ſans le ſecours de quelque correctif, quoique faites ſolidement & dans les régles de la bonne Conſtruction.

Ces remarques ſont plus utiles à l'Architecture Civile qu'à la Militaire, où l'on ſemble negliger la beauté pour la ſolidité; il ne ſeroit pas cependant mauvais que les Ingenieurs fiſſent une étude de l'Architecture Civile; elle leur eſt neceſſaire à la conſtruction des Bâtimens Militaires, dont ils ſont chargez dans les Villes de Guerre, comme Caſernes, Magaſins, Hôpitaux, Logemens de l'Etat-Major, & même quelquefois des Egliſes des Forts & Citadelles, qui ſont de même eſpece que les Bâtimens Civils, dont ils ne different que de nom, ils peuvent même lorſque la Cour le juge à propos, prendre la conduite des Bâtimens Civils publics; mais ils ne doivent jamais ſe mêler de ceux des Particuliers, de quelque Qualité qu'ils puiſſent être; premierement parce qu'étant Officiers du Roy, à ſa ſolde dans le repos comme dans le travail, (*) il eſt de l'équité qu'ils diſpoſent du loiſir qu'ils peuvent avoir à s'inſtruire au Cabinet des Sciences qui leur ſont neceſſaires, & des faits Hiſtoriques des Sieges, qui peuvent leur fournir des idées propres à les mettre en état de ſervir utilement à differentes deſtinations. En ſecond lieu, parce que rien n'avillit tant les Ingenieurs, que ces ſortes d'occupations qui les font ſoupçonner de vûës d'intérêt, & les compromettent avec des Ouvriers ou Gens à gages, qui rejettent ſur l'Ingenieur les fautes émanées de leur ignorance, ou du caprice du Proprietaire; les exemples fréquens qu'on en voit devroient corriger les gens trop officieux. Enfin parce qu'en ſe mêlant d'Architecture Civile, ils ſemblent ſortir de l'Etat Militaire & nourrir le dédain, que les Gens d'épée ont pour ceux qui ſe mêlent des Arts Mechaniques; ce n'eſt pas qu'il n'y ait dans le Service des occupations peu nobles, l'Officier d'Infanterie doit deſcendre aux petits ſoins de la propreté des Soldats & des Caſernes, celui de Cavalerie à celle des Ecuries & des Chevaux, celui de Marine au Radoub & à la conſtruction des Vaiſſeaux,

(*) *Annua ærа habet, annuam operam edes, annuum æquum cenſus, militia ſemeſtri ſolidum ſtipendium acciperet* Tite-Live, l. 5. n. 6.

Digitized by Google

celui d'Artillerie aux Charronages & aux Forges, & l'Ingenieur à tous les Arts qui ont du rapport à celui de bâtir; ces fonctions auroient par elles-mêmes quelque choſe de vile ſuivant le préjugé du monde, ſi l'on n'étoit convenu dans les régles de l'honneur, qu'il n'y a rien d'abject de tout ce qui concerne le Service du Roy dans l'Etat Militaire; les Ingenieurs doivent ſe renfermer dans ces bornes, & laiſſer l'Architecture Civile à ceux qui en font profeſſion.

TRAITÉ

Digitized by Google

TRAITÉ
DE
STEREOTOMIE
A L'USAGE DE L'ARCHITECTURE.

LIVRE PREMIER.

DE LA FIGURE DES SECTIONS DES CORPS,
Coupez par des Plans, ou Pénetrez par des Solides.

POURQUOI la Connoiſſance en eſt neceſſaire dans l'Architecture.

DANS les Arts qui dépendent des Sciences, ſi l'on ne fait préceder de bons Principes, comme autant de Lumieres qui éclairent l'eſprit, on fait rarement du progrès, parce qu'on n'y avance qu'à tâtons; & de même que l'ennui qui accompagne les ténebres, augmente la fatigue d'une route qu'on parcourt dans l'obſcurité, une Etude ſans Principes devient pénible & capable de rebuter, lorſque la neceſſité de s'inſtruire ne fournit pas de la perſéverance.

Digitized by Google

C'est pour cette raiſon (ſi je ne me trompe) que les Livres que nous avons ſur la Coupe des Pierres, n'ont rendu cette matiere ni facile ni agréable aux Lecteurs, & que bien des Gens qui ont voulu en tâter, s'en ſont rebutez : En effet, il n'eſt pas étonnant qu'une lecture ſoit laſſante & preſqu'inſupportable, où l'on ne trouve qu'un tiſſu de pratiques ſeches, ſurchargées d'operations, dont on ne voit ni la fin ni la raiſon, ſi l'on n'eſt déja en état de la pénetrer : ajoutez à cela la complication d'une infinité de lignes ſurchargées de chiffres, pour les indiquer, & de meſures qu'il faut porter ici & là, ſans ſçavoir à quel propos ; enfin où il n'y a aucune verité à connoître par les inſtructions de l'Auteur, qu'il faut croire ſur ſa bonne foy, ne donnant d'autre preuve de la juſteſſe de ſon operation, que le témoignage de la gravure des Planches de ſon Livre ; il n'eſt pas étonnant, dis-je, qu'une telle conduite ne mêne qu'au dégoût, & que cet Art acceſſible aux moindres Ecoliers de Geometrie, paroiſſe hériſſé d'épines qui en deffendent les approches.

Pour lever ces difficultez nous avons cru qu'il falloit donner une notion claire de la figure des Voutes, & des parties qui les compoſent, en les comparant à celle des corps Ronds, qui ſont connus de tout le monde, la Sphère, le Cône & le Cylindre, l'Anneau & l'Hélice coupez & diviſez par des Plans, ou par d'autres corps qui peuvent les pénetrer. Et lorſque la figure des voutes eſt irréguliere, nous avons tâché de la déſigner par une generation ſi expreſſive, qu'on peut la concevoir facilement. Ainſi l'on a déja pour point de vûë la figure qu'on ſe propoſe de faire, telle qu'elle doit être lorſque la voute eſt achevée, ce qu'il falloit en quelque façon deviner dans le Livre du P. Deran, à quoi M. de La Rue, qui a ſenti ce défaut a tâché de remedier par quelques deſſeins en Perſpective, qui aident beaucoup l'imagination ; mais parce qu'on ne peut exprimer qu'à pluſieurs repriſes toutes les faces d'un Solide ſur un Plan, il reſte encore beaucoup à ſuppléer à ces ſortes de repréſentations.

La figure des voutes étant bien conçûë, il n'eſt point de meilleur moyen de faire connoître celle des parties, dont elles doivent être compoſées, pour ſubſiſter & former un Tout uniforme & ſolide, que d'en venir à l'examen des Sections formées par la diviſion des Corps, faite de maniere qu'ils n'en ſoient pas détruits ni défigurez. Une comparaiſon familiere expliquera nettement ce diſcours.

Je me repréſente, par exemple, un Melon, qui eſt ordinairement une moitié de Sphéroïde, je la coupe par tranches ſuivant la longueur de ſes côtes ſur une table, où cette moitié eſt poſée à plat, & je vois

Digitized by Google

que pourvû que j'empêche les deux premieres tranches de gliſſer, la moitié du Melon ſubſiſtera en ſon entier, quoique coupée en pluſieurs tranches à fond. Non content de l'avoir coupé en long, je la recoupe en travers, & je vois, que ſi j'empêche encore les premiers morceaux de gliſſer ſur la table, cette moitié de Sphéroïde ne ſe défigure point, & ſubſiſte encore dans ſa rondeur, ſans tomber en pieces; d'où je conclus, que ſi je fais de ſemblables morceaux avec de la Pierre ou du bois, & que je les raſſemble dans le même ordre, je pourrai former cette figure de Melon, que les Geometres appellent une Sphéroïde. Mais pour former ces parties, il faut que j'aïe recours à une ſcience qui m'apprenne quelle ſera la figure que le paſſage de mon couteau formera dans le Melon, à chaque diviſion que j'en ferai, & comme il n'importe que je me ſerve d'un couteau ou d'une feüille de Fer-blanc, ou d'un autre corps mince de figure plane, je puis appeller cette coupure *la Section d'un Plan*, ou faite par un plan; j'examine enſuite quelle ſera cette Section en tournant differemment la feüille de Fer-blanc, qui me ſert de couteau; je vois par la ſeule Geometrie naturelle, que ſi je coupe le Melon en travers, la Section ſera un demi-cercle, & un cercle entier, ſi le Melon étoit entier; je connois donc dès ce moment, que toutes les tranches en travers contiennent une portion de cercle plus ou moins grande, ſuivant que les tranches en longueur ſont plus ou moins épaiſſes; je vois auſſi que ma coupure en long fait un ovale, & je conclus que chacune des tranches dans ce ſens eſt une portion d'ovale plus ou moins grande, ſuivant l'épaiſſeur des coupures en travers, & plus ou moins courbe à meſure qu'elle s'approche des bouts du melon ou du milieu, étant évident qu'elle ſe creuſe vers les bouts, & s'applatit vers le milieu. Je pouſſe ma curioſité plus loin; ſi au lieu de la trace plane de mon couteau je l'enfonce de biais, & le fais tourner ſur la pointe immobile au fond, pendant que je le tourne en rond du côté du manche, comme pour faire un trou en pain de ſucre renverſé, je vois que je puis ôter & remettre cette piece & ſes ſemblables; ſi j'en veux faire de concentriques à celle-ci, qui s'emboiteront comme des Cornets les unes dans les autres ſans que le Melon ſoit défiguré, quand même je les couperois encore en travers & en long, en paſſant toujours par le même point du milieu avec la feüille de Fer-blanc, pourvû que j'empêche les premiers morceaux, qui paſſent ſur la Table, de gliſſer.

posent

Je connois donc que je puis diviſer ce Melon en portions Côniques, s'il eſt bien rond, ou en Côniques un peu alongées comme des cornets applatis, s'il eſt oblong; & cependant faire enſorte que le tout ſubſiſte dans ſa forme, ce qui me conduit à l'examen de la difference de ces Cônes, & de la Section qu'ils peuvent faire par leur pénetra-

tion dans le Sphéroïde, ſur quoi je commence à m'appercevoir qu'une telle Section n'a plus la ſimplicité de celle de la Sphère, ou du Sphéroïde coupé par des plans, & que j'ai beſoin du ſecours de la Geometrie pour la connoître.

De ce petit exemple de comparaiſon des Corps coupez par differentes Sections, il ſuit naturellement qu'on doit en diſtinguer de deux ſortes.

Les unes faites par des Plans qui peuvent couper les Solides ſuivant differentes inclinaiſons à leurs axes & à leurs côtez, & produire differentes figures.

Les autres par des Corps qui pénetrent d'autres Corps ſemblables ou differens; comme dans cet exemple le Cône pénetre le Sphéroïde. Les Courbes qui ſont formées par ces Sections ſont l'objet principal de notre Ouvrage; parce qu'elles ſe forment effectivement dans les Ceintres des Voutes ſur leurs Faces, ou dans les rencontres de celles qui ſe croiſent; car chacune de celles qu'on mêt en uſage dans l'Architecture eſt comparable à quelque corps régulier, comme nous l'allons expliquer.

De la Figure des Voutes en General, rapportée à celle des Corps Réguliers.

Les Voutes peuvent être conſiderées comme des Solides *ſimples*, qui ont une principale ſurface, d'où elles tirent leur dénomination.

Ou comme *compoſées* de differentes ſurfaces, qui ſe croiſent, ou qui ſe rencontrent.

La ſurface qui donne le nom aux Voutes eſt celle qui doit être vûë par-deſſous, qu'il a plû aux Architectes d'appeller *Doële*, par Analogie aux doëles des tonneaux, auſquels la plûpart ont quelque rapport; ce n'eſt pas que les voutes ſoient neceſſairement courbes, car il y en a de planes; mais celles-ci ont toujours ſi peu d'étenduë, qu'elles ſemblent n'être pas aſſez conſiderables pour entrer en compte dans l'énumeration des differentes eſpeces de Voutes.

Parmi les Voutes ſimples il y en a de *Régulieres* Circulaires, dont

Digitized by Google

les unes ſont, 1.° des moitiez de Cylindres, 2.° des moitiez de Cônes, 3.° d'autres enfin des Hemiſphères ou portions de Sphères.

La ſeconde eſpece des Voutes ſimples eſt de celles qui ſont *régulierement Irrégulieres*, dont les unes imitent le Cylindre, les autres la Sphère, les autres le Cône, telles ſont celles dont le Ceintre n'eſt ni circulaire ni Elliptique, mais de quelqu'autre Courbe Geometrique ou Mechanique, comme pourroit être la *Chaînette* ou la Parabole, qui lui reſſemble fort, & qui eſt la plus convenable pour mettre en équilibre des vouſſoirs égaux. Telles ſont encore les voutes *Annulaires*, qu'on appelle *ſur le noyau*, leſquelles ſont des Cylindres courbez ſur leur axe, ou les mêmes tournez en *Hélice*, c'eſt-à-dire, en *Vis*, qui s'élevent audeſſus du Plan ſur lequel elles poſent; telles ſont auſſi les Voutes Sphériques ſurhauſſées, ou ſurbaiſſées, ou ſur un plan Elliptique, qui ſont des *Sphéroïdes*, & d'autres qui peuvent être des Cónoïdes.

La troiſiéme eſpece des Voutes ſimples eſt celle des *Irrégulieres*, qui participent plus ou moins de chacune de ces figures, de maniere qu'elles peuvent toujours être comparées en quelques choſes aux Cônes, aux Sphères ou aux Cylindres, & tenir en même tems des unes & des autres, telles ſont la plûpart des *arrieres Vouſſures*.

Les Voutes *Compoſées* ne ſont qu'un aſſemblage de ces ſortes de figures ſituées differemment les unes à l'égard des autres, & contiguës par des jonctions angulaires, qu'il a plû aux Architectes d'appeller *Enfourchemens*; parce que les Pierres qui ſervent aux jonctions ont deux branches, comme une fourche.

En un mot nous ne concevons aucune figure de Voute, qu'on ne puiſſe rapporter à la Sphère, au Cône & au Cylindre, & c'eſt dans ce rapport que nous faiſons conſiſter leur *difference eſſentielle*.

Quant aux differences accidentelles elles ſeront toujours produites par la differente poſition de leurs faces, comme celles des Sections des corps par la differente poſition des plans coupans, & celles de leurs arêtes d'Enfourchemens, comme celles des Courbes formées à la ſurface des corps qui ſe pénetrent, en quoi conſiſte la principale difficulté de l'Architecture des Voutes.

Des Variations accidentelles aux Voutes, comparées à celles des Sections des Corps.

S'IL ne s'agiſſoit dans la Coupe des Pierres que de former des Corps réguliers, il ne ſeroit pas fort neceſſaire de s'embarraſſer de la figure des ſections des Corps, un très-petit nombre ſuffiroit; mais parce que la principale difficulté vient des irrégularitez de leurs Angles Rectilignes, Curvilignes, & Mixtes, à la jonction des Surfaces Planes ou Courbes, qui les croiſent ou qui les terminent, on peut dire, que la Theorie des Sections eſt la baſe de cet Art.

Pour rendre ce diſcours ſenſible nous pouvons donner pour exemple les variations qui arrivent à une Voute en Berceau circulaire, laquelle eſt une moitié de Cylindre, par la ſeule poſition du mur, qui le termine par un bout, où ſe forme ſon Ceintre de face. Suppoſant ce mur à Plomb & perpendiculaire à la direction du Berceau, ſi on vient à le démolir pour le refaire en *Talud*, il arrivera deux changemens, l'un à la Courbure du Ceintre de face, qui ne ſera plus Circulaire, mais Elliptique, l'autre aux angles des pierres, qui compoſent cet arc, leſquels ne ſeront plus droits verticalement, mais changeront continuellement à chaque lit, devenant toujours plus aigus depuis l'impoſte juſqu'à la clef, où ils ſeront égaux à l'inclinaiſon du mur à l'horiſon, c'eſt-à-dire, au Talud. Si au lieu de refaire ce mur en Talud on le tourne de *Biais*, c'eſt-à-dire, obliquement à la direction du Berceau, il arrivera de même deux changemens, l'un à l'Arc de Face, qui de Circulaire deviendra Elliptique, d'une Ellipſe plus ou moins alongée, ſuivant l'obliquité du mur; l'autre aux lits des pierres, dont les angles, au lieu d'être droits horiſontalement, comme auparavant, deviendront aigus d'un côté, & obtus de l'autre, augmentant continuellement d'un côté à l'autre à chaque lit de Vouſſoir. Si on faiſoit le mur *Biais & en Talud*, il ſe feroit encore un autre changement dans le ceintre & dans les angles des pierres angulaires, qu'on appelle Ecoiçons. Par où l'on voit, que ſans toucher à la Voute, la courbe du ceintre & les angles des lits des vouſſoirs peuvent changer de trois manieres par le ſeul changement de poſition du mur, qui eſt une ſurface plane; telle eſt parfaitement la ſection d'un Cylindre par un plan, ſans en faire l'application au Berceau.

Il eſt aiſé de concevoir, que ſi au lieu d'un mur de face droit on en faiſoit un courbe, comme une portion de Tour creuſe, ou convexe,

Digitized by Google

ou ſi l'on y faiſoit aboutir une autre voute; les courbes de leur jonction ou enfourchemens pourroient infiniment varier auſſi bien que les angles des ſurfaces coupées par pluſieurs lits de vouſſoirs, qui pourroient être Rectilignes, Mixtes ou Curvilignes, d'une infinité d'ouvertures, & de Courbures differentes.

Pour nous énoncer en termes convenables à la Theorie, nous conſiderons le mur comme une ſurface plane, que nous appellons un *Plan*, & la voute comme un Cylindre, Cône ou Sphère, ſelon qu'il convient à la figure, & au lieu de dire une face Biaiſe en Talud ou à Plomb, nous dirons qu'un Cylindre eſt coupé par un plan perpendiculairement ou obliquement, ce changement d'expreſſion ſignifie toujours la même choſe. Cela ſuppoſé.

Pour traiter cette matiere par des principes, il faudroit commencer par les élemens des Sections Côniques; mais parce que ce prélude nous meneroit trop loin, & que les Livres qui en traitent ſont très-communs, nous avons cru pouvoir nous diſpenſer d'une rigoureuſe methode, en nous contentant de l'énoncé des propoſitions, qui ſont neceſſaires à l'intelligence de notre Doctrine de Stereometrie, ſuppoſant le Lecteur inſtruit des Elemens de Geometrie, & capable d'entendre les Démonſtrations fondées ſur les propoſitions, que l'on y trouve ordinairement, ſoit dans ceux d'Euclide, ou dans les autres Auteurs que nous n'avons pas cité. Nous avons cependant tâché de donner une introduction aux Sections Côniques, ſuffiſante au ſujet dont il s'agit; afin qu'on ne ſoit pas obligé d'avoir recours à d'autres Livres.

Stereotomie

PREMIERE PARTIE.

Des Sections des Corps coupez par des Plans.

CHAPITRE I.

Des Sections de la Sphère.

DE quelque maniere qu'on puiſſe couper une Sphère par un Plan, la Section ſera toujours un Cercle. La ſeule Geometrie naturelle, & l'uniformité de la Sphère, nous font ſentir cette verité; il ſuffit ſeulement de remarquer que lorſqu'elle eſt coupée par le centre, la ſection eſt la plus grande qu'on y puiſſe faire, d'où vient qu'on l'appelle *un grand Cercle*, ou, ſelon quelques-uns, *un cercle Majeur*, pour éviter l'équivoque du mot de *grand*, qui peut s'appliquer à une petite ſection comparée à une plus petite.

LES autres ſections ſeront toutes plus petites que celle qui paſſe par le centre, mais inégalement, ſelon qu'elles s'approcheront ou s'éloigneront du centre de la Sphère; enſorte qu'elles peuvent tellement diminuer, qu'elles ſe réduiſent à rien au point où le plan, au lieu de couper, ne fait plus que toucher la Sphère; & cette diminution ſe fait dans le rapport des Sinus des Arcs. Tous ces cercles inégaux ſont compris ſous le nom de *Petits Cercles* ou *Cercles Mineurs*.

DEFINITION.

1. LE point qui eſt à la ſurface de la Sphère, également éloigné de tous ceux de la circonference d'un cercle, s'appelle *le Pole* de ce cercle, qui n'eſt pas le même que le point de ſon centre; parce qu'il n'eſt pas dans le même plan que la circonference, mais hors de ce plan dans la ſurface de la Sphère.

Et parce qu'on peut trouver deux points diamétralement oppoſez, qui ayent la même proprieté à l'égard du même cercle, il ſuit que chaque cercle a deux Poles. La ligne droite qui paſſe par ces deux Poles, & par conſéquent par le centre du cercle, s'appelle *l'Axe* de la ſphère.

Corollaire I.

2. D'ou il ſuit, que les cercles, qui ne ſont pas paralleles, n'ont pas les mêmes Poles, & qu'on peut conſiderer ſur une ſphère autant de Poles qu'il y a de ſections inclinées entr'elles, & par conſéquent autant d'Axes; ainſi ſur la ſphère Armillaire, qui repréſente la Terre ou le Ciel, les Poles du Monde ne ſont pas les mêmes que ceux de l'Ecliptique; parce que les Poles du Monde ſont ceux de l'Equateur, auquel l'Ecliptique eſt inclinée de $23\frac{1}{2}$ degrez.

La ſection A*f*B*g*, qui eſt repréſentée ici en perſpective, eſt un *Cercle majeur*; parce qu'elle paſſe par le centre C de la ſphère. *Fig.* 1.

La ſection D*o*E F eſt un *Cercle mineur*; parce que ſon centre *c* eſt éloigné du centre C de la ſphère. Les Poles de la ſection AB ſont les points P & *p*, éloignez de A & de B, comme de *f* & de *g*; parce qu'ils ſont par-tout éloignez d'un quart de cercle de la circonference du cercle majeur.

Il n'en eſt pas de même des points O & *o*, qui ſont les Poles du Cercle Mineur DE; chacun d'eux eſt bien également éloigné des points de la circonference, mais ces éloignemens ne ſont pas égaux entr'eux, puiſque les arcs OD ou OE ſont plus petits que les arcs *o*D & *o*E, par la ſuppoſition, que DE ne paſſe pas par le centre C de la ſphère.

Corollaire II.

3. D'ou il ſuit que ſi un Cercle Majeur paſſe par le Pole d'un autre Cercle Majeur, ſon Pole ſera auſſi réciproquement à la circonference de celui-ci; ainſi les points A & B ſeroient les Poles du cercle, qui paſſeroit par les points P *p* perpendiculairement au plan du cercle P A *p* B, tels ſont, par exemple, l'Equateur & le Meridien, ou l'Horiſon & un des Cercles Verticaux. On peut voir là-deſſus les Sphériques de Theodoſe.

La partie de Sphère *b l* K *i* s'appelle un *Segment*. La partie S *n* V *t*,

qui eſt une portion de ſphère coupée par deux plans paralleles entr'eux, s'appelle un *Segment tronqué*, & ſa Surface une *Zone*, ou *Couronne de Sphère.*

Si une Sphère eſt coupée par trois ou pluſieurs plans inclinez entr'eux, qui paſſent par le centre C, il ſe fait une Pyramide Triangulaire, ou de pluſieurs côtez, dont le contour de la baſe eſt un triangle Sphérique, ou qui peut être diviſé en Triangles Sphériques, compoſez d'Arcs de Cercles Majeurs, comme on pourra le remarquer dans les voutes ſphériques fermées en Polygone, tel eſt le ſecteur *q m n p.*

CHAPITRE II.

Des Sections des Cônes coupez par des Plans.

4. ON diſtingue de deux ſortes de Cônes, l'une de ceux qu'on appelle *Droits*; parce que leur axe eſt droit, c'eſt-à-dire, perpendiculaire ſur leur Baſe, comme SC ſur BgA. *Fig.* 2.

L'autre de ceux qu'on appelle *Scalenes*, comme le cône *b s a*, dont l'axe S *c* eſt oblique au plan du cercle *b d a e*, qui eſt ſa baſe. *Fig.* 3.

De quelque eſpece que ſoit un cône, Droit ou Scalene, les ſections formées par des plans, qui les coupent, ſont toujours de même nature, excepté certains cas dont nous parlerons ci-après.

5. Une ſurface plane peut couper un cône de cinq manieres differentes, qui produiſent autant d'eſpeces de figures.

6. *Premierement.* Si un cône eſt coupé par un plan, qui paſſe par ſon ſommet, la figure de la ſection eſt toujours un *Triangle* Rectiligne, ſoit que le plan paſſe par l'Axe SC ou qu'il n'y paſſe pas. Dans le premier cas la ſection s'appelle le *Triangle par l'Axe*, comme B S A; dans le ſecond cas on l'appelle ſimplement *Section Triangulaire*, comme *s d e*. On ne peut faire dans le cône d'autre ſection rectiligne. *Fig.* 2. *Fig.* 3.

7. *Secondement.* Si l'on coupe un cône par un plan DF parallele à ſa Baſe BA, la Section ſera un cercle; parce que la Baſe BgA eſt toujours ſuppoſée Circulaire. Or il eſt aiſé de voir qu'une telle ſection fait des figures ſemblables, depuis le ſommet du cône juſqu'à ſa baſe.

8. *Troiſiémement.* Si l'on coupe un Cône Droit par un plan incliné à ſon Axe CS, comme DE ou D *e*, ou un Cône Scalene par un plan *Fig.* 2.

Digitized by Google

incliné au plan de la Baſe, enſorte qu'il rencontre les deux côtez SB, SA, la ſection eſt appellée une *Ellipſe*, telle eſt DREr (*Fig. 6.*) où l'on voit la partie inferieure du Cône, & ſa partie ſuperieure (*Fig. 7.*) retranchée par cette ſection, l'une & l'autre repréſentée en perſpective pour aider à l'imagination, & ſuppléer à ce qu'on n'a pû exprimer à la Fig. 2. qui ſert pour toutes les ſections. *Fig. 6.* *Fig. 7.*

9. Quoique cette propoſition ſoit géneralement vraie, elle ſouffre une exception dans les Cônes ſcalenes; car ſi le plan coupant le Cône obliquement à ſon Axe, & perpendiculairement au Triangle par l'Axe, fait avec les côtez, des angles égaux à ceux qu'ils font avec la baſe; mais en ſens contraire, la ſection ne ſera plus une Ellipſe, mais un Cercle; telle eſt la ſection *gf* dans le Cône ſcalene S*ba*, ſuppoſé que l'angle S*gf* ſoit égal à l'angle S*ba*, ce que l'on appelle *Section ſouſcontraire.* *Fig. 3.*

10. *Quatriémement.* Si un cône eſt coupé par un plan DP ou *dp*, parallelement à un des côtez SA, & que le triangle par l'axe coupe l'ordonnée Q*q* perpendiculairement, (*Fig. 8.*) la ſection ſera une *Parabole*, & telle qu'elle paroit en perſpective Fig. 8. en QD*q* ſur le cône, ou en QS*q*, (*Fig. 9.*) hors du cône. *Fig. 2. & 8.* *Fig. 9.*

11. *Cinquiémement*, ſi un Cône eſt coupé par un plan parallele à l'Axe SC, ou incliné à cet Axe, de maniere qu'il coupe encore l'autre, ſuppoſé qu'on le prolonge audelà du ſommet S, comme ID, qui rencontre AS prolongé en *x*, ou, ce qui eſt la méme choſe, ſi le plan qui coupe un cône, coupe auſſi ſon égal & oppoſé au ſommet, comme le plan paſſant par M*m* (*Fig. 4.*) coupe les cônes oppoſez ESF, GSI, la ſection s'appelle une *Hyperbole*, telle eſt la courbe *bd*A & *b*DH ſur le Cône, ou (*Fig. 5.*) B*da* ou LD*n* hors du Cône. *Fig. 2.* *Fig. 4.* *Fig. 5.*

Corollaire I.

12. D'ou il ſuit, 1.° que le changement d'obliquité des plans, dont les ſections forment les Ellipſes & les Hyperboles, change auſſi la figure de ces ſections ſans changer leur nature, en les alongeant plus ou moins, comme on peut le voir par les inégalitez des lignes DE & D*e*, qui ſont les grands axes, c'eſt-à-dire, les longueurs differentes de deux Ellipſes, de méme que les lignes DK, DH & DI ſont ceux des Hyperboles differemment ouvertes. *Fig. 2.*

Corollaire II.

13. 2.° Que les Ellipſes peuvent être alongées infiniment depuis la poſition du plan, coupant le cône perpendiculairement à un côté.

juſqu'à ce qu'elle devienne parallele à ce même côté, comme en DP ; alors la ſection change de nature & devient une *Parabole*, ce qui fait dire à quelques Mathematiciens, que la Parabole eſt une Ellipſe alongée à l'infini.

2.° Que les Ellipſes peuvent être infiniment reſſerrées & rétreſſies juſqu'à ce qu'elles deviennent ſans largeur, c'eſt-à-dire, que le petit axe ſoit réduit à zéro, comme il eſt viſible par les changemens de poſition, qui peuvent ſe faire, depuis la perpendiculaire à un côté tiré du point D, en remontant vers le ſommet S, comme en D*e*, juſqu'à ce que le plan ne coupe plus le cône, mais qu'il le touche ſeulement ſuivant la ligne BS.

3.° En continuant auſſi à changer la poſition du plan coupant, depuis la ligne DP, juſqu'à ce qu'il tombe ſur DB, on reſſerre de plus en plus l'hyperbole, & au contraire, depuis la poſition où il touche DB juſqu'à DP, elle s'ouvre de plus en plus, juſqu'à ce qu'elle ſe confonde avec la Parabole ; ainſi la Parabole eſt comme le paſſage de l'Ellipſe à l'Hyperbole ; de ſorte qu'on peut la conſiderer comme une Ellipſe dont le grand axe eſt infini, ou comme une Hyperbole dont le diametre tranſverſe eſt infini.

Corollaire III.

14. 3.° Que les Ellipſes & les hyperboles ſemblables ſont faites par des ſections de plan paralleles entr'eux, comme D*e*, *d*L pour les Ellipſes, & D*i*, *d*H pour les hyperboles ; ou par des plans, dont les poſitions à l'égard de l'axe & de la baſe ſont ſemblables ; parce que les figures ſemblables ſont celles dont les côtez, les axes & les ordonnées ſont proportionels, ou décrits ſur un même plan & ſur un même axe.

Corollaire IV.

15. Que toutes les paraboles étant faites par des plans paralleles à un côté, elles ne ſont pas variables, mais toutes ſemblables entr'elles, de ſorte qu'elles ne peuvent changer que de grandeur ; car *dp* & DP étant paralleles à SA, *dp* ſera parallele à DP, axe de la Parabole ; & quoique l'un ſoit plus long que l'autre dans le Cône terminé par la Baſe AB, il faut les conſiderer comme pouvant être prolongez auſſi bien que le cône.

Quoique nous établiſſions ici comme des définitions des ſections côniques, les differentes manieres dont on peut couper le cône pour

Digitized by Google

qu'il en réſulte des Cercles, Ellipſes, Paraboles & Hyperboles, on peut en démontrer la verité en faiſant voir que les courbes, auſquelles on a donné ces noms, étant conſiderées hors du cône, ſont les mêmes dans le cône; mais comme il ne nous convient pas d'entrer dans une matiere qui nous meneroit trop loin, & qui a été traitée par un grand nombre d'Auteurs, il nous ſuffit d'avancer ces veritez comme des Axiomes, ſur leſquels nous devons fonder nos raiſonnemens : Ceux qui voudront s'en inſtruire plus particulierement peuvent conſulter les Traitez des ſections cóniques; il nous paroît ſeulement à propos, en faveur de ceux qui n'ont étudié que les Elemens ordinaires de la Geometrie, où il n'eſt pas parlé d'autre courbe que du cercle, d'expliquer quelques termes, & d'expoſer quelques proprietez des autres ſections cóniques.

Définitions des Points & des Lignes remarquables dans les Sections Cóniques.

16. Dans trois des ſections cóniques on conſidere un point qu'on appelle *Centre*, ſçavoir dans le cercle, dans l'Ellipſe, & dans l'Hyperbole; mais il n'y en a point dans la Parabole.

17. Tout le monde ſçait, que le centre du cercle eſt également éloigné de tous les points de la circonference; il n'en n'eſt pas de même dans l'Ellipſe, il n'eſt équidiſtant de la circonference qu'à l'égard de quatre points oppoſez, mais il eſt au milieu de tous les diametres; ainſi le centre C (*Fig.* 7.) diviſe en deux également les *Diametres* inégaux *e d*, *m* T, *it.* *Fig.* 7.

Le plus grand de tous les diametres s'appelle *le Grand Axe*; le plus petit, *le Petit Axe*; ces deux ſont perpendiculaires entr'eux, mais non pas les autres, comme nous le dirons ci-après.

18. Dans l'hyperbole le point appellé *Centre* n'eſt pas au dedans de la Courbe, mais au dehors, entre les deux ſections des cónes égaux oppoſez au ſommet, comme en C (*Fig.* 4.) & en *c* (*Fig.* 5.) où eſt le milieu de la plus courte ligne D *d*, qu'on puiſſe mener d'une ſection à l'autre, qu'on appelle *l'Axe Tranſverſe*, ou *l'Axe Déterminé*, ou *le premier Axe*, & la ligne qui lui eſt perpendiculaire S*s*, & double de la diſtance du milieu C, au ſommet S, eſt appellé le *ſecond Axe*, le premier s'appelle quelquefois *grand Axe*, & le ſecond *petit*; mais cette dénomination eſt impropre, parce que le ſecond axe peut devenir plus *Fig.* 4.

grand que le premier dans tous les cas où l'angle DS*d* eſt aigu; les autres lignes menées d'une hyperbole à l'autre par le centre C, comme PR, (*Fig.* 5.) ſont appellées *Diametres.*

19. QUANT à la Parabole il n'y a point de centre; parce qu'il n'y a aucune diviſion égale à faire dans aucun Diametre, ni dedans ni dehors de la ſection; au dedans, parce qu'étant ouverte & ſes Diametres étant infinis, en ce qu'ils ne coupent la courbe que par une de leurs extremitez où eſt leur *Origine*, ils ne peuvent être coupez en deux également; ni au dehors, parce qu'il ne peut y avoir deux termes, puiſque le plan coupant le cône étant prolongé, ne peut couper l'oppoſé au ſommet, à cauſe qu'il eſt parallele à ſon côté.

20. ON appelle *Diametre* toute ligne droite qui en coupe également deux autres paralleles entr'elles, terminées de deux côtez à une circonference; & *Axe*, le diametre qui les coupe perpendiculairement, & paſſe par le ſommet principal de la ſection; ainſi, par exemple, dans la parabole (*Fig.* 9.) la ligne T*u* eſt un Diametre; parce qu'elle coupe en deux également en *o* les deux paralleles *rs*, zR, & SP eſt un axe, parce qu'il paſſe par le ſommet principal S de la courbe, & coupe la ligne Z*q*, en deux également, & particulierement en P, de même que D*d* dans l'Hyperbole, (*Fig.* 5.) & DE dans l'Ellipſe, *Fig* 6.

Apol. l. 2. p. 28.

21. LES lignes perpendiculaires aux Axes ſont appellées *Ordonnées*, comme P*q*, *p*Q (*Fig.* 9.) *o r* OR (*Fig.* 5.) pour l'Hyperbole, & CR *o r* (*Fig.* 6.) pour l'Ellipſe. On appelle du même nom les lignes obliques aux autres Diametres, qui ſont coupées en deux également, comme (*Fig.* 9.) ZR, *r s* paralleles entr'elles dont nous venons de parler, ne faiſant attention qu'à leur moitié ZO, *r o.*

Fig. 9. *Fig.* 5.

22. LA principale marque des ordonnées eſt celle d'être *paralleles à la Tangeante*, qui paſſe par l'extremité du Diametre, auquel elles ſont ordonnées; ainſi (*Fig.* 9.) ſi T*u* eſt une Tangeante au point T, extremité du Diametre T*u*, & qu'on lui mene une parallele *o r* ou OZ, ces deux lignes *or* & OZ ſont des ordonnées au diametre T*u*; il en ſera de même dans l'Ellipſe & dans l'Hyperbole; on les appelle auſſi *Appliquées*, en Latin *Ordinatim applicatæ.*

LES parties des Axes ou des autres Diametres, qui ſont compriſes entre l'extremité T, (*Fig.* 9.) & les points *o* & O, où ils ſont coupez par les ordonnées, s'appellent *Abſciſes*, du Latin *abſcindere*; ainſi T*o* & TO ſont des Abſciſes du Diametre T*u* & S*p*, SP celles de l'Axe.

Fig. 9.

23. LES Abſciſes & les Appliquées, conſiderées les unes à l'égard des autres, s'appellent *Co-ordonnées.*

Les diametres T*m*, *ti* (*Fig.* 7.) qui ſe croiſent, de maniere qu'ils ſont paralleles aux Tangeantes T L, *tl*, qui paſſe par les extremitez T & *t* ſont appellez *Conjuguez*. La méme choſe doit s'entendre pour les Hyperboles. *Fig.* 7. *Apol. l.* 2. *p.* 10.

24. La partie d'un Axe prolongé hors de la ſection, comme D Y (*Fig.* 6.) compriſe entre l'ordonnée *to* à cet axe, menée du point d'attouchement *t* d'une tangeante *t* Y, & le point de rencontre Y de l'axe & de la tangeante s'appelle *Souſtangeante*. *Fig.* 6.

25. La troiſiéme proportionelle à deux Diametres conjuguez eſt appellée *Parametre*, de celui qui eſt le premier terme dans l'Ellipſe & dans l'Hyperbole; & pour la parabole c'eſt la troiſiéme proportionelle à l'Abſciſe & à l'Ordonnée, ou à la Souſtangeante & à la Tangeante.

26. La ligne droite qui eſt la rencontre du plan de la baſe du cône, prolongée s'il le faut, & d'un autre plan paſſant par le ſommet parallelement à une ſection cónique, eſt appellée *Directrice*; telles ſont les lignes *e* I pour l'Ellipſe, (*Fig.* 6.) K L pour l'Hyperbole, (*Fig.* 4.) & A*g* pour la Parabole, (*Fig.* 8.) La premiere de ces lignes eſt toute hors du cône, la ſeconde toute au dedans, & la troiſiéme eſt Tangeante à la Baſe du cône. *Fig.* 6. 4. 8.

On appelle auſſi *Directrice* une ligne qui eſt dans le méme plan qu'une ſection, & perpendiculaire à un axe, à certaine diſtance de ſon ſommet, comme D *i* eſt la Directrice de la Parabole Q S*q*, (*Fig.* 9.) ſi elle eſt éloignée du ſommet S au dehors, autant que le Foyer F eſt au dedans; plus loin de l'Ellipſe, & plus près pour l'Hyperbole.

27. Outre ces lignes communes à toutes les ſections cóniques, il y en a encore de particulieres à l'Hyperbole, qu'on appelle *Aſymptotes*, ce ſont des lignes droites AY *ay*, (*Fig.* 5.) qui paſſent par le centre C des ſections oppoſées, & qui en approchent continuellement ſans jamais les rencontrer, proprieté merveilleuſe, & difficile à concevoir, quoique la verité en ſoit démontrée. Ces lignes ſont les interſections de deux plans, qui touchent la baſe du cône aux extremitez L & K de la directrice, & paſſent par le ſommet S du cône. *Fig.* 5. *Fig.* 4.

28. Les points qu'on appelle *Foyers* méritent encore d'être conſiderez, à cauſe de leurs grandes proprietez, pour la deſcription des ſections cóniques; leur ſituation eſt ſur un premier axe, à quelque diſtance de ſon extremité.

29. Dans l'Ellipſe il y en a deux ſur le grand axe, deſquels ſi l'on

Digitized by Google

tire des lignes droites, qui ſe joignent à un point quelconque de la circonference, leur ſomme eſt toujours égale à la longueur de ce grand
Fig. 7. Axe; ſi les points F & *f* (*Fig.* 7.) ſont les Foyers de l'Ellipſe, A *s* T *i* la ſomme des lignes *fg* & F*g* eſt égale à l'Axe A *a*.

30. Dans les Hyperboles oppoſées il y en a auſſi deux F & *f* ſur
Fig. 5. le principal axe prolongé *d*D, (*Fig.* 5.) deſquels ſi l'on mene deux lignes FP *f*P au même point P de la courbe, pris où l'on voudra, la difference P *q* de ces deux lignes eſt égale au principal Axe. *Voyez les Traitez des Sections Cóniques de* M. de L'Hopital, *Article* 73.

Fig. 9. 31. Dans la parabole il n'y en a qu'un en F ſur l'axe SP (*Fig.* 9.) duquel ſi on mene une ligne F *h* à un point quelconque de la parabole QS *q*, cette ligne ſera égale à la ligne *hi*, menée du même point à la directrice D *i*, parallelement à l'axe DP.

Expoſition de quelques proprietez des Lignes menées au-dedans & dehors des Sections Cóniques, dont la connoiſſance fournit differens moyens de les décrire, dans certaines circonſtances de Lignes & de Points donnez.

32. Si l'on tire deux lignes paralleles au dedans d'une ſection Cónique terminées à ſa circonference de part & d'autre, & qu'on les diviſe en deux également, la ligne qui paſſe par leur milieu, & qui ſe termine à ſa ſection eſt un *Diametre*, cette proprieté eſt une ſuite de la définition que nous avons donné des lignes appellées Diametres.

Des Abſciſes & des Ordonnées des Sections Cóniques.

Nous avons dit que le triangle étoit la premiere ſection du cône; mais comme elle eſt rectiligne il n'en eſt pas queſtion ici, où nous ne parlons que des courbes. Cependant nous remarquerons en paſſant, qu'elle a ſes abſciſes & ſes ordonnées, qui ont un certain rapport. Si l'on fait *y* F parallele à CA, (*Fig.* 2.) S *y* ſera une abſciſe, &
Fig. 2. *y* F une ordonnée à l'axe SC du triangle BSA, on trouvera donc que

Le Rectangle fait de ſon abſciſe S *y*, par la moitié de ſa baſe CA, eſt

égal

égal au Rectangle fait de ſon Ordonnée yF par ſon Axe; car à cauſe des paralleles $Sy : yF :: SC : CA$; donc $Sy \times CA = yF \times SC$. Fig. 10

33. Dans le cercle le Rectangle fait des Abſciſes, l'une par l'autre, eſt égal au quarré de l'ordonnée $AO \times OB$ (*Fig.* 10.) $= \overline{OR}^2$, cela eſt démontré dans les élemens de la Geometrie d'Eucl. l. 3. pr. 35.

34. Dans l'Ellipſe les *Quarrez des ordonnées ſont entr'eux, comme les Rectangles des Abſciſes*, ſi ADB eſt une demie Ellipſe $\overline{ot}^2 : \overline{CD}^2$ ou $\overline{or}^2 : \overline{CE}^2$ dans la demie Ellipſe $AFB :: AO \times OB : AC \times CB$: cette proprieté eſt démontrée dans tous les traitez des ſections cóniques.

35. Dans la Parabole *les Quarrez des Ordonnées* or, OR (*Fig.* 8.) *ſont entr'eux comme les abſciſes* Do, DO, ainſi $\overline{OR}^2 : \overline{or}^2 :: DO : Do$. Fig. 8.

36. Dans l'Hyperbole le rapport des Quarrez des Ordonnées entr'eux, & aux Rectangles des Abſciſes eſt le même que dans l'Ellipſe, en ajoutant aux abſciſes le Diametre qui eſt au dehors de l'Hyperbole entre les ſections oppoſées; ainſi $\overline{or}^2 : \overline{Ft}^2 :: Do \times od : DF \times Fd$. Fig. 5.

Corollaire I.

37. D'ou il ſuit que les ordonnées également éloignées du centre d'une ſection qui en a un, ſont égales entr'elles, puiſqu'elles ont un même rapport à des rectangles égaux $\overline{eo}^2$ (*Fig.* 7.). $mO \times OT :: \overline{no}^2 : mo \times oT$; mais à cauſe de $OC = oC$ par la ſuppoſition $mO \times OT = mo \times oT$, donc $eO = no$. Fig. 7.

38. Dans la parabole la propoſition doit s'appliquer aux Ordonnées équidiſtantes d'un Diametre, comme ſi $or = oS$, on aura $rx = Sy$, (*Fig.* 9.) ce qui eſt clair, parce que la figure $rxyS$ eſt un Parallelograme. Fig. 9.

Corollaire II.

39. Dans toutes les ſections cóniques les lignes paralleles à un Diametre TO, équidiſtantes du point d'attouchement T d'une Tangeante AD (*Fig.* 11.) compriſes entre la tangeante & la courbe, comme Br, Cv, AR, DG ſont égales entr'elles; car ſi par les points r & R on mêne des paralleles à la tangeante AD, ces lignes ſeront des Ordonnées au diametre TO, qui les coupe en deux également au point O & o; donc le parallelograme $To\,rB = To\,VC$, & le parallelograme $TORA = TOGD$; donc $Vr = CB$, & $AR = DG$. Fig. 11.

COROLLAIRE III.

40. Si deux ou plusieurs lignes paralleles eb, ti terminées à la circonference d'une Ellipse, ou d'une autre section cônique, sont coupées par une troisiéme HK, les rectangles faits des parties des paralleles, comparez à ceux des parties de celle qui les coupe, sont entr'eux en même raison $tq \times qi : Hq \times qK :: ep \times pb : bp \times pK$; parce que chacun de ces rectangles a même raison au quarré de la Tangeante, qui est parallele aux lignes dont il est formé, ce qui est démontré dans les traitez des sections cóniques. Fig. 7.

Proprietez particulieres à l'Ellipse.

LE grand usage que nous avons à faire de l'Ellipse m'engage d'ajouter ici quelques proprietez qui lui sont particulieres, & qui servent à la décrire dans certaines circonstances.

41. Si le Diametre AB d'un cercle ou demi cercle AEB, est commun à une Ellipse ou demie Ellipse, décrite sur le diametre au dedans ou au dehors du demi cercle, comme ADB ou AFB, & qu'on lui méne les ordonnées or CF, *les ordonnées au Cercle seront entr'elles comme celles de l'Ellipse*, OR : CE :: Or : CD, & OR : Or :: CE : CF; parce que l'Ellipse n'est qu'un cercle alongé ou rétressi, & que les quarrez des Ordonnées auront toujours le même rapport entr'eux que celui des mêmes rectangles AOB, ACB. Fig. 10. Fig. 10.

42. Cette proprieté est encore vraïe, quand même les ordonnées ne seroient pas perpendiculaires à l'axe AB, comme sont or & CD;* car si par leurs extremitez r & D on méne des parelleles au Diametre AB, qui couperont les ordonnées au cercle CE, & oR en F & g, il se fera deux triangles semblables CPFD & ogr, qui feront voir que les ordonnées de l'Ellipse sont en même raison que celles du cercle, puisque si l'on fait CF : CE :: og : oR, les points F & g seront à la circonference d'une Ellipse; mais CD : CF :: or : og; donc CD : CE :: or : oR. C. q. f. d. * Fig. 12.

43. La somme des deux Axes est plus petite que celle de deux diametres conjuguez quelconques, & leur difference est plus grande que celle de ces diametres.

44. Cependant la somme des quarrez de deux diametres conju-

Digitized by Google

guez mT, ti eſt égale à celle des quarrez des deux axes At, Bb; cela eſt démontré dans tous les traitez des ſections cóniques. Fig. 7.

Des Tangeantes des Sections Cóniques.

45. SI par un point t on mêne une tangeante tY, qui rencontre un axe ou diametre quelconque, prolongé en Y, & une ordonnée to à ce diametre, la partie YD de la ſouſtangeante Yo ſera égale à l'abſciſe Do dans la parabole; elle ſera plus grande dans l'Ellipſe, & plus petite dans l'hyperbole; ainſi l'arc de la ſection qui paſſera entre D & Y, ſi D étoit le milieu de OY, ſera une hyperbole, & celui qui paſſera entre D & O, dans la même ſuppoſition, ſera une Ellipſe. Cela eſt démontré dans les traitez des ſections cóniques. Fig. 6. 8. 5. Fig. 8.

46. Dans la même Fig. 6. ſi une tangeante tY rencontre l'axe ED prolongé, ou un autre diametre, & que du point d'attouchement t on lui mêne une ordonnée to, les lignes Co, CD, CY ſeront continuellement proportionelles, non ſeulement dans l'Ellipſe, mais auſſi dans l'hyperbole, on aura Co : CD :: CD : CY. Fig. 6. Fig. 5.

47. Si deux lignes aT, at qui concourrent en a, touchent une ſection cónique quelconque aux points T & t; la ligne menée du point a par le milieu m de la ligne Tt, qui joint les points d'attouchement, eſt un diametre, & par l'inverſe, ſi elle eſt un diametre, elle paſſera par m. Fig. 13. *Apollonius l. 2. p. 19. & 20.*

48. Si une ſection cónique eſt touchée par deux lignes at, aT [Fig. 13] la ligne Tt, qui paſſe par les deux points d'attouchement, étant prolongée vers b, ſi de ce point pris à volonté, l'on tire deux autres tangeantes bN, bE, elles couperont les deux précedentes en F & D, je dis que la ligne Fa ſera diviſée *harmoniquement*, c'eſt-à-dire, que les trois lignes aF, at & aD ſont harmoniquement proportionelles; la premiere ſera à la troiſiéme, comme la difference de la premiere & de la ſeconde eſt à la difference de la ſeconde & de la troiſiéme Fa : aD :: Ft : tD. Cette proprieté nous ſervira à trouver les points d'attouchement dont nous aurons beſoin au deuxiéme Livre, par une méthode très-facile.

On ne s'arrête pas ici à démontrer toutes ces véritez, qui en ſuppoſent d'autres, auſquelles il faudroit remonter; il ſuffit qu'elles le ſoient dans les Livres connus, comme ſont les ſections cóniques d'Apollonius, de M. de la Hire & du Marquis de l'Hopital, pour

Digitized by Google

nous ſervir à raiſonner conſéquemment dans les uſages que nous devons en faire.

De quelques differences de Poſition des Sections Côniques dans les Cônes Scalenes.

QUOIQUE les Cônes Scalenes ne ſoient pas d'une nature differente de celle des cônes droits, l'obliquité de leur axe ſur le plan de la baſe occaſionne quelque difference dans les ſections, à ne conſiderer que leur poſition reſpective.

49. PREMIEREMENT. Nous avons fait voir que la ſection d'un plan, oblique à l'axe du cône ſcalene, dont il coupe les deux côtez, pouvoit être un cercle, quoique naturellement cette ſection ſoit une Ellipſe.

50. SECONDEMENT. Les ſections faites par des plans paralleles à la baſe, qui ſont des cercles dans les cônes droits, peuvent être des Ellipſes dans les cônes ſcalenes, s'ils ſont conſiderez comme des cônes droits ſur une baſe Elliptique; car ſi l'on ſuppoſe que la baſe *b e a d* [*Fig.* 3.] eſt une Ellipſe, & qu'une ligne *s a* immobile ſur ſon point *s*, parcourt vers ſon autre extremité *a* le contour de cette Ellipſe, la figure qui en réſultera ſera un cône ſcalene de baſe Elliptique; on peut imaginer la même generation pour un cône droit, comme ſi la baſe B *g* A [*Fig.* 2.] étoit une Ellipſe.

Fig. 3.

Fig. 2.

IL ſeroit toujours évident que toutes les ſections faites par des plans paralleles à ces baſes ſeroient des Ellipſes ſemblables à celles de la baſe; car tous les diametres poſſibles DF, BA d'une ſection par l'axe B S A, ou K I, *b a* [*Fig.* 3.] ſeroient proportionels à ceux d'une autre ſection par l'axe du même cône.

MAIS toutes les ſections obliques dans ce cône ne ſeroient pas des Ellipſes, car ſans s'arrêter à la ſection ſouſcontraire, qui n'a pas lieu dans ce cas; puiſque la baſe n'eſt pas circulaire, on pourra toujours démontrer que de tels cônes peuvent être coupez par un plan incliné à l'axe, & qui ne fera pas avec les côtez des angles égaux à ceux de la baſe, c'eſt-à-dire, des côtez du triangle par l'axe avec la baſe, dont la ſection ſera un cercle, ainſi que la ſouſcontraire; car ſi l'on tire la droite *s x* ſur la ſurface du cône, & *n c* dans la baſe au centre C, & *o m* parallele à *n c*; puiſque *o m* : *n c* :: S *m* : S *c* le diametre *o m* ſera plus petit que *n c* dans le rapport de K *m* à *b c*. Si, par exemple, *b c* : *c n* :: le grand axe eſt au petit, le même rapport ſera entre K *m*

demi

& *m o*, donc K *m* ſera plus grand que *m o*; or il eſt clair qu'en changeant l'inclinaiſon du plan de la ſection, par exemple, en *r*, on peut racourcir ce demi axe K *m* juſqu'à ce qu'il devienne égal à *m o*, comme ſi du point *m* pour centre & pour rayon *mo* on coupoit le côté *b* S en *r*, ce qui eſt poſſible à l'égard de pluſieurs côtez diametralement oppoſez, puiſque *m* K eſt plus grand que *m o*, alors les points *r* & *o* ſeront également éloignez du centre *m*, par conſéquent les axes étant égaux entr'eux la ſection ſera un cercle. S'il s'agiſſoit au contraire d'alonger le petit axe, il eſt viſible qu'il n'y auroit qu'à incliner le plan de la ſection du côté de ce petit axe.

Voyez le problême à la page 223.

THEOREME I.

La ſection plane Elliptique faite dans l'intervale de deux Cônes Concentriques & ſemblables, comme entre les ſurfaces concaves & convexes d'un cône creux d'égale épaiſſeur, *eſt une couronne compriſe par deux circonferences d'Ellipſes, qui ne ſont pas équidiſtantes, & qui ne peuvent être concentriques que dans les cônes ſcalenes, lorſque la ſection eſt perpendiculaire à l'axe.*

Soit [*Fig. 6.*] un cône F *s* G concentrique & ſemblable au cône BSA, dans lequel on le ſuppoſe, il eſt évident par la ſuppoſition, que leurs côtez BS, F *s*; AS, G *s* ſeront non ſeulement paralleles, mais équidiſtans dans la ſection du triangle par l'axe BSA. *Fig. 6.*

Il eſt encore clair que le plan de la ſection oblique DE, que nous ſuppoſons perpendiculaire au triangle par l'axe, étant également incliné à l'axe commun SX, de l'un & de l'autre cône, il ſera des Ellipſes ſemblables DRE dans le grand, & *d h e* dans le petit.

Il faut préſentement faire voir que quoique les deux ſurfaces des cônes ſoient équidiſtantes, & leurs baſes, concentriques, les ſections Elliptiques ne le ſont pas; des points D & *e* ſoient tirées les perpendiculaires D *x*, *e* K, qui ſeront égales par la ſuppoſition.

Puisque l'angle D *ds* exterieur au triangle *d s e* eſt plus grand que l'interieur oppoſé *d e s*, ou ſon égal DES, la ligne D *d*, compriſe entre les deux paralleles SB, *s* F ſera plus courte que la ligne *e* E compriſe entre les paralleles équidiſtantes de ces premieres; car puiſque D *x* = *e* K, faiſant K *y* = *d x*, le côté *e y* ſera = D *d*; or puiſque l'angle *e* E K eſt plus petit que *e y* K, c'eſt-à-dire, la ligne *e* E plus oblique ſur

Digitized by Google

EK, elle ſera plus grande que *ey*, *ce qu'il falloit démontrer*; donc les Ellipſes DRE & *dbe* s'approcheront plus vers D que vers E ſur l'axe DE; par conſéquent elles ne ſeront ni équidiſtantes, ni concentriques, *ce qu'il falloit* premierement *démontrer.*

Secondement. Si le cône au lieu d'être droit étoit ſcalene, il eſt clair que l'axe étant oblique à ſa baſe circulaire ſera perpendiculaire à quelques ſections Elliptiques; dans ce cas nous pouvons conſiderer la figure 6. differemment du cas précedent, en ſuppoſant la baſe BA Elliptique, & la ſection oblique DE circulaire [ſi l'on veut] ou Elliptique.

Il eſt clair que les diſtances des Ellipſes de la baſe AB dans la ſection du triangle par l'axe BSA ſont égales en BF & AG; parce que le diametre commun BA eſt également incliné aux côtez des cônes intérieur & extérieur; mais entre ces deux extremitez on ne peut trouver aucune partie des deux circonferences des Ellipſes, qui ne ſoient plus ou moins éloignées. Pour le démontrer, ſoit un plan SNX perpendiculaire au triangle par l'axe BSA, qui coupera les Ellipſes ou les cercles DRE & *dbe* ſuivant une ligne *on*, qui ſera perpendiculaire à ce triangle, de même que XN; par conſéquent ces deux lignes *on*, XN ſeront paralleles entr'elles, donc leurs parties *ln*, LN compriſes auſſi entre deux paralleles SN & *s*L ſeront égales entr'elles; mais l'intervale *ln* des circonferences de la ſection oblique n'eſt pas égal aux intervales D*d*, & E*e*; puiſqu'il eſt plus long que l'un & plus petit que l'autre; donc l'intervale LN des deux Ellipſes de la baſe ne ſera pas égal aux diſtances BF, AG; en effet la ſection *ba* par la perpendiculaire *on* parallelement à la baſe BA ſera des Ellipſes ſemblables dans l'un & l'autre cône, auſquelles l'axe *on* eſt commun avec une ordonnée de la ſection oblique; or les diſtances des deux cônes en D*d* & *bf* ſont entr'elles comme DO à *b*O; ainſi le rapport de D*d* à *bf* augmente depuis le triangle par l'axe juſqu'à la ſection perpendiculaire au plan en Q*n*, & au contraire elle diminuë depuis le point *n* juſqu'en E; donc la diſtance LN ſera moyenne entre celle des extremitez BF & AG. Elle ſera plus petite ſi DE ou BA eſt un grand axe, ou plus grande ſi BA eſt un petit axe.

De cette inégalité de diſtances des Ellipſes concentriques à leur axe, s'enſuit néceſſairement celle de tous les points d'une extremité d'un diametre à l'autre; puiſqu'elles ſe rapprochent & s'éloignent d'une diſtance proportionelle à celle des axes; donc les Ellipſes de la baſe, quoique concentriques, ne ſont pas équidiſtantes, *ce qu'il falloit démontrer.*

Digitized by Google

Scolie.

Il faut cependant remarquer, que, quoique les Ellipſes concentriques ſemblables ne ſoient pas équidiſtantes, meſurées ſur differens axes & diametres, elles le ſont cependant ſur les mêmes axes & ſur les mêmes diametres; & même non ſeulement ſur toutes les lignes droites qui traverſent ces deux circonferences, mais encore ſur celles qui ne ſont que toucher l'intérieure ſans la couper, ce qui fournit une maniere aiſée de faire une Ellipſe *Aſymptotique* à une autre donnée; il ſuffit d'en avoir un ſeul point, comme nous le dirons au ſecond Livre. Je me ſers de ce terme, parce que cette proprieté qui eſt ſemblable à celle de l'hyperbole à l'égard des aſymptotes, a donné occaſion à M. de la Hire * d'appeller les ſections cóniques, concentriques, & ſemblables *Aſymptotiques*.

* *Sect. con. l. 6. p. 127.*

Corollaire I.

On peut étendre cette propoſition aux autres ſections qu'aux Ellipſes, ſi l'on veut conſiderer avec les Mathematiciens la parabole, comme une Ellipſe dont l'axe eſt infiniment long, & l'hyperbole comme une Ellipſe renverſée, qui a ſes Foyers en dehors; en effet ſi l'on coupe un cône creux d'égale épaiſſeur, de maniere que le plan coupant faſſe une de ces deux ſections, on remarquera viſiblement, que la courbe de la ſurface intérieure n'eſt pas parallele à celle de l'extérieure.

Application à l'Uſage.

Cette propoſition fait voir que les arcs des arêtes de Doële & d'Extrados des faces des voutes cóniques, qui ſont obliques à la direction de l'axe, comme aux Trompes biaiſes & ſurbaiſſées à leur face, ne doivent pas être paralleles entr'eux, comme les font quelques Auteurs de la Coupe des pierres; car ſi l'arc de doële n'eſt pas plus près de l'extrados à une Impoſte, qu'à l'autre du côté de l'angle le moins aigu, la voute deviendra moins épaiſſe du côté oppoſé qui eſt le plus long, de ſorte que le côté & le piédroit le plus long & le plus chargé deviendroit le plus foible, ce qui eſt évidemment contre la bonne conſtruction.

Il ne faut pas dire que cette difference eſt ſi peu conſiderable, qu'on lui peut préferer la ſimetrie extérieure de la face; car ſans faire de ſuppoſition de cas extraordinaire, l'axe ED peut fort bien être perpendiculaire au côté SB, ſi l'angle S étoit plus ouvert, par exem-

angle

ple, de 60. degrez, alors le même axe feroit en E un axe de 30. degrez avec le côté SA, or dans cette ſuppoſition il eſt clair que la voute ſeroit moitié moins épaiſſe à l'impoſte SE qu'à l'impoſte SD; car les diſtances des paralleles SB, *s*F, SA, *s*G ſont en raiſon des ſinus des angles, que la ligne ED fait avec les côtez; mais le ſinus total eſt double de celui de 30. degrez, donc la diſtance *e k*, c'eſt-à-dire l'épaiſſeur de la voute vers E *i* ne ſera que la moitié de D *x*, qui eſt celle du côté SD. Il n'eſt pas néceſſaire de démontrer ce rapport qu'on apperçoit d'un coup d'œil par celui des triangles ſemblables EK*e*, & ESD, ſi l'angle D eſt ſuppoſé droit, & l'angle S de 60. degrez, ce qui n'eſt pas de même dans la figure 6; or *e* K eſt égal à la diſtance des paralleles vers D & *e* E, celle des mêmes ou de leurs égales priſe obliquement ſur la ligne ED; donc, &c.

En ſecond lieu, ce problême fait voir, que lorſqu'un ceintre eſt Elliptique on ne peut lui faire un ceintre parallele qui ſoit auſſi Elliptique, de ſorte que s'il s'agit, par exemple, d'un Bandeau ou d'une Archivolte, & que l'on faſſe les deux arêtes de doële & d'intrados Elliptiques, il ſera inégalement large, & s'il eſt par-tout également large les deux arêtes ne ſeront pas exactement Elliptiques, ce qui eſt ſurprenant & incroyable aux Ouvriers, & aux gens qui n'ont point de Theorie.

THEOREME II.

Pl. 2. *Une Section Cônique donnée peut être celle d'une infinité de Cônes differens.*

Fig. 16. 17. & 18. Soit [*Fig.* 16. 17. & 18.] une ſection cônique DAC, dont AB eſt un diametre, auquel la ligne CD eſt une ordonnée, diviſée en deux également en M, on lui menera par ce point une perpendiculaire F E, de longueur priſe à volonté ſur un plan incliné à celui de la ſection cônique donnée, d'une telle inclinaiſon que l'on voudra (ce qu'on ne peut repréſenter dans ces figures qu'en perſpective) ſur cette ligne F E comme diametre, on décrira un cercle FDEC, dont la ligne DE ſera une corde commune à l'ordonnée de la ſection cônique: ſi par les points EABD on tire les lignes ES, FS, qui ſe rencontreront en S, je dis que le ſommet S ſera celui d'un cône, qui aura pour baſe, ou ce qui eſt la même choſe, pour ſection parallele à la baſe, le cercle FDEC, & pour autre ſection la ſection donnée DAC, ce qui eſt clair par la conſtruction & par la generation du cône, ſuppoſant qu'une ligne SB, immobile ſur ſon point S, parcourt la circonférence du cercle DFCE; puiſque par la même conſtruction cette ligne paſſera par les deux points communs DE, & par les extremités des diametres AB, EF des deux ſections le cercle & l'Ellipſe; or puiſque le diametre du

tre du cercle FE peut être varié de longueur, & que l'on peut même changer la position de ſon centre en l'approchant ou l'éloignant du point M, il eſt viſible que le point S changera auſſi de poſition, puiſqu'elle dépend de celle des extremitez de ce diametre, par exemple, ſi au lieu du terme E on en prenoit un autre plus en dehors en K ou en L, le point S tomberoit en *x* ou en *y*, & de même ſi l'on rapprochoit ou éloignoit l'autre terme F, le point S tomberoit plus haut ou plus bas; donc on peut faire paſſer une infinité de ſurface de cônes differens par la circonference de la ſection cônique donnée, *ce qu'il falloit démontrer.* *Fig.* 17.

Corollaire.

De-la il ſuit que ſi une ligne AS, immobile ſur le point S, pris à volonté, ſe meut au tour d'une ſection cônique ouverte, comme la parabole ou l'hyperbole, il ſe formera une pyramide mixte, qui ſera toujours une portion de cône, & par conſéquent dont les ſections qui ne ſeront pas paralleles à la baſe ouverte donnée, pourront être connuës en cherchant la baſe du cône, dont cette pyramide mixte eſt une partie, de la maniere que nous venons de le dire. *Fig.* 19.

Ou bien ſans achever le cône, ni connoître le cercle de la baſe, on peut les connoître par la comparaiſon des parties des ſouſtangeantes, qui ſont au deſſus & au dehors du cône [par l'article 45.]

Soit, par exemple, la baſe donnée ARP une parabole, ſi l'on ſuppoſe la pyramide ARPS coupée par un autre plan incliné à cette baſe, dont l'interſection ſoit AP, & qui coupe le côté SR en H, on menera pas un point quelconque de la baſe, comme T, une tangente TN, qui rencontrera l'axe MR de la baſe prolongé en N, & ayant tiré NS, on imaginera un plan TNS, qui touchera la pyramide ſuivant la ligne TS menée du point d'attouchement de la baſe au ſommet S, laquelle coupera la courbe AHP en *u*, par où on menera dans le plan incliné une ligne *ux* parallele à AP, & un autre *uy* tangeante à la même courbe, qui rencontrera en *y* l'axe M*y*, qui eſt dans le même plan que MN; ſi la longueur H*y* eſt plus petite que H*x*, c'eſt une marque que la ſection qu'on veut connoître eſt une hyperbole; ſi au contraire elle étoit plus grande, comme LE à l'égard de E*d*, ce ſeroit une Ellipſe, & ſi elle étoit égale, comme on ſuppoſe *m*R & RN, qui ne le ſont cependant pas dans la figure, par exemple, *d*I & I*n*, ce ſeroit une parabole, ce qu'il eſt plus facile d'appercevoir en examinant, ſi les plans *nd* & NM ſont paralleles entr'eux.

Digitized by Google

Application à l'uſage.

Cette propoſition fait voir que l'on peut appliquer à toute ſorte de voutes cóniques tel ceintre de face qu'on jugera à propos, avec telle poſition ou inclinaiſon de l'axe qu'on jugera convenable à la voute qu'on ſe propoſe de faire, par exemple, qu'on peut faire une Trompe de niveau ou rampante, dont le ceintre de face ſoit ſurhauſſé ou ſurbaiſſé de telle meſure qu'on voudra, & connoître dans quelle ſituation ſa doële ſera circulaire.

Secondement, elle fait connoître les changemens qui arriveroient, ſi le ceintre de face étoit d'une ſection ouverte, par exemple, parabolique, comme il l'eſt en effet dans les *Trompes ſur le coin* à plomb, dont l'axe eſt de niveau; ainſi ſuppoſant que le mur ſoit en talud, la courbe ſe changera en hyperbole, & s'il étoit en ſurplomb elle deviendroit une Ellipſe; cependant l'Architecte eſt le maître de choiſir pour ceintre de face la courbe qu'il voudra.

De même ſi le ceintre de face d'une Trompe cónique à pans à plomb, qui eſt ordinairement une hyperbole, lorſque l'axe eſt de niveau, eſt changé par un talud, il ne changera pas de genre de courbe, mais il deviendra ſeulement une hyperbole differente de celle qui étoit le ceintre à plomb.

En un mot ce Theoréme fait connoître la nature de tous les changemens que peuvent cauſer les differens contours des ceintres de face des Trompes, & ceux de leurs *Trompillons*, qui peuvent ne leur être pas paralleles, & tous ceux qui proviennent des inclinaiſons à l'horiſon, & déclinaiſon de la perpendiculaire ſur la face, ce qui comprend toutes les trompes biaiſes & rampantes, aſcendentes ou deſcendentes, & les joints de Tête; de ſorte qu'on peut dire que ce Theoréme eſt le fondement de toutes les voutes cóniques. Paſſons aux cylindriques.

CHAPITRE III.

Des Sections des Cylindres coupez par des Plans.

55. On diviſe les cylindres comme les cônes, en *Droits* & *Scalenes.*

Ils ſont appellez *Droits*, lorſque leur axe eſt droit, c'eſt-à-dire,

perpendiculaire à leur baſe, comme le cylindre BDF *a* eſt droit ſur la ponctuée B*a* [*Fig.* 14.] parce que ſon axe XC eſt perpendiculaire ſur B *a*. *Fig.* 14.

56. Ils ſont appellez *Scalenes*, lorſque leur axe *m*M [*Fig.* 15.] eſt oblique ſur la baſe *ba* ou DE du cylindre *b*D E *a*. *Fig.* 15.

Cette difference de poſition d'axe à l'égard de la baſe, en peut faire dans la poſition des ſections du cylindre, comme elle en fait dans celles du cône.

57. La ſection d'un cylindre coupé par une ſurface plane ne peut varier que de trois manieres.

1.° Lorsque le plan coupant paſſe au long de l'axe ou parallelement à l'axe, la ſection eſt un *Parallelograme* rectangle, ſi le cylindre eſt droit, & obliquangle, s'il eſt ſcalene, ou il peut auſſi être rectangle, ſi la ſection eſt perpendiculaire au plan paſſant par D *a*.

58. 2.° Lorsque le plan coupant eſt parallele à la baſe B *a* comme *a b*, la ſection eſt un *Cercle*; parce qu'on ſuppoſe toujours un cylindre de baſe circulaire, & que la ſection parallele lui doit être ſemblable & égale, à cauſe que tous les côtez du cylindre étant paralleles à l'axe, les diametres ſeront tous égaux. *Fig.* 14.

59. 3.° Lorsque la ſection eſt oblique, comme B A, elle eſt toujours une Ellipſe dans le cylindre droit, quelle que puiſſe être l'obliquité du plan coupant à l'égard de l'axe; mais dans le cylindre ſcalene, la ſection, quoiqu'oblique, peut être un cercle, lorſque le plan coupant [*Fig.* 15.] étant perpendiculaire au parallelograme, par l'axe *b*DE*a*, fait avec les côtez des angles égaux à ceux de la baſe, mais en ſens *contraire*, c'eſt-à-dire, que l'angle DBA ſoit égal à l'angle *b a* E, ou (ce qui eſt la même choſe) B A E égal *a* D *b a*; car ſi par le point C, milieu de B A, on mène *b g* parallele à *b a*, & que par le même point on tire *y x* perpendiculaire aux côtez *b* D, *a*E, on aura deux triangles égaux C*x*A & C*xg*; parce qu'ils ſont rectangles en *x*, & qu'ils ont les angles en A & *g* égaux (*par la ſuppoſition*) & le côté C*x* commun; donc les côtez CA, C*g* ſeront égaux entr'eux, de même que leurs oppoſez au ſommet *b*C & CB, donc les diametres *b g* & BA ſont égaux au diametre *b a* de la baſe circulaire, & les plans qui paſſent par ces lignes étant perpendiculaires à celui du parallelograme par l'axe, les ſections ſeront égales; par conſéquent celle par B A ſera un cercle, & tout au contraire *y x* perpendiculaire aux côtez ſera une Ellipſe, dont *y x* ſera le petit axe, de même que toute autre ſection oblique, qui ne ſera ni parallele à la baſe, ni *ſous-contraire* comme BA. *Fig.* 15.

COROLLAIRE.

D'ou il ſuit que [de même que dans le cône] les ſections Elliptiques peuvent varier infiniment, ſelon l'angle plus ou moins aigu, ou obtus, que le plan coupant fait avec l'axe du cylindre, enſorte qu'elles s'alongent ou ſe racourciſſent, depuis la poſition perpendiculaire à l'axe, juſqu'à ce qu'il lui devienne parallele.

61. Ou il faut remarquer, qu'il n'y a aucune difference de ces Ellipſes à celles du cône, ce qui ſurprend ceux qui n'ont pas fait une étude de cette matiere; il leur ſemble que l'Ellipſe cylindrique eſt uniforme à ſes deux extremitez, mais que la partie de celle du cône, qui eſt plus près du ſommet, doit être plus aiguë que celle qui eſt vers la baſe; on voit cette erreur exécutée dans une pratique des *Inſtitutions Geometriques d'Albert Duret*, où la courbe fait un jaret à chaque extremité de ſon axe; nous en montrerons la fauſſeté lorſque nous ferons voir, que la même Ellipſe peut être une ſection commune au cône & au cylindre. On en ſentira facilement la verité dès-à préſent, ſi on ſe rappelle ce que nous avons dit [*Art.* 37.] que les ordonnées à un axe, qui ſont également éloignées du centre de l'Ellipſe, ſont toujours égales entr'elles, non ſeulement dans le cône, mais encore dans le cylindre; puiſque leurs quarrez ſont entr'eux en raiſon des rectangles des abſciſes, qu'on ſuppoſe égales, proprieté eſſentielle à l'Ellipſe.

Inſtitutionum Geometricar. l. 4. fol. Arnhemiæ 1606.

Art. 37.

62. La ſeule difference qu'il y a dans ces ſections c'eſt, que l'axe du cylindre paſſe par le centre de l'Ellipſe cylindrique, & que l'axe du cône droit ne paſſe pas par celle de la cônique, mais plus ou moins près, ſuivant qu'elle eſt plus ou moins oblique, comme on le voit à la Fig. 6. où l'axe du cône coupe celui de l'Ellipſe en *o*, la raiſon en eſt bien ſenſible dans le cône droit, où l'axe du cône XS diviſe l'angle du ſommet BSA en deux également, il ne peut diviſer de même une ligne terminée à ſes côtez, qui ne lui eſt pas perpendiculaire, comme DE, dans le triangle par l'axe; puiſque n'étant pas parallele à BA, ſes parties D*o* & *o*E, ne ſont pas proportionelles à BX & XA; mais cette difference ne fait rien à la figure de l'Ellipſe. Toutes les ſections que l'on peut faire dans le cylindre reviennent aux trois dont nous avons parlé, quoiqu'elles ne ſoient pas entieres; car la ſection NFE, qui ne coupe le cylindre [*Fig.* 14.] qu'en partie, eſt une portion d'Ellipſe, qui ſeroit entiere, ſi le cylindre avoit été coupé entierement, comme il le ſeroit étant prolongé.

Fig. 14.

63. Cette ſection incomplete retranche un ſolide en *fg*, qu'on

Digitized by Google

appelle un *Onglet*, à cauſe de ſa reſſemblance avec l'ongle d'un doigt.

Application à l'uſage.

La connoiſſance des ſections du cylindre eſt la baſe de celles des differences des ceintres des faces de berceaux, & des courbes de leurs joints de tête; je ne parle point de ceux de lit, qui ſont des ſections preſque toujours rectilignes.

Les Berceaux, dont les *Arcs-droits* ſont circulaires, ſont de vraïes portions de *Cylindres Droits*, & ceux qui ſont ſurmontez ou ſurbaiſſez ſont des portions de cylindres ſcalenes, ce que l'on peut démontrer de la même maniere que nous avons fait pour les cônes de baſe Elliptique; car ſi le petit axe de l'Ellipſe, faite par la ſection perpendiculaire au parallelograme par l'axe du cylindre, ne peut atteindre à la circonference d'un cercle, qui aura pour diametre la perpendiculaire *i l*, ſur les côtés *b* B, *a*E, il eſt viſible qu'en inclinant ce plan vers L ou K, le diametre LK peut être alongé, au point qu'il devienne égal à *i l*, ainſi quoique la baſe *b a*, oblique à l'axe M *m*, ou *b o* perpendiculaire à cet axe, ſoit ſuppoſé Elliptique, ſi étroite que l'on voudra, la ſection *i*L*l*K pourra être un cercle, & le cylindre ſera ſcalene dans un ſens different de ce qu'il eſt ici. *Fig.* 15.

Il peut arriver, & il arrive en effet, comme nous le dirons au Livre 4. par quelque raiſon de conſtruction, qu'un Architecte juge à propos de faire le ceintre de l'arc droit d'un berceau en Courbe hyperbolique ou parabolique, alors il ne s'agit plus de conſiderer la voute comme une portion de cylindre proprement dit, mais d'un Cylindroïde, dont nous allons examiner les ſections.

THEOREME III.

La Section plane des Eſpeces de Cylindres, qui ont pour Baſe une Parabole ou une Hyperbole, eſt une Section Cônique de même eſpece. PLANC. 2.

Si l'on ſuppoſe qu'une ligne A *a* (*Fig.* 20.) ſe meut parallelement à elle-même autour d'une ſection cônique ouverte, elle formera par ce mouvement une eſpece de cylindre, que nous appellerons un *Cylindroïde*, parce qu'il reſſemble au cylindre ordinaire, qui a pour baſe un arc de cercle ou d'Ellipſe. *Fig.* 20.

Soit le cylindre A*ad* DB*b*, qui a pour baſe une courbe ADB,

que je ſuppoſe ici une parabole, je dis que s'il eſt coupé par un plan parallele ou oblique à ſa baſe ADB, la ſection ſera encore une parabole.

Si le plan coupant eſt parallele à la baſe, la propoſition eſt évidente.

S'il ne l'eſt pas, ſuppoſons qu'il ſoit incliné comme en L*d*, & qu'il coupe celui de la baſe prolongée ſuivant la ligne MK, à laquelle ſoient menez deux plans paralleles A*b*, F*e*, qui coupent les précedens en A B H I & F E, *fe* perpendiculairement à celui de la baſe M O, & parallelement à M K.

A cauſe des paralleles SC, *d*D, perpendiculaires au plan de la baſe, on aura les triangles ſemblables L*Cc*, L*Gg*, L*Dd* dans le plan de l'axe CD de la parabole, & C*s* du cylindre, & à cauſe que MK (par la conſtruction) eſt parallele à AB & FE, elle le ſera auſſi à H I & *fe*; donc H I eſt parallele à AB, & *fe* à FE, & A I & F*e* ſont des parallelogrames; puiſque A*a*, B*b*, F*f*, E*e*, qui ſont les côtez du cylindre, ſont paralleles entr'elles; donc A H = BI, & F*f* = E*e* de même que H I = A B, & F E = *fe*; par conſéquent LD : L*d* :: LG : L*g* :: LC : L*c*, & en diviſant CD : *cd* :: GD : *gd*; mais par la ſuppoſition que la baſe ADB ſoit une parabole, on aura $\overline{CB}^2 : \overline{GE}^2$ :: CD : GD :: *cd* : *gd*, & puiſque CB = *c*I ou AB = HI, & F E = *fe* & ou ſa moitié G E = *ge*, on aura $\overline{c\mathrm{I}}^2 : \overline{ge}^2$ :: *cd* : *gd*, c'eſt-à-dire, les quarrez des ordonnées en même raiſon que les abſciſes; donc H*d*I eſt une parabole, ſi A D B en eſt une, *ce qu'il falloit démontrer.*

On peut démontrer la même choſe de l'hyperbole, ſi la baſe A D B eſt hyperbolique, ou de l'Ellipſe, ſi elle étoit portion d'une Ellipſe, avec cette difference, que dans cette derniere la ſection pourroit devenir un cercle, comme nous l'avons dit des cylindres ſcalenes; car faiſant abſtraction de ce cas, les ordonnées correſpondantes C B, *c*I ſeront toujours égales entr'elles, de même que G E, *ge*, & les abſciſes DC, *dc*, DG, *dg* auront toujours le même rapport dans la baſe & dans la ſection oblique, ce qui eſt clair en les conſiderant comme des parties des côtez du triangle L*d*D, coupé par des paralleles *c*C, *g*G, *d*D; par conſéquent les abſciſes reſtant de la longueur de leurs diametres ſeront encore en même raiſon; donc il y aura même rapport des rectangles de leurs parties aux quarrez des ordonnées.

[o]

Digitized by Google

Application à l'uſage.

On voit par cette propoſition quelles doivent être les courbes des ceintres de face, ou les joints de Doële des Berceaux Biais ou Rampans, ou en Talud, dont les arcs-droits ne ſont pas circulaires, mais de quelqu'autre des ſections cóniques, qui les rendent ſurhauſſez ou ſurbaiſſez en portion de parabole, d'hyperbole ou d'Ellipſe; car quoique nous ayons mis les Berceaux Elliptiques au rang des cylindres ordinaires, mais ſcalenes, ils peuvent être compris dans cette propoſition, qui montre plus generalement, pourquoi la ſection oblique & la baſe ſont de méme eſpece.

Et pour donner un exemple particulier de pratique, cette propoſition fait voir, que les arétes des joints de Lit de cette eſpece de voute, en ſaillie hors du mur, qu'on appelle *Trompe en Tour ronde, érigée ſur une ligne droite*, dont l'arc droit eſt hyperbolique, comme il le doit être à celles qui portent les cabinets de l'Hôtel de la Feüillade, ſur la ruë des Bons Enfans, auprès de la Place de Victoire, à Paris, ſont toutes des arcs d'hyperboles differentes, plus ou moins, alongées, ſelon qu'elles s'approchent ou s'éloignent du milieu.

En ſecond lieu, elle fait voir que la projection d'une ſection cónique quelconque, inclinée au plan de la baſe horiſontale ou verticale eſt encore une Courbe de même eſpece; parce qu'on peut imaginer que les lignes perpendiculaires à ce plan paſſant par tous les points du contour de la courbe, forment un cylindre ou cylindroïde, dont la baſe eſt la Courbe de projection, & la courbe projettée peut être conſiderée comme la ſection oblique de ce cylindre.

THEOREME IV.

La Section d'un Cylindre creux, dont l'épaiſſeur eſt par-tout égale, coupé par un plan qui n'eſt pas parallele à ſa baſe, eſt une Couronne d'Ellipſe, compriſe par deux Ellipſes ſemblables & concentriques, mais non pas équidiſtantes, excepté la ſection ſoufcontraire dans les cylindres ſcalenes, où elle eſt une Couronne de Cercle. PLANC. 3. I.

Soit [*Fig.* 14.] une portion de cylindre *a a b* B, creuſe d'une cavité F *f* G *g*, qui eſt une eſpace cylindrique concentrique, & ſemblable à ce cylindre ſur l'axe commun C *x*, auquel la ſection plane AHB eſt oblique, je dis que les Ellipſes AHB & FIG, formées par cette ſection à la ſurface interieure & exterieure de ce cylindre creux, ne ſont pas équidiſtantes, quoiqu'il ſoit par-tout également épais. *Fig.* 14.

DEMONSTRATION.

Si l'on coupe un plan passant par l'axe du cylindre *a abB*, il se formera à l'intersection des surfaces des triangles semblables *ABa*, *FBf*, dont les lignes *a*A & *f*F sont paralleles par la supposition, que les surfaces exterieure & interieure sont équidistantes; donc *Ba*: BA :: *Bf* : BF, & en divisant :: *af* : *a*F; mais *Ba* côté d'un angle droit, *Ba*A est plus petit que BA, qui est l'hypotenuse; donc *fa*, distance des deux surfaces à la base droite est plus petite que FA, distance des mêmes à la section oblique, *ce qu'il falloit* premierement *démontrer.*

PRESENTEMENT nous pouvons démontrer, que l'intervale de ces mêmes surfaces, coupées par un plan perpendiculaire au premier, ou si l'on veut, au triangle *a*BA, & par l'axe *c*C, sera égal, dans la section oblique AB, à celui de la base droite *a*B, par la seule raison que l'intersection MP du plan est perpendiculaire à l'axe C*c*, comme le Rayon de la base *c a* est perpendiculaire au même axe, & comme le rayon *c p* de la méme base, lequel est parallele à CP.

POUR le concevoir plus distinctement, soit *m* M P *p* le second plan perpendiculaire au parallelograme par l'axe *a abB*, ce qu'il faut imaginer dans la figure, où il ne l'est qu'en perspective; parce qu'en projection ce plan ne doit être représenté que par une ligne droite; or puisqu'il passe par l'axe, il sera deux parallelogrames, un à la surface interieure *l*L O *o*, l'autre à l'exterieure *m*M P *p*, dont les côtez seront paralleles entr'eux, & équidistans d'un côté & d'autre par la supposition; donc PO est égal à *p o*, mais *p o* est aussi égal à *fa*; donc PO est égal à *fa*, c'est-à-dire, que l'intervale des deux Ellipses AHB & FOG au petit axe, est le même que celui de la vraïe épaisseur du cylindre; mais hors de cet axe il s'alonge continuellement jusqu'au grand axe AB, où cet intervale FA est le plus grand; donc les intervales des deux Ellipses sont inégaux, quoique les surfaces soient équidistantes entr'elles, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

DE-LA il suit que la portion du grand axe, qui est entre les deux Ellipses, peut autant varier, à l'égard de celle du petit axe, qui marque la vraïe épaisseur du cylindre, qu'une ligne tirée obliquement entre deux paralleles à l'égard de la perpendiculaire; ainsi supposant que l'angle d'inclinaison AB*a*, de la section oblique à l'axe *c*C, soit de 60 degrez, la distance FA sera double de l'épaisseur *fa*, comme GB de B*g*.

Ce

Ce que nous venons de démontrer dans le cylindre Droit eſt encore vrai dans le ſcalene, comme il eſt aiſé de l'appercevoir en ſuppoſant, que la courbe BMAP eſt un cercle, qui ſoit la baſe du cylindre ſcalene, alors la courbe B *m* a *p* ſera une Ellipſe; la ſeule difference qui en réſulte, eſt un changement de poſition dans les axes de la ſection inclinée à la baſe; car la ligne *m p* devient alors le grand axe, parce qu'elle eſt égale au diametre du cercle MP, égal par la ſuppoſition à B A, lequel eſt plus grand que B a, comme l'hypotenuſe d'un triangle rectangle A a B à l'égard de ſon côté B a.

Application à l'uſage.

Par le moyen de cette propoſition nous ferons voir au quatriéme Livre, qu'on ne peut faire deux ceintres Elliptiques de doële & d'extrados, qui ſoient équidiſtans à la Face d'une voute biaiſe, qu'on veut faire d'égale épaiſſeur, ſans la rendre inégale à l'Arc-droit. Elle fait auſſi voir les inégalitez qui réſultent à l'épaiſſeur des voutes biaiſes, lorſque leurs ceintres de face ſont faits d'Ovales, compoſées de portions de cercles concentriques; enfin elle ſervira à montrer la fauſſeté de l'ancien trait des voutes ſphéroïdes ſur un plan Elliptique.

CHAPITRE IV.

Des Sections Planes de quelques Corps régulierement irréguliers.

On peut imaginer une infinité de corps formez par des révolutions de lignes courbes, autour de leurs axes, ou de leurs tangentes, ou par le mouvement de quelques ſurfaces muës de differentes manieres; mais nous nous bornons à ceux dont on voit des exemples dans les parties des voutes uſuelles, qui ſe réduiſent à trois ou quatre eſpeces.

66. *La premiere*, eſt de ceux qui ſont formez par la révolution des Ellipſes, qu'on appelle ſphéroïdes; ſi la révolution ſe fait ſur le petit axe, le corps qui en réſulte ſera appellé *Sphéroide Applati*, tels ſont à peu près les Oignons, les Pomes & quelques Citroüilles. Si la révolution ſe fait ſur le grand axe AX, nous l'appellons *Sphéroïde oblong*, tels ſont les Melons, & pluſieurs autres fruits, & particulierement les œufs. *Fig.* 21.

Fig. 22. 23. 67. *La ſeconde eſpece*, eſt de ceux qui ſont formez par la révolution d'une ſection cônique ouverte, Parabole, ou Hyperbole, tournant ſur ſon axe, on l'appelle *Conoïde*, tels ſont les corps ASB, aux figures 22. & 23.

La troiſième eſpece, moins réguliere, eſt celle des corps appellez *Ellipſoïdes*, qui ne ſont formez par la révolution d'aucune Ellipſe, conſtante ſur un de ſes axes, mais par la révolution d'une Ellipſe ſur un axe conſtant, dont l'autre varie de longueur; ſuivant le contour d'une autre Ellipſe, qui eſt perpendiculaire à la premiere, ou ſi l'on veut en prendre une autre idée, c'eſt une ſuite d'Ellipſes perpendiculaires à un axe, laquelle diminuë ſuivant le contour de deux autres Ellipſes, qui ſe croiſent ſur cet axe commun, c'eſt ce que j'appelle *Ellipſoïde*, & qui eſt appellé en Architecture, *Voute Sphérique ſurhauſſée ou ſurbaiſſée ſur un plan ovale.*

Fig. 24. *La quatrième eſpece*, eſt celle des corps formez par la révolution d'une ſection cônique fermée, cercle ou Ellipſe, autour de ſa tangente, ou autour d'un autre cercle ou d'une Ellipſe, au plan duquel celui de l'Ellipſe ou du cercle generateur eſt toujours perpendiculaire. Dans le premier cas le corps s'appelle *Anneau fermé*, & dans le ſecond ſimplement *Anneau*, telles ſont les *Voutes ſur le Noyau.*

Fig. 25. *La cinquième eſpece*, eſt celle des corps formez par le mouvement d'un cercle ou d'une Ellipſe tournant autour d'une Hélice ou ligne en vis, enſorte que ſon plan ſoit dirigé à l'axe de l'Hélice, ou perpendiculaire à ſa Tangente. J'appelle ce corps *Hélicoïde*, tels ſont les vis & colomnes torſes, & en fait de voute, les *Berceaux tournans & rampans, & vis St. Giles.*

THEOREME V.

La Section d'un Sphéroïde & d'un Conoïde régulier, coupé par un Plan perpendiculaire à ſon Axe, eſt un cercle, & s'il lui eſt parallele ou oblique elle eſt une Ellipſe.

La premiere partie de ce Theorême eſt évidente, car puiſque le ſphéroïde ou conoïde eſt ſuppoſé formé par la révolution d'une demie Fig. 21. Ellipſe ABX, ou d'une ſection cônique ouverte ASB (*Fig.* 22. & 23.) 22. & 23. immobile ſur un de ſes Axes, chaque ordonnée à cet axe, comme CB, Kg, (*Fig.* 21.) ou CB, gT (*Fig.* 22. & 23.) décrira par ſa révolution un cercle dont elle eſt le rayon, & comme on peut appliquer une ordonnée à chaque point de l'axe, il ſuit que toutes les ſections,

Digitized by Google

faites par des plans qui lui ſont perpendiculaires, ſont des cercles dans les ſphéroïdes, alongez ou applatis, & dans les conoïdes.

Quant à la ſeconde partie de ce Theorême, touchant les ſections paralleles & obliques à l'axe, elle eſt démontrée dans la 15. propoſiton des Conoïdes & Sphéroïdes d'Archimede.

Premierement. Il n'eſt pas difficile à comprendre, que les ſections paralleles à l'axe ſont des courbes ſemblables à la Generatrice. Il n'eſt pas tout à fait ſi clair que les obliques ſont des Ellipſes; nous allons comprendre l'un & l'autre cas dans une démonſtration differente de celle d'Archimede.

Soit l'Ellipſe ADXB la ſection du ſphéroïde par ſon axe AX, laquelle eſt la même que l'Ellipſe generatrice : ſi l'on ſuppoſe deux plans paralleles entr'eux BD, gb, & perpendiculaires à l'axe AX, & au plan paſſant par cet axe, leurs ſections dans le ſphéroïde ſeront des cercles repréſentez en perſpective par les courbes BLD, gmb, de même que celle du plan paſſant par l'axe perpendiculaire au plan BADX, ſera une Ellipſe repréſentée par la courbe ALX, laquelle aura deux ordonnées CL, Km communes aux cercles BLD, gmb. Enfin ſi l'on coupe le ſphéroïde par un plan incliné à l'axe AX, comme en EF, & perpendiculaire au plan BADX, la courbe de la ſection repréſentée par EmnF aura auſſi deux ordonnées communes aux ſections circulaires, ſçavoir In, Km, il faut démontrer que les quarrez de ces ordonnées ſont entr'eux, comme les rectangles EI × IF & EK × KF.

Par une proprieté dont nous avons parlé (Article 40) les lignes paralleles menées dans une ſection cónique, & coupées par une troiſiéme perpendiculairement ou obliquement, ſont des parties d'abſciſſes, dont les rectangles ſont proportionels, BI × ID : EI × IF :: gK × Kb : EK × KF; mais à cauſe des cercles des ſections perpendiculaires à l'axe, $BI \times ID = \overline{In}^2$ & $gK \times Kb = \overline{Km}^2$; donc EI × IF : EK × KF :: $\overline{In}^2 : \overline{Km}^2$; c'eſt-à-dire, que les quarrez des ordonnées ſont entr'eux comme les rectangles des abſciſſes; donc la courbe EmnF eſt une Ellipſe, *ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire

D'ou il ſuit, que ſi le plan coupant eſt parallele à l'axe, la ſection ſera une Ellipſe ſemblable à la generatrice.

Et que ſi deux plans inclinez à l'axe ſont paralleles entr'eux, leurs ſections ſeront des Ellipſes ſemblables, ce qui s'étend auſſi aux cô-

noïdes Paraboliques ou Hyperboliques, ce que nous allons démontrer par une autre maniere, qui eſt celle d'ARCHIMEDE.

Fig. 22. 23. SOIT (*Fig.* 22.) la courbe ASB la ſection d'un conoïde parabolique, coupé par un plan paſſant par ſon axe SC & DF, la ſection d'un plan perpendiculaire au précedent, ſoit menée PT, parallele à DF, & tangente à la parabole au point T, duquel ſoit mené T*g*, ordonnée à l'axe SC, & parallele à AB, & par S la ligne S*i*; ſoit enfin E*x* perpendiculaire à DF, qui ſera auſſi dans le plan du cercle AxB baſe Droite du conoïde, & par conſéquent une ordonnée commune à cette baſe & à la courbe D*x*F. Par la proprieté du cercle $\overline{Ex}^2 =$ AE X EB; or* DE X EF : AE X EB :: $\overline{TI}^2 : \overline{Is}^2$, & TI = IP, parce que par la proprieté de la parabole *g*S = SP*; donc DE X EF : $\overline{Ex}^2$ :: IP : IS; donc $\overline{Ex}^2$: DE X EF :: $\overline{SI}^2 : \overline{IP}^2$, & parce que les triangles FD*b*, PIS ſont ſemblables, on démontrera de même que les quarrez des autres ordonnées au diametre DF, auront toujours un même rapport aux rectangles des abſciſſes, que le quarré D*b* au quarré DF, dont la ſection ſera toujours une Ellipſe.

* *Voyez la Hire, Prop.* 29. *l.* 3.

* Art. 45.

Il eſt viſible que DF eſt le grand diametre, & que le petit ſera égal à D*b*.

Fig. 23. SECONDEMENT. Pour la ſection oblique du conoïde Hyperbolique, tout étant diſpoſé comme à la figure précedente, (*Fig.* 23.) AE X EB : DE X EF :: $\overline{SI}^2 : \overline{IT}^2$, or $\overline{Ex}^2$: DE X EF :: $\overline{SI}^2 : \overline{IT}^2$, qui eſt une proprieté de l'Ellipſe. On démontrera de même que les quarrez des autres ordonnées à ce diametre auront un pareil rapport à leurs abſciſſes, comme $\overline{SI}^2 : \overline{IT}^2$; or SI eſt plus petit que IT, puiſque PI eſt plus petit que IT par la proprieté de l'hyperbole, donc la ſection faite par DF eſt une Ellipſe, dont le grand diametre eſt DF.

Art. 45.

COROLLAIRE.

DE-LA il ſuit, que la ſection plane d'un ſphéroïde creux, d'égale épaiſſeur, eſt une Couronne compriſe dans la circonference de deux Ellipſes ſemblables & concentriques; mais non pas équidiſtantes, comme nous l'avons dit des ſections du cylindre & de quelques-unes du cône; ce qui nous ſervira au quatriéme Livre à montrer l'erreur du trait des voutes ſphériques, ſuivant les Auteurs de la Coupe des pierres.

Digitized by Google

La ſeconde eſpece de corps régulierement irréguliers que nous avons à connoître pour la pratique des voutes, ſont les *Annulaires*, qui ſont des cylindres pliez ſur leurs axes, ordinairement en portion circulaire, enſorte que les axes & les côtez ſont des arcs de cercles concentriques.

THEOREME VI.

La Section d'un Corps Cylindrique Annulaire, dont l'Axe eſt courbe, en forme de circonference de Cercle, & qui eſt coupé par un Plan, perpendiculaire à celui qui paſſe par l'Axe courbe, eſt une Ovale du quatriéme Ordre.

Soit le corps cylindique HD*b*, fait par la révolution du petit cercle GHI, élevé perpendiculairement ſur le plan du grand cercle I D *i*, dont le centre eſt C, autour duquel s'eſt fait la révolution du petit cercle GHI, enſorte que le diametre GI ait toujours été dirigé au centre C; ſi l'on ſuppoſe ce corps coupé par le plan ALBO perpendiculairement au plan I D *i*, dont la commune ſection ſoit AB, il ſe formera à la ſurface du cylindre annulaire une courbe ALBOA, qui ſera une ovale du quatriéme ordre. *Fig.* 23.

Par un point quelconque N de la commune ſection AB, conſiderée comme l'axe de la courbe, ſoit tiré du centre C le rayon CMK, qui coupe en M le cercle *g*FG, concentrique à *i*DI, & ſur ſa partie MK = GI ou *gi*, ſoit élevé un plan perpendiculaire au plan ID *i*, qui coupera celui qui paſſe par AB, & dont la commune ſection ſera NL perpendiculaire à l'axe AB de la courbe cherchée ALB.

Soit donc le rayon C*i*, ou ſon égal CD que l'on ſuppoſe mené perpendiculairement à A B = *a*, le diametre du petit cercle G I ou *gi* ou MK = *b*, AE = *c* ou AB = 2*c*, l'abſciſſe AN = *x*, l'ordonnée NL ou NO = *y*, on aura par la nature du cercle CE = $\sqrt{aa - cc}$ & EN = *c* − *x*; donc CN = $\sqrt{aa - 2cx + xx}$, & K N = *a* − $\sqrt{aa - 2cx + xx}$, MN = KM − KN = *b* − *a* + $\sqrt{aa + 2cx + xx}$; mais par la nature du cercle le rectangle KN x MN = NL; ainſi multipliant KN x MN, & égalant le produit à *yy*, on trouvera $ab - 2aa + 2cx - xx + \overline{2a - b}\sqrt{aa - 2cx + xx} = yy$. Pour abreger la réduction, ſoit nommé 2*a* − *b* = *e* = Ig ou *i*G, ce qui étant ſubſtitué, on aura cette équation $-ae + 2cx - xx + e\sqrt{aa - 2cx + xx} = yy$, ou bien en tranſpoſant pour mettre tous les rationels d'un côté $xx - 2cx + ae + yy = e\sqrt{aa - 2cx + xx}$; pour en ôter l'Aſymmetrie, il faut

quarrer les deux membres de l'équation, ce qui donnera $x^4 - 4cx^3 + 2aexx + 2yyxx + 4ccxx - 4acex - 4cyyx + 2aeyy + y^4 = -2ceex + eexx$, réduiſant cette équation à o. ſelon l'ordre des dimenſions de x ſuivant la coutume on aura :

$$\begin{aligned} x^4 - 4cx &+ 2aexx - 4acex + y^4. \\ &- ee + 2cee + 2aeyy \\ &+ 4cc - 4cyy \\ &+ 2yy \end{aligned} \quad = o$$

Laquelle équation exprime la nature de la courbe ALB de la maniere la plus ſimple, dans ſon état de generalité ; ainſi c'eſt une courbe du quatriéme ordre ; parce que les co-ordonnées x&y montent à la quatriéme dimenſion ; mais il y a des cas particuliers où elle devient plus ſimple, par exemple :

Si la ſection AB paſſe par le centre, il eſt viſible que la courbe ALB ſe partage en deux cercles ibg & IHG, dont l'équation eſt $xx + ex + yy = o$. Auſſi dans ce cas notre équation trouvée ſe laiſſe diviſer par ce diviſeur $xx - 2ax + 2ae$, & le quotient donnera ladite équation $xx + ex + yy = o$, pour le cercle ibg ou IHG, comme il doit arriver, ſi l'on prend IG égal à tout le grand diamétre Ii, c'eſt-à-dire, ſi Ig ou e eſt égal o, auquel cas le corps Annulaire HDb devient une ſphère, enſorte que la courbe de la ſection ALB en ſera un cercle mineur. Notre équation la doit marquer en effet, ſi vous y omettez les termes où ſe trouve la lettre e; puiſque $e = o$, l'équation generale ſe change en celle-ci.

$$x^4 - 4cx^3 + 4ccxx - 4cyyx + y^4 = o \\ + 2yy$$

Dont on peut tirer la racine quarrée $xx - 2cx + yy = o$; or il eſt clair que cette équation particuliere eſt pour le cercle, dont le diametre eſt $2c = AB$, qui marque évidemment, que la ſection ALB dégenere en cercle.

Ce ſont là tous les cas poſſibles où la courbe en queſtion puiſſe devenir d'un ordre inferieur que du quatriéme.

La troiſiéme eſpece, de corps régulierement irréguliers, dont nous

avons beſoin de connoître les ſections, & celle des *Cylindriques Héliceïdes* (en termes d'Architecture) des voutes en *vis*.

Nous appellons *Cylindre Hélicoïde* un corps cylindrique, qui, au lieu de tourner dans un plan autour d'un centre, tourne en s'élevant autour d'un axe, comme le Lierre ou plutôt le Liſeron, s'éleve en embraſſant un arbre, d'où vient le mot *d'Hélice*, uſité en Architecture, tiré du Grec *Heliſſo*, *circumvolvo*. Tel eſt le corps E G M g D, (*Fig.* 25.) *Fig.* 25.

Corollaire I.

De cette définition on peut conclure, que la ſection de ce corps, coupé par un plan parallele à ſon axe, ne ſera pas d'une eſpece differente de celle du corps Annulaire dont nous venons de parler, ſi la baſe ou projection de l'Hélice eſt un cercle; car toutes les diſtances de l'axe à ce corps, meſurées horiſontalement ſeront égales à celle de la ſection de l'anneau à ſon centre, & toutes les ſections verticales par l'axe ſeront des cercles égaux, comme celles de l'anneau, coupé par un plan paſſant par le centre C, (*Fig.* 24.) & perpendiculairement au plan *i* D I, ſuppoſant l'un & l'autre corps cylindrique d'égale groſſeur; il n'y aura donc de difference, que celle du changement de hauteur de toutes ces ſections circulaires, qui s'élevent comme par degré les unes audeſſus des autres, au long d'un axe incliné au plan de la baſe.

Corollaire II.

D'ou il ſuit que pour connoître & tracer la ſection de l'Hélice, il faut commencer par tracer celle de l'anneau ſuppoſé ſur ſa baſe, & coupé à même diſtance du centre, que l'Hélice l'eſt de ſon axe, & donner à l'axe de l'Hélice l'inclinaiſon qu'il doit avoir, laquelle ſe trouve par la hauteur de la ligne *ab* (*Fig.* 25.) Nous ne nous arrêtons pas ici à la deſcription de l'une & de l'autre courbe, que nous donnerons au ſecond Livre; il ſuffit d'expoſer aux yeux leur rapport par la figure 26.

Application à l'uſage.

74. Cette propoſition fait connoître quelle eſt la courbure du ceintre d'une interruption de voute ſur le noyau par un mur ou une ſaillie droite, comme pourroit être la Tour quarrée d'un clocher, au chevet d'une Ellipſe, ainſi voutée à ſon bas côté; mais il ſert principalement à trouver la Cherche droite, qui doit guider la cour-

Egliſe

bure de la doële d'une voute ſur le noyau, ou d'une vis St. Giles perpendiculairement au rayon, venant du centre de la courbure de l'axe & des côtez, comme on en a beſoin pour l'appareil, ce que nous ferons voir dans le quatriéme Livre, où il s'agit de l'appareil; nous croyons n'avoir pas beſoin de nous étendre davantage ſur les changemens qui peuvent arriver à ces Courbes, par ceux qu'on peut faire aux ceintres des cercles generateurs IHG, ſoit en les ſurhauſſant ſoit en les ſurbaiſſant, ou à la courbure de l'axe, laquelle au lieu d'être circulaire pourroit être Elliptique; parce que nous pourvoirons dans la pratique à l'exécution de toutes ces variations; nous ne pouſſerons pas plus loin la Theorie des ſections planes, croyant en avoir dit aſſez pour les beſoins de la Coupe des Pierres; c'eſt pourquoi nous paſſerons à la ſeconde Partie de ce premier Livre, où nous tâcherons de connoître les Sections, que nous appellons *Solides*; parce qu'elles ſont faites par la pénetration des Corps.

SECONDE

SECONDE PARTIE
DU PREMIER LIVRE.

Des Sections faites à la ſurface des Corps par la pénetration d'autres Corps.

LEs Sections Planes dont nous venons de parler ne conviennent qu'aux ceintres des voutes ſimples, qui n'ont qu'une ſurface principale uniforme, & terminée par des plans; mais dans les voutes compoſées, qui ſont contiguës & liées avec d'autres, il ſe fait à leurs rencontres des angles & des courbes, qui les diviſent par des ſections tantôt planes tantôt *Solides*, je veux dire, qui ne peuvent être formées que par la pénetration des ſolides, leſquelles ne ſont pas dans une ſurface plane; ces dernieres ſont preſque les plus ordinaires, & parce que nous ne pouvons les connoître ſans les rapporter à des corps réguliers, dont les voutes ſont des imitations parfaites, nous allons examiner les ſections ſolides des Sphères, Cônes & Cylindres, qui ſe pénetrent mutuellement.

Premierement. Les ſections faites à la ſurface d'une Sphère, pénetrée par une autre Sphère, par un Cylindre, ou par un Cône.

Secondement. Celles des Cylindres par d'autres Cylindres, & par des Cônes.

Troiſiémement. Des Cônes par d'autres Cônes, ſituez differemment entr'eux.

Nous avons touché légerement les ſections planes de ces corps, parce qu'on ne manque pas de livres qui en traitent amplement; nous nous ſommes contentez d'en dire ce qui étoit indiſpenſablement néceſſaire à notre ſujet; mais parce qu'il n'en eſt pas de même de leurs ſections *Solides*, c'eſt-à-dire, qui ſont faites par la pénetration mutuelle des mêmes corps, nous en étendrons un peu davantage la Theorie.

En effet, ſi peu d'Auteurs en ont traité, qu'elles n'ont pas même de noms particuliers; le P. Coursier dans un Opuſcule Latin, qu'il

ſemble avoir fait pour l'Optique ; eſt le premier que je ſçache, qui en ait parlé : il les appelle *Curvitegæ*, c'eſt-à-dire, qui couvrent des ſurfaces courbes ; mais comme cette expreſſion n'eſt pas uniquement propre à nos ſections, puiſqu'une ſurface plane en peut couvrir une courbe, comme un cercle couvre un ſegment de ſphère, un parallelograme, celui d'un cylindre ; j'ai cru que j'étois en droit de leur donner d'autres noms, pour éviter les Périphraſes & les équivoques ; je les tire du mot Latin *Imbrex*, qui ſignifie une tuile creuſe, à laquelle on peut aſſez bien les comparer, ou du moins la ſurface qu'elles renferment ; il auroit été plus naturel de les comparer au cylindre, ſi je n'avois craint la confuſion des idées, ayant auſſi égard à la facilité de la compoſition des mots tirez *d'imbrex*. M. CLAIRAUT le Fils, de l'Academie des Sciences, nous a donné un excellent traité des *Courbes à double courbure* en general, qui comprend celles dont il eſt ici queſtion, parmi pluſieurs autres de differentes eſpeces, dont il découvre les proprietez par l'Analyſe avec beaucoup d'art & de netteté ; cet Ouvrage eſt d'autant plus digne d'admiration, qu'il a été la production d'un Jeune Homme de ſeize ans. Mais comme notre Stereotomie n'eſt qu'un traité de Geometrie lineaire, j'ai cru que je devois donner une Theorie de même nature que les Problêmes de pratique, auſquels elle doit ſervir d'introduction ; c'eſt pourquoi j'ai ſuivi une méthode tout-à-fait differente, croyant qu'elle deviendra plus utile aux gens qui ſe mêlent d'Architecture ; c'eſt ce que je vais expliquer.

De la nature des Sections Solides par la pénetration mutuelle des Sphères, Cônes & Cylindres.

DEFINITION I.

PLANC. 3. *Fig.* 27. 75. SI par les extremitez S T, du diametre d'un cercle S A T B (*Fig.* 27.) on fait paſſer une ligne courbe plane S *c* T, dont l'axe ſoit C *c*, ſuivant laquelle les ordonnées à ce diametre ST s'abaiſſent ou s'élevent parallelement à elles mêmes d'un mouvement uniforme, enſorte que leur milieu ſoit toujours dans le plan ST*c*, la courbe S *a* T *b*, qui terminera la ſurface creuſe, qu'elles auront formé par cette arrangement, s'appellera un *Cicloïmbre*, par abreviation de l'expreſſion Latine, *Circulus imbricatus*, cercle en façon de tuile creuſe.

POUR ſe former une idée nette de ce changement de poſition des ordonnées, il n'y a qu'à ſe repréſenter un cercle tracé ſur la tran-

che d'un livre dans la preſſe, lorſque le Relieur l'a coupée d'une ſection plane; ſi enſuite il la renfonce vers le milieu, comme il arrive lorſqu'il donne de l'arrondiſſement au dos, ce cercle qui étoit plan devient un Cicloïmbre; parce que chaque feüille ſe reculant de ſuite, plus ou moins, ſelon qu'elle eſt près du milieu ou des extremitez de la tranche, forme l'eſpace d'une ſurface creuſe en façon de cylindrique, dont le contour n'eſt plus un cercle comme auparavant, mais une *Courbe à double courbure*, ſçavoir une autour du centre, & une en profondeur ou éloignement du plan paſſant par les extremitez du diametre S T.

Corollaire I.

De cette generation il ſuit, 1.° que quoique la ſurface creuſe ou convexe du cicloïmbre ſoit plus grande que celle du cercle plan generateur, elle ne contient pas plus d'ordonnées, puiſque le nombre des feüilles, dans l'exemple de la tranche du livre, n'a pas augmenté en ſe reculant ou en s'avançant au-delà de ce plan, depuis les extremitez S T, ce que l'on voit clairement dans la figure, par les paralleles qu'on a mené d'un côté aux lignes A *a*, C *c*, & de l'autre par les paralleles au diametre A B, qu'on ſuppoſe perpendiculaire au plan ST*c*. On voit ſeulement que ſuppoſant une ligne *c t* parallele & égale à C T, diviſée en parties égales, les lignes paralleles à la ligne C *c*, paſſant par ces diviſions, coupent la partie *c* T en parties inégales, quand même on les ſuppoſeroit infiniment petites.

Ce que nous diſons de l'axe courbe *c* T, auquel toutes les ordonnées ſont appliquées, eſt encore vrai à l'égard du Contour à double courbure *a d* T, quoiqu'il ſoit plus grand que l'axe & le contour du cercle generateur ATBS, qui eſt ici repréſenté en perſpective, où l'on apperçoit une petite notion des merveilles de la Geometrie de l'infini.

Corollaire II.

Il ſuit en ſecond lieu que les diametres, c'eſt-à-dire, les lignes droites, menées d'un des points du contour de la courbe à double courbure à ſon oppoſé, paſſant par l'axe C *c*, hors de la ſurface cylindrique, compriſe par cette courbe, ſont égaux entr'eux, comme les diametres du cercle generateur. Ainſi *g d* eſt égal à GD, *a b* à AB, &c. parce que les points G & D, A & B étant mûs paralleleſment à l'axe C*c* à diſtances égales, il eſt clair que G D *d g* eſt un parallelograme; par conſéquent *g d* ſera égal à G D.

Ou il faut remarquer que ſi la courbe S *c* T n'étoit pas uniforme, mais à differentes inflexions, ces diametres pourroient être inégaux, & alors la courbe ne ſeroit plus un cicloïmbre ; parce que c'eſt de l'égalité de ſes diametres que vient l'Analogie du nom.

Corollaire III.

On peut remarquer que de tous les diametres du cicloïmbre, il n'y en a qu'un, ſçavoir *a b*, qui ſoit dans la ſurface cylindrique, compriſe par ſon contour, lequel eſt celui qui paſſe par le ſommet *c*, de la courbe S *c* T, perpendiculairement au plan de cette courbe ; tous les autres ſont hors de cette ſurface.

Corollaire IV.

De ce que nous venons de dire, il ſuit que l'axe C *c* de la courbe, que j'appelle axe de *profondeur* S *c* T, coupe en deux également tous les diametres de la courbe du contour du cicloïmbre, plus ou moins loin de la ſurface cylindrique, ſelon qu'ils ſont plus ou moins obliques au plan de la courbe S *c* T.

Corollaire V.

Il eſt viſible que ſi au lieu d'une ſeule courbe S *c* T, on en ſuppoſoit encore une ſeconde plus haut ou plus bas, audeſſus ou audeſſous du diametre ST, du même cercle generateur, il ſe formeroit deux cicloïmbres differens, qui auroient une profondeur inégale, mais dont le contour ſeroit à la ſurface du même cylindre, qui auroit pour baſe le cercle generateur ATBS ; puiſque tous les points de ces contours doivent être iſſus d'un de ceux du cercle generateur, mû parallelement à l'axe C *c* de la courbe de profondeur S *c* T.

Definition II.

Fig. 28. 76. Si au lieu d'un cercle generateur on ſuppoſe une Ellipſe BDLE, dont les ordonnées ED, GH s'écartent ou ſe rapprochent, de la même maniere que nous l'avons dit du cicloïmbre, non pas toujours perpendiculairement à un axe B L de cette Ellipſe, mais auſſi obliquement ſuivant un angle quelconque, comme BC *c* ou L C *c*, à peu près comme une chaîne lâche penduë aux extremitez d'un bâton incliné à l'horiſon, la ſurface formée par l'arrangement de ces ordonnées, ſuivant une courbe ſemblable, ſera terminée par un contour courbe, que nous appellons une *Elipſimbre*, par abréviation de l'expreſſion Latine *Ellipſis imbricata*.

Digitized by Google

La néceſſité de donner des noms à des courbes, qui n'en avoient point, s'étend auſſi aux lignes qui leur ſont eſſentielles; nous en conſiderons quatre principales, qui méritent d'avoir un nom propre; parce que nous les nommerons ſouvent dans ce premier Livre.

Definition III.

77. Le diametre du cercle generateur, ou l'axe de l'Ellipſe plane generatrice, qui paſſe par les points S & T, ou B, L, où la courbe touche le plan du cercle ou de l'Ellipſe, s'appellera *Axe ſouſtendant*; la ligne courbe S *c* T, ou B *c* L, qui eſt dans le même plan que cet axe, qui coupe la ſection en deux parties égales, comme S *c* T, ou B *c* L, s'appellera *Axe courbe*; la ligne correſpondante au diametre perpendiculaire à l'axe ſouſtendant, qui eſt le petit ou le grand axe de l'Ellipſe, s'appellera *l'Axe droit*; parce que quoique droit, il ſera tout à la ſurface de la ſection concave; tel eſt *a b* (*Fig.* 27.) & *d e* (*Fig* 28.) La ligne C *c* qui eſt le plus au chemin que parcourt le centre C, dans l'abbaiſſement du diametre AB, ou DE en *ab*, ou *d e*, s'appellera *l'Axe de profondeur*, qui paſſera toujours par les deux centres de la ſection plane, & de la ſection courbe à double courbure par ſon contour. *Fig.* 27. 28.

Les lignes qui paſſeront par cet axe, & ſe termineront à la circonference de la ſection, s'appelleront *Diametres*.

Corollaire.

78. Puisque l'axe de profondeur C *c* peut n'être pas perpendiculaire à l'axe ſouſtendant BL, il ſuit que le diametre droit *d c* de la ſection, peut n'être pas au milieu de l'axe courbe B *c* L, puiſque le point *c*, centre de la ſection, correſpondant au centre C de l'Ellipſe generatrice, eſt évidemment plus près du point L que du point B; cependant le nombre des ordonnées de *c* en L, ſera toujours égal au nombre de celles qui ſont poſſibles de B en *c*; puiſqu'il ne peut y avoir un plus grand nombre de paralleles à C *c*, de B en C, que de C en L, ces deux diſtances étant ſuppoſées égales; l'exemple de notre tranche de livre, dont on arrondit le creux inégalement, peut ſervir à en concevoir la vérité; puiſque le nombre des feüilles n'augmente ni diminuë dans tous les changemens de concavité ou de convexité que l'on peut faire à la courbure de cette tranche.

Definition IV.

79. Si au lieu de ſuppoſer, que les ordonnées de l'Ellipſe plane gene-

ratrice d'une ſection ſolide, s'en éloignent, d'un mouvement inégal, mais uniforme dans les parties correſpondantes, & ſans changer de grandeur; on ſuppoſe au contraire qu'en s'éloignant, elles ſe ralongent ou ſe racourciſſent proportionellement à leur diſtance de l'Ellipſe plane, priſe ſur des plans convergens, qui ont tous une commune ſection, cette figure auſſi concave comme une tuile creuſe, aura pour circonference une courbe, que nous appellerons *Ellipſoïdimbre*, c'eſt-à-dire, qui imite en quelque choſe l'Ellipſimbre.

COROLLAIRE.

80. IL ſuit de cette définition, que l'axe droit *de* ne ſera plus égal à l'axe correſpondant DE de l'Ellipſe plane generatrice, qui eſt conjugué à celui qui eſt l'axe ſouſtendant de l'axe courbe de la ſection; mais qu'il ſera plus grand ou plus petit, plus grand s'il eſt du côté oppoſé à la commune ſection des plans convergens, & plus petit s'il eſt du même côté, ce que nous expliquerons plus nettement dans les ſections faites par la pénetration des cônes.

DEFINITION V.

81. LORSQU'UNE courbe ſera compoſée de deux portions des courbes nommées ci-devant, ſoit Cicloïmbre, ſoit Ellipſimbre, ſoit Ellipſoïdimbre, elle ſera dite *Compoſée* de ces courbes.

ENFIN on appellera de ſemblables noms toutes les courbes, leſquelles, ſuivant de pareilles loix, ſeront iſſuës de figures planes paraboliques ou hyperboliques, dont les ordonnées à leurs axes s'écarteront d'une maniere uniforme de leur ſommet d'un côté ſeulement; car puiſque ces figures ſont ouvertes, les ſections courbes ne les toucheront qu'en un point, & non pas en deux, comme les précedentes.

CHAPITRE V.

Des Sections ſolides des Sphères, & premierement, de leurs Variations.

LEs ſections des ſphères peuvent varier de pluſieurs manieres.

1.° PAR la pénetration des Sphères entr'elles.

Digitized by G

2.° Avec les Cylindres.

3.° Avec les Cônes.

La ſection commune à la ſurface de deux ſphères, qui ſe pénetrent, ne peut varier, elle ne peut être que la circonference d'un cercle; ſur quoi l'on peut remarquer, que les ſections faites par la pénetration des ſolides, peuvent en certains cas, être auſſi des ſections planes.

Les ſections faites à la ſurface de la ſphère, pénetrée par un cylindre, peuvent varier de quatre manieres.

1.° Lorsque l'axe du cylindre paſſe par le centre de la ſphère, dans la ſuppoſition du cylindre Droit.

2.° Dans le même cas, dans la ſuppoſition du cylindre ſcalene.

3.° Lorsque l'axe du cylindre ne paſſe pas par le centre de la ſphère, & que cependant le cylindre y entre de toute ſa circonference.

4.°. Lorsque le cylindre n'entre dans la ſphère qu'en partie, à l'égard de ſa circonference.

Enfin les ſections faites à la ſurface de la ſphère, par la pénetration du cône, peuvent varier d'autant de manieres que par le cylindre, ſuivant les mêmes circonſtances de poſition rélative du centre de la ſphère, à l'égard de l'axe du cône, de celle de l'axe du cône ſur ſa baſe, & de la profondeur de la pénetration.

THEOREME VII.

La Courbe qui réſulte de la Section faite par la rencontre des ſurfaces de deux Sphères, qui ſe pénetrent, eſt la circonference d'un Cercle.

Soient les ſphères ABD, BFD qui ſe pénetrent, de quelque grandeur qu'elles ſoient l'une à l'égard de l'autre, dont les centres ſont en C & E, ſoit auſſi la ſection telle qu'elle puiſſe être repréſentée par la courbe BHD, qui doit paſſer par les points B & D, communs aux deux ſphères; puiſqu'ils ſont à l'interſection de deux cercles majeurs qui ſont dans le même plan, paſſant par les deux centres C & E, (*Fig.* 29. 30. 31.) le diametre de cette ſection ſera la ligne BD, qui paſſera par ces points B & D communs aux deux ſurfaces, lequel par la differente poſition des ſphères, paſſera ou entre les deux ſphères, comme à la fig. 29. ou par un des centres, comme à la fig. 30. ou au dehors des deux centres, comme à la fig. 31; de quelque façon que ce ſoit, la démonſtration ſera toujours la même. *Fig.* 29. 30. 31.

Ayant tiré une ligne CE par les centres C & E, & pris à volonté ſur la courbe de la ſection un point H, on tirera des centres C & *c*, (*Fig.* 31.) des lignes CH, *ch*, & des points G & *g*, (*Fig.* 29. & 31.) ou E, (*Fig.* 30.) où les lignes paſſant par les centres, coupent les diametres BD & *bd*, des lignes au même point H, comme GH, EH ou *g b*.

Il eſt évident par la définition de la ſphère, que les lignes CB, CH, CD ſont égales entr'elles, étant des rayons de la ſphère ABD, de même que EB, EH, ED, (*Fig.* 29. & 30.) & *eb*, *eh*, *ed*, (*Fig.* 31.) il eſt encore évident, que les lignes BD ſont coupées également & perpendiculairement en G, par la ligne qui paſſe par les centres C & E; donc les triangles CBE, CHE, CDE, qui ont le côté CE commun, ſont égaux en tout, de même que les triangles CBG, CHG, CDG rectangles en G, qui ont le côté CG commun, & les hypotenuſes CB, CH, CD égales entr'elles; donc les côtez GB, GH, GD ſeront auſſi égaux entr'eux; puiſqu'ils ſont d'ailleurs les perpendiculaires abaiſſées des ſommets des triangles égaux CHE, CBE, CDE; donc (par la 4. du 11. d'Eucl.) ces trois lignes ſont dans un même plan, & les rayons d'un cercle, dont les points B H D ſont à la circonference qui eſt la commune ſection des deux ſphères, *ce qu'il falloit démoutrer.*

Fig. 30. La même démonſtration eſt plus ſimple dans la fig. 30. où les points E & G ſont confondus.

Application à l'uſage.

86. On connoît par cette propoſition, que le ceintre d'une voute ſphérique, qui en rencontre une autre qu'elle coupe, eſt un cercle, par exemple, une niche qui eſt audeſſus de l'impoſte d'une voute ſphérique, fait avec elle à l'arête *d'Enfourchement* un demi cercle parfait, ſuppoſé que l'une & l'autre de ces voutes ne ſoit ni ſurhauſſée ni ſurbaiſſée, & que l'Impoſte d'une Calote de dôme, renfoncée en cû-de four, audeſſus d'une voute ſphérique, eſt encore un cercle, auſſi bien que celle de la premiere voute.

THEOREME VIII.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'une Sphère & d'un Cylindre Droit, dont l'axe paſſe par le centre de la Sphère, eſt un Cercle.

Soit la courbe AIBO, la ſection faite par la rencontre des ſurfaces
Fig. 32. de la ſphère ABDE, & du cylindre LNGF, dont l'axe MH paſſe par le

le centre C de la ſphère. Si du point I, pris à volonté à la circonference de cette ſection, on tire au centre C la ligne IC, & que du milieu K de la ligne AB, qui eſt ſuppoſée paſſer par les points A & B, communs à la ſurface de la ſphère, & à celle du cylindre, on mène la ligne IK, on verra, comme dans la propoſition précedente, que les triangles AKC, IKC, BKC rectangles en K, qui ont le côté CK commun, & les côtez AC, CI, CB égaux, étant rayons de la même ſphère, les côtez AK, IK, BK ſeront auſſi égaux entr'eux, & dans un même plan, donc ils ſeront les rayons d'un cercle, dont les points AIB ſont à ſa circonference; mais la ligne CK étant par la ſuppoſition une partie de l'axe du cylindre, FLNG ſera auſſi perpendiculaire au même plan; donc la ſection commune à la ſphère ABDE, & au cylindre LNGF, ſera un cercle formé par la rencontre des ſurfaces de ces deux corps, *ce qu'il falloit démontrer.*

Application à l'uſage.

87. On voit par cette propoſition quel doit être le ceintre de la rencontre des voutes ſphériques avec les Berceaux Droits, dont les axes paſſent par le centre de la ſphère, tel eſt le Pui d'une cyterne voutée en cû-de-four, comme il y en a un à Phalsbourg, telle eſt la fenêtre à la Clef de la voute du Pantheon à Rome, telles ſont les Impoſtes de Lanternes ſur les dômes dans la plûpart des Egliſes modernes, les rencontres des Nefs en berceau avec les Chevets circulaires, voutez en quart de ſphère, ou d'une plus grande portion, ſi le diametre du ſanctuaire eſt plus grand que celui du berceau de la nef; ſuppoſé que l'une & l'autre de ces voutes ne ſoit ni ſurhauſſée ni ſurbaiſſée, & que la nef ne ſoit point biaiſe ſur le Chevet, quoique la direction de ſon axe, c'eſt-à-dire, de ſon milieu, paſſe par le centre de la portion de voute ſphérique; car pour peu qu'il y ait de biais, la ſection n'eſt plus un cercle, comme nous allons le démontrer.

THEOREME IX.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'une Sphère & d'un Cylindre Scalene, dont l'Axe paſſe par le Centre de la Sphère, eſt une Ellipſe.

Soit la ſphère ABIH, pénetrée par le cylindre ſcalene KLGF, (*Fig.* 33.) dont l'axe Xx paſſe par le centre C de la ſphère, ſi l'on ſuppoſe un plan paſſant par cet axe, il ſera deux ſections differentes, ſçavoir le parallelograme KLGF dans le cylindre, & le cercle SDE dans la ſphère, lequel ſera grand ou majeur, parce qu'il paſſe par le centre C, & dont les points A & B, où ſe coupent ces deux figures, ſont com- *Fig.* 33.

muns aux deux ſurfaces de la ſphère & du cylindre, de même que les points I & H de la ſection oppoſée, qui ſont ſur les côtez du parallelograme, & à la circonference du cercle en même tems, & tous autres points que ces quatre ne pourront être que ſur une des ſurfaces des deux ſolides; car s'ils ſont ſur celle du cylindre, ils ſeront au dedans de la ſphère, & s'ils ſont ſur celle de la ſphère, ils ſeront hors du cylindre, puiſque les arcs ADH & BEI ſont au dehors des côtez AH & BI. Si l'on imagine un ſecond plan perpendiculaire au premier, & qui paſſe par les points A & B, il coupera ces deux corps differemment du premier, & fera deux ſections differentes, ſçavoir un cercle A*e*B*l*, repréſenté ici en racourci de perſpective, dont le diametre ſera AB & qui ne ſera plus un grand cercle, mais un cercle mineur; parce qu'il ne paſſe pas par le centre C de la ſphère. L'autre ſection dans le cylindre ſera une Ellipſe A*d*B*k*, dont AB ſera le petit axe; parce que la ſection perpendiculaire à l'axe d'un cylindre ſcalene eſt une Ellipſe, & que le diametre KL du cercle de la baſe KMLN, incliné au côté LG eſt plus grand que AB, qui lui eſt perpendiculaire; en effet ſi on lui menoit une parallele A*r* par A, elle ſeroit l'hypotenuſe du triangle rectangle, dont AB ſeroit une jambe, or toute ſection qui n'eſt pas parallele à la baſe, & qui n'eſt pas ſouſcontraire eſt une Ellipſe.

Presentement puiſque le plan paſſant par AB fait deux ſections differentes, il eſt évident que ni l'une ni l'autre ne peut être commune aux deux ſurfaces; en effet l'Ellipſe du cylindre étant circonſcrite au cercle de la ſphère, avec lequel elle n'a de commun que les deux points A & B, eſt toute hors de la ſphère & le cercle de la ſphère eſt tout au dehors du cylindre, donc la ſection commune ſera une autre courbe, qui ſera hors de ce plan, & qui n'aura de commun avec les deux planes, que les points A&B, cette courbe paſſeradonc au deſſus ou au deſſous du plan, coupant ces deux corps par AB. Dans cet exemple elle paſſera du côté du centre C de la ſphère, comme A*f*B; parce que le diametre M N = *fi* eſt plus grand que AB. Il faut à préſent faire voir le rapport qu'elle a avec l'Ellipſe A*d*B, pour démontrer qu'elle eſt une Ellipſimbre, telle que nous l'avons défini ci-devant. Pour y parvenir il faut encore une préparation.

Quoique nous ayons déja ſuppoſé deux plans coupans la ſphère & le cylindre, l'un par l'axe X*x*, l'autre par les points A & B perpendiculairement au premier; il convient encore d'en imaginer au moins deux autres paralleles entr'eux, & perpendiculaires aux premiers, ſçavoir encore un par l'axe & le diametre MN de la baſe, & l'autre par l'ordonnée OPQ; cette multiplicité de plans eſt un peu embaraſſante pour le Lecteur, mais elle eſt inévitable pour la démonſtration des proprietez

Digitized by Google

de la courbe que nous examinons, on peut s'aider l'imagination par des reliefs de papier ou de carton; il ſera bon encore de ſe rappeller ici le onziéme & douziéme Livre d'Euclide; parce que tout cet ouvrage ne roule que ſur les ſections & rencontres des plans; on ſentira la conſéquence de cet avertiſſement dans la ſuite, où quelque attention qu'on ait eu à rendre les figures intelligibles, on ne ſe flatte pas d'avoir pû repréſenter bien ſenſiblement en ſaillie, ce qui eſt à plat ſur le papier, c'eſt à l'imagination du Lecteur à relever les objets, & les détacher du plan où ils ſont, pour les conſiderer où ils doivent être.

Soient donc deux plans paralleles à l'axe du cylindre, paſſant par les ordonnées MN, OQ, les ſections de ces plans dans la ſphère ſeront des cercles, dont *f* S *i* & *t s b* ſont des arcs, & des parallelogrames dans le cylindre, dont M *d k* N & *u* O Q Z ſont des portions; parce que M *d* & N *k* ſont paralleles, étant les côtez du cylindre, & M N & *d k* auſſi paralleles entr'elles; parce que les plans K M L de la baſe, & A *d* B de la ſection par AB, ſont perpendiculaires au même plan AKLB, paſſant par l'axe X *b*; or puiſque la ligne MN eſt perpendiculaire à l'axe CX, c'eſt-à-dire au rayon CS prolongé, elle eſt parallele à la tangente qui paſſeroit par S de l'arc de cercle *f S i*, & les lignes M *m* & N *n* étant paralleles à cet axe, & également éloignées de part & d'autre, les lignes M *f* N *i* rencontreront cet arc en des points *f* & *i*, équidiſtans de M & N; (par l'Art. 39.) donc la ligne *f i* ſera parallele à MN & à *d k*; donc *d f* = *k i*, & *d k* = *f i*, c'eſt-à-dire, que l'ordonnée *d k* dans l'Ellipſe A *d* B eſt égale à l'ordonnée de la ſection commune aux deux ſurfaces, qui paſſent par *f* & par *i*. On démontrera de la même maniere que l'ordonnée *u z* eſt égale à l'ordonnée *t b* de la ſection ſolide, qui paſſe par *t*; donc toutes les ordonnées à l'axe courbe A *b* B, de la ſection ſolide, ſont égales à toutes celles de l'Ellipſe à l'axe AB; donc la ſection eſt une Ellipſimbre, *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

88. Puisque le plan MN, par l'axe X *x* du cylindre coupe perpendiculairement l'axe ſouſtendant AB de la ſection, il ſuit que la plus grande ordonnée de l'Ellipſe plane, qui eſt ici *d k*, s'abaiſſe perpendiculairement à AB en *f i*, qui eſt *l'Axe droit* de la courbe, & par conſéquent que cet axe eſt équidiſtant des extremitez de l'axe ſouſtendant AB, ce qui n'arrive dans aucun cas, que dans celui des cylindres ſcalenes.

Corollaire II.

89. En ſecond lieu il ſuit que la plus grande profondeur, ou diſtance de l'Ellipſimbre à l'Ellipſe plane, eſt à l'axe droit *f i*; parce que la

plus grande différence *d e* du diametre *e l* du cercle de la ſphère A*e*B*l*, & de l'axe *d k* de l'Ellipſe A*d*B*k*, eſt dans le plan de l'axe droit *f i*; or puiſque *d e* ou L*k* eſt la plus grande diſtance, qu'il puiſſe y avoir de la circonference du cercle à l'Ellipſe, la diſtance *df* ou *i*K ſera auſſi la plus grande qu'il puiſſe y avoir du plan A*d*B*k* à la courbe A*f*B*i*; & parce que cette difference des ordonnées du cercle à celles de l'Ellipſe, au même diametre AB, diminuë continuellement, il ſuit que la profondeur de l'Ellipſimbre diminuë auſſi depuis *f* juſqu'à B, où elle rejoint le cercle de la ſphère A*e*B*l*.

COROLLAIRE III.

90. POUR trouver cette profondeur ſur l'axe courbe de l'Ellipſimbre, qui eſt dans le plan de l'axe ſouſtendant AB, il n'y a qu'à décrire les ſections que font les plans paſſant par les ordonnées parallelement à l'axe du cylindre, leſquelles ſont des cercles de la ſphère, dont les centres ſont tous ſur la ligne DE, perpendiculaire à l'axe X*x* du cylindre par le centre C, & dont les lignes CS & WS en exprimeront les rayons; pour avoir les diſtances des côtez du cylindre, au plan paſſant par ſon axe & par AB, il faut faire à part (*Fig.* 34.) l'Ellipſe a*eb*E, ſur les axes donnez, ſçavoir, a*b* égal à AB de la fig 33. & E*e* égal au diametre KL de la baſe du cylindre ſcalene, dans laquelle on inſcrira le cercle a*db*D, qui ſera égal à celui de la ſection de la ſphère par AB de la Fig. 33. Cette préparation étant faite on tirera à part une ligne *c s*, (*Fig.* 36.) ſur laquelle prenant *cs* égal à CS de la Fig. 33. pour rayon, on décrira un arc indéfini SF, enſuite portant la diſtance *sg* de la fig. 33. en *sg* de la fig. 36, on élevera ſur ce point une perpendiculaire *g d*, ſur laquelle prenant *g e* égal au demi diametre du cercle a*db*D, c'eſt-à-dire à A*g* de la Fig. 33. on aura le point *e*, où la ſection plane coupe la ſphère; mais parce que ce point eſt au dedans du cylindre, il faut porter en dehors la diſtance DE de la fig. 34. qui eſt la difference du demi diametre du cercle & de l'axe de l'Ellipſe. Si par ce point *d* on mène une parallele à *cs*, elle coupera l'arc *fs* au point *f*, qui ſera commun au côté du cylindre *df*, & au cercle de la ſphère *sef*; & par conſéquent à la circonference de l'Ellipſimbre; donc la ligne *df* ſera la profondeur de cette courbe, au milieu à ſon axe droit, laquelle diſtance ſera égale à celle de l'axe courbe à l'axe ſouſtendant, dont l'un paſſe par *g* & l'autre par *b*; puiſque les ordonnées *dg* de l'Ellipſe, & *fb* de l'Ellipſimbre, ſont paralleles & égales.

Fig. 33. 34. 35. 36. IL ne ſera pas difficile de trouver cette profondeur pour tous les autres points de l'axe courbe; car ſi l'on porte la diſtance CW, de la Fig. 33. en *c* Y de la Fig. 35. on aura la diſtance des plans, qui

Digitized by Google

paſſent par MN & OQ de la fig. 33. & ſi l'on mene *u u* parallele à *e* E, fig. 34. on aura les ordonnées Y*u* de l'Ellipſe, & Y*x* du cercle, & en W*s*, Fig. 33. le rayon du cercle de la ſphère, avec lequel faiſant (*Fig.* 35.) l'arc *s* T, & la fléche *y s* égale à *y s* de la fig. 33. on menera par le point *y* la perpendiculaire *y u*, qu'on fera égale à Y*u* de la fig. 34. ſi par le point *u* on mene *u* T parallele à W*s* cette ligne, qui repréſente le côté du cylindre, coupera l'arc *s* T au point T, qui ſera commun à la ſphère & au cylindre, par conſéquent à la circonference de l'Ellipſimbre, la diſtance *u* T ſera celle des ordonnées *u y* de l'Ellipſe, & T*u* de l'Ellipſimbre que l'on cherchoit; ce qui n'a pas beſoin de démonſtration, puiſque cette figure eſt une exacte repréſentation de la ſection faite dans la ſphère & dans le cylindre, par le plan O Q *b t* parallele à ſon axe & au diametre de la baſe M N paſſant par l'axe X C, dont une partie eſt repréſentée ici (*Fig.* 36.) par la ligne C S rayon de la ſphère, & W P qui lui eſt parallele par W*s*, partie de W*p*, de même que *d f* de la fig. 36. repréſente une portion du côté du cylindre M*f*, & T*u* celle du côté O*t* de la fig. 33.

Application à l'uſage.

91. Ce Theorême fait voir que lorſqu'une voute en berceau biaiſe & en plein ceintre dans ſon Arc de face, rencontre une voute ſphérique, dont le centre eſt dans l'alignement de l'axe du berceau, l'arête qui ſe forme à la jonction de ces deux voutes ne peut être en plein ceintre, ni dans un même plan Elliptique ſurhauſſé ou ſurbaiſſé, mais une Courbe dont les Aplombs s'écartent de la ligne droite, menée d'une impoſte à l'autre. Ainſi ſuppoſant qu'une nef d'Ellipſe ſoit un peu biaiſe ſur le Chevet circulaire du chœur, vouté en cul-de-four, c'eſt-à-dire, en portion de ſphère, ou ſeulement dont l'Arc-Droit ſoit ſurhauſſé ou ſurbaiſſé, comme il arrive très-ſouvent, la rencontre de ces voutes eſt une Ellipſimbre. L'Architecte qui n'a point de Theorie ſe trouve embaraſſé en pareil cas, pour éviter une eſpece de difformité de cette Courbe, à laquelle il ne s'attendoit pas; l'avantage de celui qui a des Principes, eſt de connoître du premier coup d'œil, ce qui doit réſulter de ſon deſſein, ce qui le met en état d'y remedier, ou par la ſaillie de quelque Arc-doubleau, ou par quelque induſtrieuſe correction des ceintres.

THEOREME X.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'une Sphère & d'un Cylindre Droit, qui la pénetre de toute ſa circonference, & dont l'Axe ne paſſe pas par le centre de la Sphère, eſt une Ellipſimbre.

Soit la ſphère ABTD, pénetrée par le cylindre LNDF, dont l'axe
Fig. 38. M*m* ne paſſe pas par le centre C de la ſphère ; ſi l'on ſuppoſe un plan paſſant par ce centre & par l'axe M*m*, ce plan fera deux ſections differentes, ſçavoir, un cercle ASD dans la ſphère, lequel ſera majeur, & un parallelograme LNDF dans le cylindre, leſquelles deux ſections ſe couperont aux quatre points ABDE, qui ſeront par conſéquent, communs aux deux ſurfaces de la ſphère & du cylindre, & à la circonference des courbes oppoſées, formées par la pénetration du cylindre à ſon entrée & à ſa ſortie de la ſphère. Nous nous contenterons d'en examiner une, parce que l'autre lui ſera parfaitement égale.

Si on ſuppoſe encore, comme au Theorême précedent, un ſecond plan perpendiculaire au premier & paſſant par les points A & B, il eſt évident qu'il ſera deux nouvelles ſections, ſçavoir, un cercle dans
Fig. 38. la ſphère, repréſenté dans la fig. 38. par la courbe A *f* B F, dont le diametre ſera AB, & une Ellipſe dans le cylindre repréſentée par A*g*BG, dont AB eſt le grand axe ; parce que le cylindre eſt coupé obliquement ſuivant cette ligne, par la ſuppoſition, & dont le petit axe ſera la ligne G*g*, ou ſon égale KL, qui eſt le diametre de la baſe du cylindre, LNDF, d'où ſuivent les mêmes preuves qu'on a déduites au Theoréme précedent, que la ſection commune aux deux ſurfaces des corps ne peuvent être ni cercle ni Ellipſe ; puiſque l'un étant inſcrit dans l'autre, ces figures n'ont que deux points communs A & B, qui peuvent être à la rencontre de deux ſurfaces, & qu'enfin la ſection qui leur eſt commune eſt une Courbe à double courbure, qui n'eſt pas dans un plan, & qui n'aura de commun avec les deux ſections planes ci-devant, que les mêmes points A & B. La ſeule difference qu'il y a du cas du Theorême précedent à celui-ci, eſt que la ligne droite AB, qui paſſe par ces points communs, eſt le petit axe, & qu'ici elle eſt le grand axe, de ſorte que l'Ellipſe eſt toute au dedans du cercle de la ſphère dans ce cas, & tout au dehors dans le précedent.

D'ou il ſuit que l'axe courbe de la ſection ſolide, qui eſt une Ellipſimbre dans l'un & l'autre cas, s'approche du centre de la ſphère dans le premier, & s'en éloigne dans le ſecond.

Au reſte les ordonnées à l'axe courbe de la ſection ſeront toujours

Digitized by Google

égales à celles de l'Ellipſe, appliquée à ſon grand axe AB, comme nous l'avons démontré à l'égard du petit, à la propoſition précedente, ce qui pourroit ſuffire pour l'établiſſement de la preuve de l'énoncé de celle-ci.

Cependant comme il importe de bien concevoir la nature & les proprietez de cette Courbe, qui eſt la clef de toutes celles qui ſe forment par la pénetration des corps, nous en allons reprendre l'explication pour la rendre plus intelligible, en la préſentant ſous une autre face, par une figure plus diſtincte, où, pour éviter la confuſion des lignes, on ne repréſente qu'une moitié des corps qui ſe pénetrent, parce qu'il eſt très-aiſé de conclure pour l'autre moitié.

Soit (*Fig.* 40.) K L *e* R Q E la repréſentation en perſpective de la ſection faite par un plan, paſſant par l'axe du cylindre juſqu'au diametre RQ de la ſphere, perpendiculairement au plan paſſant par le même axe, & les points A & B, de ſorte que C^2 M de la fig. 38. eſt la même que C^2 M de la fig. 40. le demi cercle QSR, fera la ſection que ce plan fait dans la ſphère, & le parallelograme K *l* celle de ce même plan dans le cylindre. Soit un autre plan parallele à celui-ci, paſſant par T *t*, *qr*, qui fait auſſi deux ſections de même nature, ſçavoir un demi cercle *qsr*, & un parallelograme T *tuv*. Il eſt évident que les interſections des côtez de ces parallelogrames avec les demi-cercles ſeront des points communs aux deux ſurfaces de la ſphère & du cylindre, tels ſont les points E *e*, *Ii*, par leſquels le contour de la ſection ſolide doit néceſſairement paſſer de même que par les points A & B; la courbe E *i* B I *e* ſera donc à la rencontre des ſurfaces, depuis ſon axe droit E *e*, correſpondant du diametre de la baſe du cylindre K L juſqu'au point B, où elle va toucher la ſection plane de l'Ellipſe, paſſant par AB, que nous repréſentons ici par la Courbe A G B *g*. Cela ſuppoſé : *Fig.* 40.

Puisque le diametre K L de la baſe du cylindre eſt perpendiculaire à l'axe C^2 M, que l'on ſuppoſe droit, & que les moitiez de ce diametre KM & ML ſont égales, les lignes KE & L *e* menées de leurs extremitez parallelement à cet axe, ſeront égales entr'elles (par l'Art. 39.) donc E *e* ſera parallele & égale à KL; mais parce que par la ſuppoſition, le plan AGB *g* eſt perpendiculaire au plan M N *n* C^2 paſſant par l'axe du cylindre M, C^2, & par la ligne AB, les angles G *c* M & *gc* M ſont droits; donc G *g* eſt parallele à K L, & par conſéquent à E *e*; mais auſſi à cauſe des paralleles K *k*, L *l*, qui ſont les côtez du cylindre, E *g* eſt un parallelograme; donc E *e* & G *g* ſont deux lignes égales: & par la même raiſon H *b* & *i* I le ſeront auſſi; or G *g* & H *b* ſont des ordonnées

de l'Ellipſe plane au grand axe AB; & E*e*, I*i*, des ordonnées de la ſection ſolide à ſon axe courbe D*x*B, partie de tout l'axe AD*x*B; donc les ordonnées de cette ſection ſont égales à celles de l'Ellipſe AGB*g* paſſant par les points communs A & B; donc cette courbe eſt du nombre de celles que nous avons appellé *Ellipſimbre, ce qu'il falloit démontrer.*

92. Il reſte à faire voir, que l'axe courbe AD*x*B, qui eſt dans le même plan que le ſouſtendant AB, lequel eſt le grand axe de l'Ellipſe AGB*g*, s'en éloigne & s'en approche dans le rapport des ſinus verſes des arcs de cercle de la ſphère, dont les ordonnées de l'Ellipſe & de l'Elliptimbre ſont les ſinus droits dans les ſections circulaires de la ſphère, faites par les plans paſſant par ces ordonnées parallelement à l'axe du cylindre M C².

Car ſi du centre C² on mène les rayons C²E & C²*e*, aux extremitez de l'ordonnée E*e*, qui eſt la corde de l'arc ES*e*, on verra clairement que ſes moitiez E D, *e* D ſont les ſinus droits des moitiez de cet arc, dont DS eſt la fléche ou ſinus verſe; de même ſi du centre O du demi cercle *qsr* on menoit des lignes au point *i* & I, de la corde *i*I autre ordonnée à la ſection, on reconnoîtroit que ſa plus grande profondeur dans le cercle, qui eſt *xs*, ſeroit la fleche de cette corde, & le ſinus verſe de ſa moitié *ix* ou I*x*, ce qui eſt clairement exprimé dans les deux figures 35. & 36. en *b*S & *ns*, comme nous l'avons expliqué au Theorême précedent.

Il en ſera de même de toutes les ordonnées poſſibles entre les points A & D, & D & B, dont les profondeurs diminuëront depuis l'axe droit E*e*, juſqu'à ces points A & B où elles ſe réduiront à rien; parce que les ordonnées du cercle AFB*f* de la ſphère, & de l'Ellipſe AGBS, dont la difference cauſe celle de la profondeur de la ſection, deviennent égales à o. en ces points.

Corollaire.

93. D'ou il ſuit que l'Ellipſimbre ne fait que toucher les ſections planes, circulaire & Elliptique; parce que ces deux dernieres ſe touchent ſeulement & ne ſe coupent point, & que dès le moment qu'il commence à y avoir de la difference entre les ordonnées à leurs diametres communs, dès ce moment auſſi il commence à y avoir quelque profondeur ou diſtance des ſections planes à la ſolide, dont l'axe courbe commence à s'éloigner du ſouſtendant. Donc la circonference courbe de l'Ellipſimbre ne fait que toucher les circonferences des ſections planes du cylindre & de la ſphère. 94.

Digitized by Google

94. Nous avons donné au Theorême précedent la maniere de trouver les ſinus verſes, qui ſont la profondeur de l'axe courbe, par le moyen du compas; mais ſi l'on vouloit, pour une plus parfaite operation, les trouver par le calcul, il ne ſeroit pas difficile. Il faut ôter du quarré du rayon du cercle de la ſection de la ſphère C²S ou *os*, le quarré de l'ordonnée ED ou *ix*, & il reſtera le quarré de C²D ou de *ox*, dont la racine quarrée étant ôtée du rayon C²S ou *os*, il reſtera le ſinus verſe DS ou *xs* pour la profondeur de l'axe courbe AD*x*B dans la ſphère.

Et ſi l'on veut trouver la difference des profondeurs des ordonnées de la ſection plane & de la ſolide, il ne s'agit que de faire encore une operation, qui eſt d'ôter du rayon C²S ou C²F le quarré de l'ordonnée *c*F du cercle de la ſection plane, AF B*f* reſtera le quarré de C²*c*, dont la racine étant ôtée du rayon, reſtera *c*S, dont ôtant D*s* trouvé ci-devant, reſtera *c*D, difference de la profondeur de la ſection plane dans la ſphère, & de la ſection ſolide, laquelle eſt la diſtance des deux ordonnées correſpondantes dans l'Ellipſimbre & dans l'Ellipſe plane, *ce qu'il falloit trouver.*

95. Nous avons dit dans le cas du Theorême précedent, que la plus grande diſtance de l'Ellipſe plane à l'Ellipſimbre, qui eſt à l'axe droit, étoit au milieu de la ſection ſolide, à diſtance égale des points A & B, il n'en eſt pas de même dans celui-ci; car 1.° l'axe droit n'eſt pas à égale diſtance des points A & B. 2.° ce n'eſt pas à l'axe droit que la ſection ſolide eſt le plus éloignée de la ſection plane.

Que l'axe droit E*e* ne ſoit pas équidiſtant des points A & B cela eſt évident: puiſque l'axe du cylindre étant incliné à l'axe ſoutendant AB, l'angle D*c*B eſt aigu, & D*c*A eſt obtus; donc le point D, qui eſt le centre de l'Ellipſimbre, eſt plus près de B que de A.

Secondement. Pour prouver que le point D n'eſt pas le plus éloigné de la ſection plane, qui paſſe par AB, ſoit fait à part (*Fig.* 39.) l'arc de cercle majeur a T*b* égal au ſegment, que la ligne AB retranche d'un grand cercle de la ſphère, dont le milieu de la corde eſt en C, par où on fera paſſer une ligne C*e*, qui fera avec a*b* l'angle *b*C*e* égal à celui de l'inclinaiſon de l'axe du cylindre ſur la ligne AB, égal à l'angle LAB. (*Fig.* 38.) Soit auſſi *a*L *d b* l'axe courbe de la ſection ſolide, & a*b* le grand axe de la ſection plane Elliptique, la plus grande ordonnée à cet axe, qui eſt le petit axe, correſpond à celle qui paſſeroit par D de l'Ellipſimbre, qui tient lieu de centre de cette courbe; il faut prouver qu'il peut y avoir un autre point, par exemple, L, qui *Fig.* 39. *Fig.* 38.

ſoit plus éloigné de a*b* que le point D. Pour cela, ſi du point C on fait CT perpendiculaire ſur a*b*, & que du point T, où elle coupe l'arc a T *b*, on mene une tangente T*e* à cet arc, que du même point T on abaiſſe T L*f* parallele à DC, le point L, où elle coupera l'axe courbe, ſera le plus éloigné de l'axe ſoutendant a*b*; car les lignes *e*C, T*f*, qui ſont entre les mêmes paralleles a*b*, T*e*, ſont égales entr'elles, & parce que SC n'eſt que partie de *e*C, elle ſera plus petite que T*f*; or S*d* repréſente le ſinus verſe de l'arc, dont l'axe droit qui paſſe par D eſt la corde dans le cercle, qui eſt la ſection de la ſphère par l'axe du cylindre perpendiculairement au cercle a S*b*, & LT repréſente le ſinus verſe, ou la fléche, dont la double ordonnée, qui paſſe par le point L, eſt la corde, laquelle étant égale à celle qui paſſe par le point *f* de l'Ellipſe plane peut être très-petite; de-là on peut conclure, que ſon ſinus verſe peut être plus petit que *d*S, qui eſt dans un plus grand cercle que celui qui paſſe par L*f*, lequel eſt plus loin du centre C de la ſphère; (*Fig.* 34.) mais quand nous ſuppoſerions ces ſinus verſes égaux, il ſera toujours évident qu'ôtant des deux lignes inégales SC, T*f* des quantitez égales S*d*, TL, la partie L*f* reſtera plus grande que *dc*, qui eſt plus petite que T*f*; donc la diſtance oblique L*f* étant plus grande que *d*C, la diſtance perpendiculaire L*x* ſera auſſi plus grande que *dy*, *ce qu'il falloit démontrer*; car les triangles L*fx* & C D*y* ſeront ſemblables.

Corollaire I.

96. D'ou il ſuit que plus la ligne AB eſt inclinée à l'axe CS, plus il doit y avoir d'irrégularité dans l'écartement des ordonnées de l'Ellipſimbre de celle de l'Ellipſe plane, comme auſſi dans la diſtance de ces ordonnées entr'elles ſur leur axe courbe a*d b*, comme on voit à la figure 41. puiſque les intervales A 2, 2 3, 3*d* ſont très inégaux, meſurez ſur cette courbe A*d*B, quoiqu'ils ſoient égaux étant meſurez ſur la droite AB en *p q c*, ou ſur une perpendiculaire à leur direction, comme en *m n o*; puiſque ces ordonnées à l'axe courbe aux points 2, 3, *d*, 4, 5 ſont émanées de celles de l'Ellipſe plane, aux points *p q* C, &c. ou de la baſe du cylindre aux points *m n o*.

Fig. 41.

Corollaire II.

97. D'ou il ſuit encore que les ordonnées à l'axe courbe de l'Ellipſimbre ne ſont pas en plus grand nombre, que celles de l'Ellipſe plane de part & d'autre du centre C ou D; mais qu'elles ſont plus preſſées d'un côté que de l'autre.

Digitized by Google

Remarque ſur la difference des cas qui peuvent arriver dans les Cylindres Scalenes.

98. Nous avons ſuppoſé dans l'énoncé de ce Theorême, que le cylindre, qui pénetre la ſphère, fût droit, parce que s'il étoit ſcalene, il pourroit arriver que la ſection commune aux deux ſurfaces ſeroit un *Cercle*, & non pas une Ellipſimbre, comme on peut le connoître par la figure 37. car ſi du centre H, de la baſe AB du cylindre ſcalene ABDE, on abaiſſe une ligne HC perpendiculaire au plan de cette baſe, & que du point C, pris ſur cette ligne à volonté, & de l'intervale CA ou CB pour rayon, on décrive un cercle GABDE, il pourra être un des majeurs d'une ſphère, qui auroit pour centre C; or ſi l'on prolonge les côtez du cylindre ABFE vers D, il eſt évident que ce cercle coupera les côtez du cylindre en DE de la même maniere qu'en AB, de ſorte que l'angle EDB ſera égal à l'angle ABD. *Fig.* 37.

Pour en ſentir la vérité il n'y a qu'à mener CG perpendiculaire ſur les côtez du cylindre juſqu'à la circonference du cercle en G, alors on reconnoîtra que les arcs GA, GE égaux entr'eux, * étant ôtez des arcs GD, GB, auſſi égaux entr'eux par la même raiſon, les reſtes AB & ED ſeront égaux, de même que leurs cordes, qui ſont les diametres de la baſe du cylindre, donc la ſection ED ſera égale à la baſe EF; égale par la ſuppoſition de la baſe AB, parce qu'elle eſt ſouſcontraire, * l'angle EDB étant égal à ABD, puiſque tous les deux ſont appuyez ſur le même arc AGE; donc ED eſt un cercle, *ce qu'il falloit démontrer.* * *Euc. l. 3. p. 3. & 28.* * Art. 49.

Le même raiſonnement ſert auſſi à prouver que les ſections oppoſées AB, ED (*Fig.* 38.) ſont égales entr'elles; puiſque leurs grands axes AB, ED ſont égaux, & que les petits axes ſont égaux à ceux de la baſe du cylindre. *Fig.* 38.

Corollaire III.

99. Il ſuit auſſi, que plus les axes AB, ED ſeront inclinez à l'axe M*m* du cylindre, plus les ſections oppoſées ſe rapprocheront, & qu'enfin ſi le côté du cylindre *l l*, *f f* devient tangent à la ſphère, les ſections oppoſées a*T*, *d*T ſe toucheront au point T, & ſi ce côté du cylindre eſt hors de la ſphère, ces ſections ſe croiſent également, & ſe mutilent réciproquement, comme nous l'expliquerons au Theorême ſuivant.

Application à l'uſage.

100. Cette propoſition ſert à faire connoître qu'elle eſt la Cour-

be de l'arête d'Enfourchement des lunettes en berceau, pratiquées pour des fenêtres, ou pour la décharge ou pour la décoration dans une voute ſphèrique ; car ces lunettes étant ordinairement ou au deſſus de l'impoſte de la voute ſphérique, ou inclinées en Abajour ou Rampantes, ce ſont des moitiez de cylindre ou des cylindres entiers, dont l'axe ne paſſe pas par le centre de la ſphère, & qui doivent être cenſées faire le même effet, que ſi un cylindre entier entroit dans la ſphère de toute ſa circonference, comme ſi la fenêtre étoit un œil-de-bœuf, comme ſont ceux des quatre petits dômes de St. Pierre de Rome, dont la direction ne tend pas au centre de la voute, mais au deſſous, parce que l'Abajour eſt fort incliné. Il n'y a d'autre changement que l'addition d'une moitié de contour de même nature.

par exemple

THEOREME XI.

La Section faite par la pénetration d'un Cylindre, qui n'entre dans la Sphère que d'une partie de ſa circonferuce, eſt une Ellipſimbre Compoſee.

Fig. 42. SOIT la ſphère BV*bp*, dont le centre eſt C, pénetrée par le cylindre YLND, qui n'entre qu'en partie de ſa circonference dans la ſphère, enſorte que la partie RP de ſon diametre RT (lequel étant prolongé paſſe par le centre de la ſphère) en reſte dehors.

AYANT ſuppoſé comme dans les Theorêmes précedens, un plan qui paſſe par le centre C, & l'axe M*m* du cylindre, dont la ſection ſera un parallelograme YLND, & celle dans la ſphère un cercle majeur BV*bp*, on reconnoîtra que les points B & *b* ſont communs aux deux ſurfaces du cylindre & de la ſphère ; puiſqu'ils ſont la rencontre du côté du cylindre & du cercle majeur de la ſphère, & que le point P, qui eſt commun aux deux diametres RT du cylindre, & PV de la ſphère, ne l'eſt pas aux ſurfaces, puiſqu'il eſt dans le cylindre de la profondeur RP, qui eſt la moindre, & que l'ordonnée P*p* au diametre PV, qui paſſeroit par ce point, ſeroit toute hors de la ſphère étant une tangente ; donc elle ne pourroit être commune aux deux ſections, qui ſeroient faites par un plan perpendiculaire au premier, & paſſer par RV, lequel plan en feroit deux circulaires, ſçavoir RST dans le cylindre, & PBV dans la ſphère, qu'il faut imaginer en l'air, & non pas comme le repréſente la figure, ſur le plan paſſant par l'axe du cylindre & le centre de la ſphère ; mais parce que l'interſection des deux cercles RST du cylindre, & PSV de la ſphère, ſe fait en P, il ſuit que ce point S eſt à la circonference des deux ſurfaces, d'où ayant mené l'ordonnée S*q* au diametre RT, on voit que ſa partie PT eſt commune à ceux des deux corps, ſçavoir RT, PV.

Digitized by Google

Presentement ſi le cylindre YLND étoit ſcalene, & que la ſection par *q* & B, c'eſt-à-dire, E*q*B fût un cercle, elle auroit pour ſon égale & ſouſcontraire F*qb*, auſquelles *q* S ſeroit une ordonnée commune aux deux ſections des plans, coupant le cylindre par EB & F*b*, & aux deux cercles *e* B & *fb*, que ces mêmes plans ſeroient dans la ſphère, de ſorte qu'il eſt viſible que ces deux ſections planes, quoique de même eſpece, ne pourroient être communes aux deux ſurfaces; puiſque ce ſont deux cercles de differens diametres, qui ſe touchent aux points B & *b*, dont le plus petit, qui a pour diametre *e*B, ſeroit tout entierement dans le cylindre, & que le grand EB ſeroit dans toute ſa circonférence hors de la ſphère.

La difference ſera plus grande, ſi le cylindre eſt Droit; parce que la ſection EB dans le cylindre eſt une Ellipſe, & que *e* B dans la ſphère un cercle fait par le même plan perpendiculaire à celui qui paſſe par l'axe du cylindre & par la ſphère; il en eſt de même de la ſection faite par le plan F*b*, paſſant par *q* & *b*, l'ordonnée commune *q*S retranchera une partie de ces ſections planes, depuis *q* vers E, & depuis le même point *q* vers F, tant de l'Ellipſe, que du cercle fait par chaque plan coupant les deux corps, qui eſt hors de la ſphère; mais parce que la ſection commune à leurs ſurfaces ne peut être en même tems un cercle & une Ellipſe, il ſuit qu'elle ne peut être dans le plan EB ni F*b*, quoiqu'elle y ait un point B ou *b*; donc elle s'en éloignera en ſe courbant vers la circonférence du cercle de la ſphère, enſorte que les ordonnées à l'axe courbe *q u* B deviennent communes au cylindre en *uu* de la baſe FxK, & au cercle de la ſphère 2 *x* Z. *y*; donc elle ſera une Ellipſimbre de même nature, que celle du Theorême précedent ſur chaque côté EB & F*b*, mais imparfaite, & mutilée par l'ordonnée commune *q*S où elles ſe rencontrent, & ſont un angle, de ſorte que la ſection totale, depuis B en *b* par *q* eſt Compoſée de deux parties d'Ellipſimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

Pour rendre cette explication ſenſible nous ſuppoſerons un cylindre ſcalene M L N *m*, plus petit que le précedent, dont le côté M*m* coupe la ſphère aux points 2 & 4, & que la ſection faite par un plan paſſant par 4B, & un autre par 2*b*, eſt un cercle parallele à ſa baſe, ou en ſection ſouſcontraire; il eſt évident que le même cercle ſera auſſi la ſection plane de la ſphère de chaque côté en 4 B & 2 *b*, donc le ſection courbe commune *b* 5B ſera la rencontre de deux portions de cercles égales, qui ont une ordonnée commune au point 5, laquelle eſt l'interſection de deux plans, qui feroient une figure ſemblable à celle qui eſt repréſentée à la figure 43. en A ou en B, ſelon que le point 5. s'approchera d'un côté du cylindre ou de l'autre; car *Fig.* 43.

ſi ce point de l'interſection des plans ſe faiſoit à la tangente, comme en T, (*Fig.* 38.) les deux arcs de cercles aboutiroient l'un à l'autre, & l'angle B (*Fig.* 43.) tomberoit ſur le point *t*; mais à meſure que le point 5 rentrera, le point B, qui eſt la rencontre des deux arcs, s'éloignera de *t*.

Fig. 38. *Fig.* 43.

La même choſe arrivera aux portions d'Ellipſimbre, lorſque le cylindre eſt une partie hors de la ſphère, alors ces deux courbes feront une inflexion au milieu en angle ſaillant, tel eſt l'angle curviligne 9 Z^2 10, quand la ſphère paſſera au-delà de l'axe du cylindre, comme en P; mais ſi l'axe du cylindre paſſe au dehors de la ſphère, alors la ſection compoſée, fait un angle rectangle, comme on voit dans la figure A; (*Fig.* 43.) la raiſon en eſt bien ſenſible, ſi l'on fait attention, que juſqu'à l'axe du cylindre la ſection monte dans la raiſon des ordonnées à la baſe R S T, & au contraire, que depuis l'axe elle baiſſe dans la même raiſon juſqu'au point R, auquel elle ſe joint, lorſque le côté YD eſt tangent à la ſphère, comme nous l'avons dit du point T. (*Fig.* 38.)

Fig. 42.

COROLLAIRE.

101. D'ou il ſuit que pour trouver les points de l'Ellipſimbre compoſé, il ne s'agit que de trouver les ordonnées communes aux ſections circulaires de la ſphère & du cylindre, & pour cela il faut leur trouver des diametres en partie communs, ce qui ſe fait en menant autant de perpendiculaires que l'on voudra à l'axe M*m* du cylindre, qui coupent le cylindre & la ſphère, comme F*y*, RV, *dff*, dont les parties 2 K, P T, *gh*, ſont communes aux diametres du cylindre F K & 2*y* de la ſphère, RT, PV; *dh*, *gff*; ſi ſur chacun de ces diametres on éleve des demi-cercles F*x*K, 29*y*, PST, PBV, *dih*, *g*G*ff* leurs interſections *x*, S, *i* feront des points à la circonference de la Courbe, & les perpendiculaires menées de ces points aux diametres communs, qui les couperont en *u*, *q* & 7, donneront les points de l'axe courbe, & feront des ordonnées communes, leſquelles étant portées de W en Y, de C en Z^2, & de H en h^2, marqueront ſur un plan, qui auroit pour baſe la ligne 9, 10, des points, par leſquels faiſant paſſer une courbe 9 Y Z^2 h^2 10, on aura une expreſſion du contour de l'Ellipſimbre compoſée, ce que nous expliquerons plus au long dans les Problêmes du Livre ſuivant.

Il ſera encore vrai dans le cas de ce Theorême, comme dans le précedent, que les profondeurs de la ſection ſolide dans la ſphère ſeront dans la même raiſon des ſinus verſes, dont les ordonnées ſeront les ſinus droits, comme on le voit en 2*u*, P*q*, *g*7.

Si le côté LN du cylindre paſſe par le centre C de la ſphère, & que ſon demi-diametre ML ne ſoit pas plus petit que le rayon CS de la ſphère, il ſera aiſé de décrire l'Ellipſimbre compoſée avec un compas, dont on mettra une pointe ſur ce côté, par exemple, en T, l'autre point le décrira.

La raiſon en eſt claire, car le rayon CS ne peut tourner autour d'un point fixe qu'en parcourant la ſurface d'une ſphère par l'autre extrémité mobile.

Application à l'uſage.

102. Cette propoſition fait voir quelle eſt la courbe de l'arête d'Enfourchement, qui ſe forme à la rencontre de la ſurface d'une Tour ronde, qui entre en partie dans une voute ſphérique, comme pourroit être un eſcalier à vis dans un dôme ou un pui, ſur le bord d'une citerne voutée en cû-de-four, ou d'une Tour verticale, dans laquelle ſont des renfoncemens en niche ſphérique, comme ſont les trois du dôme du Val de Grace, l'un ſur le Baldaquin, & les deux autres en Croix ſur le Chœur & la Chapelle oppoſée, qu'on appelle Niche en tour creuſe, ou encore d'une voute ſphérique, établie ſur quatre portions d'arc-de-Cloitre, ou qui rachete un berceau. Où l'on doit remarquer, que ſi la voute ſphérique n'avançoit pas juſqu'à la clef, il ſe feroit un angle en *Surplomb* contraire à la ſolidité; parce que les *Contrecleſs* pouſſeroient à vuide.

De la rencontre des Surfaces des Sphères avec celles des Cônes.

THEOREME XII.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'une Sphère & d'un Cône Droit, dont l'Axe paſſe par le Centre de la Sphère eſt un Cercle.

Soit la ſphère ABED pénetrée par le cône SLN, dont l'axe SM paſſe par le centre C; ſoit auſſi la courbe DKE, la ſection faite par la rencontre de leurs ſurfaces, ſur laquelle ayant pris à volonté un point K, on menera du ſommet S la ligne KS, qui ſera à la ſurface du cône; puiſque le point K eſt ſuppoſé commun à ſa ſurface, auſſi bien qu'à celle de la ſphère. Si par les points D, K, E on méne des *Fig.* 44.

Digitized by Google

lignes au centre de la ſphère C, comme DC, KC, EC, & que du même centre C on tire des perpendiculaires CF, CG, CH aux côtez du cône SD, SK, SE, on reconnoîtra que les triangles FCS, HCS, GCS ſont égaux en tout; puiſqu'ils ont le côté SC commun, qu'ils ſont rectangles en F, G, H, & qu'ils ont les angles en S égaux entr'eux, qui ſont ceux de l'axe du cône avec les côtez; donc les parties de ces côtez SF, SG, SH ſont égales; de même les autres triangles FCD, GCK, & HCE ſont auſſi égaux en tout, car ils ſont rectangles par la conſtruction, ils ont les côtez DC, KC, EC égaux, puiſqu'ils ſont rayons de la même ſphère, & les côtez FC, CH, CG, comme nous venons de le démontrer, auſſi égaux entr'eux; donc les côtez DF, KG, HE le ſeront auſſi, leſquels étant ajoûtez aux lignes égales SF, SG, SH, on aura SD = SK = SE; par conſéquent les triangles SDI, SKI, SEI ſeront égaux entr'eux, puiſqu'ils ſont rectangles en I, qu'ils ont les angles en S égaux, & le côté SI commun; or les côtez ID, IK, IE étant égaux, & la ligne SI leur étant perpendiculaire, ils ſont tous dans le même plan,* & par conſéquent à la circonference d'un cercle, dont le centre eſt en I; mais par la ſuppoſition, les points D, K, E ſont à la ſurface de la ſphère, & à celle du cône dans l'interſection faite par leur pénetration, donc la ſection d'un cône droit, qui pénetre la ſphère, & dont l'axe paſſe par ſon centre, eſt un Cercle, *ce qu'il falloit démontrer.*

* *Eucl. l. 11. p. 5.*

On démontrera la même choſe de la ſection oppoſée AB, vers le ſommet du cône, qui eſt évidemment toujours plus petite que celle qui ſe fait vers la baſe.

Application à l'uſage.

103. Cette propoſition fait voir, quelle eſt la courbe de l'enfourchement d'une Trompe, d'une *Lunette ébraſée*, ou voute en canoniere droite, qui rachete une voute ſphérique, lorſque leurs impoſtes ſont de niveau, & leur direction tendant au centre de la voute ſphérique.

Si la trompe ou la lunette étoit biaiſe, quoique la direction de leur milieu tendit au centre de la ſphère, la courbe ne ſeroit plus un cercle, de même que ſi la direction ne tendoit pas au centre, comme on va le démontrer.

THEOREME

THEOREME XIII.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'une Sphère & d'un Cône Scalene, dont l'Axe paſſe par le Centre de la Sphère, eſt une ELLIPSOIDIMBRE, *ou un cercle ſi elle eſt ſouſcontraire.*

SOIT une ſphère a*b*BA (*Fig.* 45.) dont le centre eſt C, par lequel paſſe l'axe SX du cône ſcalene SDE, qui la pénetre, il eſt clair, comme dans la propoſition précedente, que ſi l'on ſuppoſe ces deux corps coupez par un plan, paſſant par l'axe SX du cône, les quatre points a, *b*, B, A ſeront communs à la ſurface du cône, & à celle de la ſphère; puiſqu'ils ſont l'interſection d'un cercle majeur de la ſphère, & du triangle par l'axe du cône. *Fig.* 45.

SI l'on ſuppoſe encore un plan perpendiculaire au premier, & paſſant par A & B, il ſera deux ſections differentes, ſçavoir un cercle dans la ſphère, que nous repréſentons ici par AKB, & dans le cône ſcalene (la ſection A B n'étant pas ſouſcontraire) une Ellipſe que nous repréſentons ici par ALB, leſquelles ſections n'ayant de communs, que les points A & B, ne pourront être ni l'une ni l'autre commune aux deux ſurfaces; donc la ſection ſolide paſſera au dehors des deux plans, avec leſquels elle doit cependant avoir les deux points A & B communs.

SOIT menée *b i* parallele à la baſe DE par le point M, interſection de l'axe SX & de la ligne AB, il eſt évident que *b i* ſera le diametre d'un cercle, dont la moitié M*b*, portée en ML perpendiculairement ſur AB, ſera une ordonnée commune à l'Ellipſe ſur l'axe AB.

DE même ſi l'on mene *d e* parallele à D E par le point *m*, milieu de l'axe ſoutendant AB, & qu'on prenne une moyenne proportionelle entre *d m* & *m e*, cette ligne que nous ſuppoſons ici égale à *m* L ſera auſſi une ordonnée de l'Ellipſe, qui ſera égale à la moitié du grand axe de la ſection Elliptique du cône, puiſqu'elle l'eſt ſur le milieu *m*, & qu'elle eſt plus grande que *m r*, rayon de cercle fait ſur le diametre AB plus petit que *d e*.

SOIT de plus menée par le point *m* la ligne S*m*, du ſommet du cône S, qui coupera le cercle a *b* B A en H & I; ſur HI, comme diametre, on décrira le demi cercle H*f*I, qui ſera une ſection de la ſphère perpendiculaire au cercle majeur A B *b a*, puis ſur la même HI on élevera au point *m* la perpendiculaire *m g* égale à *m*L; ſi du point *g* on mene au ſommet S la ligne *g* S, elle coupera le cercle H*f*I, de la ſphère au point *f*, qui ſera commun aux deux ſurfaces, par conſéquent à la ſection, puiſque S*g* eſt un côté du cône, qu'il faut ſe repréſenter

en l'air perpendiculairement au plan ASB. A preſent ſi du point f on mene fy parallele à Sm, à cauſe des triangles ſemblables gfy & gSm, on aura $Sm : mg :: fy : yg$, c'eſt-à-dire, que la diſtance Sm du ſommet du cône à l'ordonnée de l'Ellipſe plane, qui en eſt la ſection par AB, ſera à cette ordonnée, comme la diſtance de l'Ellipſe à la ſection ſolide, priſe ſur un plan paſſant par le ſommet du cône, eſt à la difference gy des ordonnées gm, fx de l'Ellipſe plane, & de la ſection ſolide AxB, ce qui eſt ſuivant notre définition 4. * la proprieté de *l'Ellipſoïdimbre*; mais parce qu'on peut trouver autant de points f que l'on voudra, qui donneront toujours une pareille analogie, quoique leur diſtance fy ſoit plus ou moins grande, il ſuit que la courbe eſt une Ellipſoïdimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 79.

COROLLAIRE I.

104. D'où il ſuit que ſi par le point f on mene fx parallele à gm, & qui coupe la ligne Sm au point x, ce point ſera celui de la profondeur de l'axe courbe dans la ſphère au-delà du point m, correſpondant dans la ſection plane AB, & parce que les points m & M, & tout autre pris à volonté, produira ſuivant la même conſtruction differens points f, plus près de y, on aura autant de points x que l'on voudra, ſur differentes lignes Sm ou SM, venant du ſommet S du cône ſur l'axe ſoutendant AB, & par conſéquent donneront la courbure de l'axe AxB.

COROLLAIRE II.

105. IL ſuit encore que lorſque AB eſt le petit axe de l'Ellipſe plane de la ſection du cône, la ſection ſolide s'approchera du côté du ſommet S dans la grande ſection AB, & s'en éloignera dans la petite oppoſée ab, & au contraire, ſi AB eſt le grand axe de l'Ellipſe, comme nous le verrons dans le Theorême ſuivant, qui ſervira d'explication à celui-ci.

THEOREME XIV.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'une Sphère & d'un Cône, qui la pénetre de toute ſa Circonference, & dont l'Axe ne paſſe pas par le Centre de la Sphère, eſt une Ellipſoïdimbre. Si le Cône eſt Scalene elle peut être un Cercle.

Fig. 46. SOIT la ſphère $AabB$ (*Fig.* 46.) pénetrée par le cône DSE, dont l'axe SX ne paſſe pas par le centre C de la ſphère, ſoit auſſi dans les mêmes circonſtances qu'au Theorême précedent la ligne AB, par la-

quelle paſſe le plan perpendiculaire au triangle par l'axe, coupant les deux corps, dans leſquels il fait differentes ſections, ſçavoir une Ellipſe ALB dans le cône, qu'il coupe obliquement, & un cercle AKB dans la ſphère; il ſera clair pour peu qu'on donne d'attention à cette figure, où on a mis les mêmes lettres qu'à la précedente, qu'il s'agit de la même ſection; car ni le cercle de la ſphère, ni l'Ellipſe du cône, qui n'ont que deux points communs A & B, ne peuvent être la rencontre des deux ſurfaces, qu'en ces deux points; par conſéquent la courbe faite par leur interſection, s'écartera de leur plan, & y reviendra aux points A & B par où elle doit paſſer.

Pour reconnoître en quels points de la ſphère entre les deux A & B, cette Courbe doit paſſer, il faut ſuppoſer des plans perpendiculaires à celui qui paſſe par ASB, que nous ne pouvons repréſenter ici qu'en les couchant ſur le même plan, & ſur la ligne droite de leur interſection. Soit, par exemple, un de ces plans paſſant par SI, la moitié de la ſection de ce plan coupant la ſphère, ſera le demi cercle H*u*I, qu'il faut imaginer en l'air, & parce que ſon diametre HI coupe AB en *m*, l'ordonnée *m*P à ce diametre ſera en partie commune à l'ordonnée de l'Ellipſe à l'axe AB; mais elle excedera, parce que le cercle AKB de la ſphère eſt circonſcrit à l'Ellipſe ALB du cône; pour trouver donc où ſe termine cette partie commune, c'eſt-à-dire, la longueur de l'ordonnée de l'Ellipſe, paſſant par le point *m*, on ſçait qu'il n'y a qu'à prendre une moyenne proportionelle entre *dm* & *me*, puiſque *de* eſt le diametre du cercle, fait par la ſection du cône parallelement à ſa baſe, lequel a une ordonnée, commune avec l'Ellipſe de la ſection oblique AB au point *m*.

Soit *mr* l'ordonnée de l'Ellipſe égale à *m*R, la ligne S*r* paſſant par le ſommet du cône, & le point *r* qui eſt à ſa circonference, ſera le côté du cône; mais à cauſe que ce point *r* eſt dans la ſphère, il faut prolonger S*r* juſqu'à ce qu'il rencontre ſon cercle H*u*I au point *y*, lequel ſera commun au cône & à la ſphère, & ſi par ce point *y* on mene *yx* juſqu'à la rencontre de l'interſection des plans perpendiculaires en SI, le point *x* ſera un de ceux de l'axe courbe de la ſection ſolide. Or ſi l'on fait comme dans le Theorême précedent *rg* parallele à SI, à cauſe des triangles ſemblables S*mr*, S*xy*, *rgy*, on aura S*m* : *mr* :: *rg* : *gy*. C'eſt-à-dire, que la diſtance du ſommet du cône à l'ordonnée de l'Ellipſe plane, ſera à cette même ordonnée, comme la diſtance de la ſection ſolide à l'Ellipſe plane, meſurée ſur un plan paſſant par le ſommet S, eſt à la difference des ordonnées de la ſection ſolide, & de la ſection plane du cône; & parce qu'on peut imaginer autant de plans que l'on voudra, perpendiculaires au plan ASB, comme

So, au lieu de Sm, & qu'on aura toujours la même Analogie à l'égard des ordonnées de l'Ellipſe, & de la ſection ſolide, il ſuit par * Art. 79. notre quatriéme définition * qu'elle eſt une Ellipſoïdimbre, *ce qu'il falloit demontrer.*

Pour une plus ample explication, qui pourroit étre un peu difficile aux commençans, nous avons jugé à propos de répeter la fig. 46. *Fig.* 47. en façon de perſpective, au nombre 47. mais dans un ſens different, ce qui fait qu'on ne peut repréſenter les cercles que par des Ellipſes.

Soit APBp le cercle de la ſection plane de la ſphère par la ligne AB, lequel eſt perpendiculaire au triangle par l'axe ESF; ſoit auſſi ARBr l'Ellipſe de la ſection oblique du cône, qui paſſe par les mêmes points A & B; puiſque la ſection ſolide n'eſt pas dans ce plan, elle paſſe par deſſous, comme dans la partie AbyB. Nous n'en avons pas repréſenté davantage pour éviter la confuſion des lignes. Si l'on mene des ordonnées à l'axe AB, comme Pp, Qq, qui coupent l'axe AB en M & o, & que par ces points on mene des lignes du ſommet, comme Sx, Sz, & d'autres par les extremitez des ordonnées de l'Ellipſe, comme SyE, SYF, SVb, SuH; ces lignes qui ſeront des côtez du cône, rencontreront la ſurface de la ſphère en quelque point, comme en y, Y, b & H, par leſquels on menera des paralleles aux ordonnées de l'Ellipſe yY, bH, leſquelles ſeront les ordonnées de la ſection ſolide; enfin ſi par les points r, R, V, u, de l'Ellipſe on mene des paralleles aux lignes Sx, Sz, ſçavoir rt, RT, Vi, uI, on reconnoîtra comme dans la démonſtration précedente, que les triangles yrt, ySx, rSM ſeront ſemblables, de méme que bVi, bSz, VSo; donc SM : Mr :: rt : ty, & SO : OV :: Vi : ib; dont la courbe BybA eſt une portion d'Ellipſoïdimbre, *comme il a été démontré ci-deſſus.*

106. On voit qu'ici les ordonnées de la courbe ſolide excédent celles de l'Ellipſe; le contraire arrive à la ſection oppoſée ab, vers le ſommet, où les ordonnées de la courbe ſont plus petites que celles de l'Ellipſe plane de la propoſition précedente, où l'on a vû le contraire dans l'une & l'autre ſection, comme nous l'avons remarqué; la petiteſſe de la figure ne nous a pas permis de trouver celle qui eſt près du ſommet; mais pour peu d'attention qu'on y donne la choſe eſt claire, & ne mérite pas une plus longue explication; puiſqu'il eſt évident que la ſection ſolide ſera toujours plus grande ou plus petite que l'Ellipſe plane; parce que les côtez du cône étant eſſentiellement convergens, ne peuvent paſſer par l'extremité de deux ordonnées paralleles & égales.

107. Il faut remarquer que l'excès, ou le défaut des ordonnées de

Digitized by Google

la ſection ſolide ſur la ſection plane Elliptique, n'eſt pas proportionel d'une ordonnée à une autre, entre l'axe droit yY, & le point A ou B; mais qu'il augmente à meſure que l'ordonnée approche de l'axe droit yY, & diminuë en tirant vers A ou B; parce que le ſommet du cône S étant commun à tous les triangles formez par la ſection des plans, qui le coupent par ces ordonnées, ces plans ſont inclinez entr'eux; or ſi Mr étoit à xy, comme OV à zb, Sx ſeroit à SM comme Sz ſeroit à SO; donc xz ſeroit parallele à MO, ce qui eſt contre ce que nous avons démontré ci-devant; puiſque l'axe courbe $BxzA$ doit paſſer par A & B, & s'éloigner du plan de la ſection plane paſſant par AB; donc Mr n'eſt pas à ty comme OV eſt à ib; & par conſéquent les ordonnées de l'Ellipſoïdimbre ne ſeront pas en même raiſon entr'elles, que celles de l'Ellipſe, comme dans *l'Ellipſimbre*; d'où vient que nous l'appellons *Ellipſoïdimbre*, c'eſt-à-dire, qui imite ſeulement en quelque choſe l'Ellipſimbre; en effet cette courbe a un rapport eſſentiel avec l'Ellipſe dans les ordonnées, priſes dans la ſection triangulaire d'un plan, qui paſſe par le ſommet du cône & l'ordonnée de l'Ellipſe quelconque, dont l'excès ou le défaut eſt proportionné à l'éloignement des deux ſections meſuré ſur le même plan de la ſection triangulaire, & non pas à la diſtance abſoluë, qui ſeroit priſe ſur deux plans paralleles paſſant par les mêmes ordonnées.

Corollaire I.

108. Il n'eſt pas moins facile dans cette propoſition que dans la précedente, de trouver autant de points que l'on voudra de l'axe courbe de l'Ellipſoïdimbre, ce qui donne un moyen commode d'en faire la projection, comme nous le dirons en ſon lieu; car (*Fig.* 46.) ſi l'on veut avoir les points x & z de l'axe courbe correſpondans aux points m & o ayant mené par ces points des lignes de, bi paralleles à la baſe DE, & par ces mêmes points des lignes Sml, Soq, qui couperont le cercle majeur de la ſphère en H & I, q & Q, on décrira ſur ces lignes, comme diametres, des demi-cercles, comme HuI, auquel on menera par le point m, mP perpendiculaire à HI, enſuite ayant pris ſur mP la longueur mr égale à la moyenne proportionelle entre dm & me; du ſommet S on menera par le point trouvé r la ligne Sry, qui coupera le demi cercle HuI au point y, par lequel menant yx parallele à mP, le point x où elle coupera la ligne SI, ſera celui que l'on cherche; car le cercle HuI eſt une ſection de la ſphère par un plan, qui paſſe par le ſommet S, & le point r, qui eſt à la circonference de l'Ellipſe de la ſection oblique du cône, donne le côté du cône Sy, qui coupe le cercle en y; donc ce point eſt commun aux deux ſurfaces; & parce que ce plan eſt perpendiculaire à celui qui paſſe par *Fig.* 46.

ASB, lequel eſt auſſi perpendiculaire à celui qui paſſe par AB, l'interſection de ces trois plans ſera une ligne perpendiculaire au plan Smx, ſur lequel doit être meſurée la diſtance du point m au point x par une parallele à l'ordonnée de l'Ellipſe plane, & qui paſſe par le point y; donc x eſt un point de l'axe courbe, correſpondant au point m, *ce qu'il falloit trouver.*

109. Si l'on veut trouver cette diſtance par une Analogie, connoiſſant la diſtance du ſommet à l'Ellipſe ſur le côté du cône, en diviſant le rectangle Prp par rb, on aura ry; parce que la proprieté du cercle P$r \times rp = br \times ry$; & alors à cauſe des triangles ſemblables Smr & rty ou (*Fig.* 46.) rgy on aura $Sr : ry :: Sm : rt$ ou rg.. *Fig.* 47.

COROLLAIRE II.

110. Il faut remarquer que l'axe du cône ne paſſe pas ordinairement par le centre de l'Ellipſoïdimbre, parce qu'il ne paſſe pas par celui de l'Ellipſe plane; car l'axe du cône SX diviſe en deux également l'angle du ſommet DSE du triangle par l'axe; donc, par la huitiéme du ſixiéme d'Euclide, AS : AB :: AO : OB; or AS eſt plus petit que SB; donc AO eſt plus petit que OB; mais le centre de l'Ellipſoïdimbre doit ſe trouver au point correſpondant à G, milieu de AB, dans une ligne menée du point S par G, donc le point z, où l'axe du cône coupe l'axe courbe de l'Ellipſoïdimbre, n'eſt pas le centre de cette courbe, *ce qu'il falloit démontrer.*

111. Nous avons excepté dans l'énoncé de ce Theorême, touchant la pénetration du cône dans le ſphère, le cas qui peut arriver, ſi le cône eſt ſcalene, lorſque la ſection plane faite par la ligne ab (*Fig.* 48.) eſt ſouſcontraire; parce qu'alors étant un cercle dans le cône comme dans la ſphère, elle peut être commune à la ſurface des deux corps, non ſeulement dans une ſection comme ab, mais encore dans ſon oppoſée ef, c'eſt-à-dire, dans l'immerſion & dans l'émerſion du cône dans la ſphère, ſans que l'axe de l'un paſſe par le centre de l'autre; car puiſque le rectangle $fs \times bs = es \times as$, $es : sf :: sb : sa$, & ſi l'on mene fh parallele à ba, les triangles fsh, fse ſeront ſemblables, & l'on aura $bs : sa :: fs : sh :: es : sf$; donc les angles sfh, sef ſeront égaux, c'eſt-à-dire, que la ſection ef ſera ſouſcontraire de la ſection ab, *ce qu'il falloit démontrer.* *Fig.* 48.

COROLLAIRE III.

112. Plus le côté sf s'éloigne du centre C, & plus les ſections oppoſées $a b$ & ef ſe rapprocheront, de ſorte que s'il devient tangent à la

Digitized by Google

ſphère, comme s'il paſſoit par le point T, les ſections a T & T*e* ſe toucheront en ce point T; & ſi le côté SK eſt hors de la ſphère, alors il ſe formera une ſection compoſée de deux Courbes, qui ne ſeront plus des arcs de Cercles; parce qu'ils ne pourront être communs à la ſphère & au cône, qui eſt en partie dehors; mais de deux portions d'Ellipſoïdimbre, comme nous l'allons expliquer ci-après.

Application à l'Uſage.

113. Ces deux Theorèmes font voir quelle eſt la Courbe de l'enfourchement d'une trompe ou lunette Ebraſée, ou voute en canoniere, qui rachete une voute ſphérique de biais, ſoit parce que la direction de leur milieu ne tend pas au centre de la voute ſphérique, ſoit que, lorſqu'elle y tend, elle ſoit ſurhauſſée ou ſurbaiſſée dans ſon ceintre primitif, qui tient lieu d'arc-droit.

THEOREME XV.

La Section faite par la rencontre des ſurfaces de la Sphère & d'un Cône, dont l'Axe ne paſſe pas par le Centre de cette Sphère, & qui ne la pénetre pas de toute ſa Circonference, eſt une Courbe compoſée de deux portions d'Ellipſoïdimbre, ou d'autres Courbes de même nature, appartenant au Cercle, à la Parabole ou à l'Hyperbole.

Soit la ſphère a T*e* (*Fig.* 49.) pénetrée par le cône SGL, en partie ſeulement, enſorte que le côté SG ſoit hors de la ſphère. Soit menée du point S une tangente ST, qui touche le cercle majeur a T*e* au point T; ſi l'on ſuppoſe les deux points a & *e* communs aux ſurfaces des deux corps, & des lignes a T*b*, *e* T*f* menées de ces points à celui d'attouchement T, qu'on peut conſiderer comme les ſections de deux plans perpendiculaires au plan du triangle par l'axe, paſſant par le centre de la ſphère, les parties de ces lignes qui ſont dans la ſphère, comme aT, *e*T, ſeront les diametres des cercles des ſections de la ſphère, & les lignes *e f*, a*b* ſeront les grands axes des Ellipſes faites par les ſections obliques du cône; or ces cercles & ces Ellipſes n'ont rien de commun que les points a & *e*, donc ni les unes ni les autres de ces figures ne peuvent être les ſections communes aux ſurfaces de ces corps; donc les ſections ſolides ne ſeront pas dans leurs plans *ef* & a*b*, & ne pourront avoir deux points communs avec chaque ſection plane; puiſque les points *f* & *b* ſont hors de la ſphère, & les parties de l'Ellipſe, qui ſe croiſent au point T, & qui ſont hors de la ſphère, ſont mutilées par le plan qui paſſeroit par la tangente T, perpendiculairement au plan a T*e*, lequel en retranche les parties T*f* & T*b*, & la jonction de ces

Fig. 49.

plans a pour interſection l'ordonnée commune, qui paſſe par le point T; mais comme ces Ellipſes ne ſont pas communes aux ſurfaces des deux corps, donc la ſection eſt une Ellipſoïdimbre par le Theoréme précedent, il ſuit qu'on aura deux portions de cette eſpece de Courbe, correſpondantes aux deux portions d'Ellipſe, ce que nous appellons une *Ellipſoïdimbre compoſée.*

114. Il faut remarquer que puiſque les ſections ſolides s'écartent des plans des ſections planes, l'ordonnée commune aux deux portions d'Ellipſoïdimbre, ne ſera pas au point T, mais en quelqu'autre comme *x*; parce que l'une *edf* paſſe au deſſus de *fe*, & l'autre *agb* paſſe au deſſous de *ab*, comme nous l'avons dit des cas où la ſection Elliptique du cône eſt au dehors de la ſection circulaire de la ſphère.

COROLLAIRE I.

115. D'ou il ſuit que l'Ellipſoïdimbre compoſée ſera toujours un angle d'inflexion; non pas à ſon milieu comme l'Ellipſimbre compoſée, mais plus près d'un des points communs a ou *e* que de l'autre; parce que les ſections oppoſées étant eſſentiellement inégales à cauſe de la diminution du cône vers ſon ſommet, la partie de la Courbe qui en eſt plus près, comme *ax*, ſera plus petite que celle qui eſt vers la baſe, comme *ex*, ainſi qu'il eſt repréſenté dans la figure 49. par les courbes *ei*X & X*ba*. *Fig.* 49.

Secondement, que cette inflexion ſera un angle ſaillant, ſi les ſections oppoſées ſe croiſent au-delà du centre de la ſphère, & un angle rentrant, ſi elles ſe croiſent en-deça, comme nous l'avons dit des Ellipſimbres compoſées; de ſorte que ſi la tangente SH étoit le côté du cône, l'angle d'inflexion ſeroit le plus ſaillant & le plus aigu qu'il puiſſe être, puiſque les axes ne peuvent ſe croiſer plus loin des points a & *e*, & cet angle diminuëra à meſure que le point *x* ſe rapprochera de la ligne a *e*.

Nous donnerons dans la ſuite la maniere de tracer cette Courbe compoſée, ſoit par la projection ſur un plan, comme nous l'avons déja indiquée par celle de tracer l'Ellipſimbre compoſée, ſoit en effet dans ſon contour naturel ſur un cône ou ſur une ſphère.

COROLLAIRE II.

116. Quoique nous ayons parlé dans cette propoſition de la ſection qui produit l'Ellipſoïdimbre, nous n'avons pas prétendu qu'il n'en puiſſe arriver d'autres cas, où elle ne produit pas la méme figure. Le cône en

Digitized by Google

ne en effet peut être ſitué de bien des façons à l'égard de la ſphère, qu'il ne pénetre qu'en partie, ce que l'on pourra connoître par la combinaiſon des differentes ſituations des côtez de ſon triangle par l'axe, & de l'inclinaiſon des axes des ſections planes, qu'on ſuppoſe toujours paſſer par les points communs aux côtez de ce triangle, & aux cercles majeurs de la ſphère, coupée par le même plan, qui forme le triangle par l'axe du cône, & enfin par le point d'attouchement de la ligne menée du ſommet du cône tangente au cercle majeur de la ſphère.

117. Premierement, puiſqu'un des côtez du cône doit couper la ſphère en deux points, & que ſa baſe, où un ſecond plan paſſant par un point commun aux deux ſurfaces, & par le point d'attouchement d'une ligne menée du ſommet, doit couper les côtez du cône, il ſuit que dans toutes ces ſections compoſées de portions de Courbes, il y en aura toujours une rélative au cercle ou à l'Ellipſe ; mais parce qu'un des deux plans, que nous ſuppoſons comme l'origine de ces ſections, peut être ſitué de maniere qu'il ne coupe le cône que d'un côté, la ſection qui en réſultera appartiendra à la parabole ou à l'hyperbole, & ſera une courbe, à laquelle nous pouvons donner le nom de Paraboloïdimbre ou d'Hyperboloïdimbre, c'eſt-à-dire, que dans toutes ces ſections, il ſera toujours vrai que les ordonnées à leur axe courbe, qui eſt dans le plan de l'axe droit de la ſection plane & du ſommet du cône, auront un excès ou un défaut ſur les ordonnées de la ſection plane correſpondantes, rélativement à leur diſtance dans un plan paſſant par le ſommet du cône & par les deux ordonnées ; de ſorte que connoiſſant cette diſtance on pourra toujours connoître la difference des ordonnées de la ſection plane & de la ſolide par cette analogie, comme la diſtance du ſommet du cône à l'ordonnée de la ſection plane :

Est à la longueur de la même ordonnée ;

Ainsi la profondeur ou diſtance de l'ordonnée de la ſection ſolide à celle de la plane, priſe dans un plan paſſant par le ſommet du cône :

Est à la difference des deux ordonnées, c'eſt-à-dire, à l'excès ou au défaut de l'ordonnée de la ſection plane.

Il eſt clair que par le moyen de cette difference, ajoutée à l'ordonnée de la ſection plane, connuë par les ſections coniques, ou retranchée de cette ordonnée, on aura un point du contour de la ſection ſolide, telle qu'elle puiſſe être, Ellipſoïdimbre, Paraboloïdimbre, ou Hyperboloïdimbre.

Nous avons repréſenté dans les cinq figures ſuivantes les differentes combinaiſons de ces ſections compoſées.

Fig. 50. Dans la 1.re figure où les points a & *e* ſont communs à la ſphère & au cône, & le point T celui d'attouchement de la tangente menée du ſommet S du cône au cercle majeur de la ſphère *e*aT; le plan *Fig.* 51. paſſant par *e*T perpendiculairement à la tangente ST, fait pour ſection un cercle dans la ſphère & un dans le cône, dont *ef* eſt le diametre, & l'autre plan paſſant par les points a & T fait une Ellipſe dans le cône, dont le grand axe eſt a*b*.

Fig. 54. Dans la figure 2.e le plan paſſant par les points *e* & T fait un cercle dans le cône, dont EF eſt le diametre, & l'autre plan paſſant par A & T fait une parabole dans le cône; parce que A*b* eſt ſuppoſé parallele à SG.

Fig. 50. Dans la figure 3.e le plan *e*T fait une Ellipſe dans le cône, dont le grand axe eſt *ef*, & le plan aT fait une parabole, dont l'axe eſt a*b*.

Fig. 52. Dans la figure 4.e le plan ET fait un cercle dans le cône, dont le diametre eſt EF, & le plan aT, qui rencontre le côté du cône SF, prolongé vers *z*, fait une hyperbole, dont a*z* eſt l'axe déterminé, & le point a ſon ſommet.

Fig. 53. Dans la figure 5.e le plan ET, qui coupe les deux côtez du cône SE & S*f* fait une Ellipſe, dont E*f* eſt le grand axe, & le plan AT, qui rencontre le côté *f*S, prolongé en *y*, fait une hyperbole, dont l'axe déterminé eſt A*y*, ſuppoſant toujours la ligne ST tangente au cercle majeur de la ſphère EAT.

Application à l'uſage.

118. Ce Theorême ne paroît pas d'une grande utilité pour la pratique; on ne l'a mis ici que pour la perfection de la doctrine, il ſert ſeulement à faire connoître quelle ſeroit la courbe de l'arête d'enfourchement d'une Trompe ou voute en canoniere, qui rachéteroit par le côté une voute ſphérique, ce qui ne pourroit arriver que dans une conſtruction bizarre.

Digitized by Google

CHAPITRE VI.

Des Sections faites par la pénetration des Cylindres entr'eux & avec les Cônes.

THEOREME XVI.

La Section faite par la pénetration des Cylindres de même nature, égaux ou inégaux, dont les Axes ſont égaux en longueur, & paralleles entr'eux, eſt un Parallelograme.

LA démonſtration de cette propoſition eſt trop facile pour s'y arrêter; car puiſque la ſection d'un cylindre, faite par un plan paſſant parallelement à ſon axe, eſt un parallelograme (*Fig.* 55.) ceux qui paſſeront par des cordes égales de leurs baſes & dans une même longueur, ſeront égaux; or on voit que la ligne A B, qui joint les points A & B de l'interſection des cercles des deux baſes, eſt une corde commune aux deux cercles, donc le parallelograme, qui aura pour côtez cette corde & une égale longueur d'axe, ſera commun aux deux cylindres. *Fig.* 55.

Application à l'uſage.

119. CETTE propoſition fait voir pourquoi les voutes Gotiques, qu'on appelle en *Tiers-point*, font un angle rentrant à la Clef, qui ſe continuë en ligne droite, comme une diviſion marquée entre les deux côtez, & les pendentifs de celles qui ſe croiſent, parce que leurs Ceintres ſont compoſez de deux arcs de cercle C A, A*c*, qui ſont les parties des baſes de deux cylindres, dont les axes ſont autant éloignez que les centres C & *c* de ces arcs, qui le ſont ordinairement de la longueur de leur rayon CA; ainſi la rencontre A D de [illegible] portions de cylindre eſt un des côtez du parallograme de leur interſection totale s'ils étoient entiers. *Fig.* 55.

DANS l'Appareil des angles des murs on trouve auſſi fréquemment des cylindres qui ſe pénetrent dans la même circonſtance, comme on en voit à l'ancien Temple de la Galluce, & à l'Egliſe de la *Sapience* à Rome, dont les plans ſont des arcs de cercle inſcrits dans un Cercle entier, de ſorte que les murs ſont des portions de cylindre, qui ſe croiſent parallelement à leurs axes; mais cet Appareil n'a point de difficulté.

THEOREME XVII.

La Section faite par la rencontre des Surfaces de deux Cylindres égaux ou inégaux, dont les Axes ſe coupent perpendiculairement ou obliquement, & qui ont un Diametre égal & ſemblablement poſé ſur un Plan paſſant par leurs Axes, eſt une Ellipſe ; & ſi l'un des Cylindres eſt Droit & l'autre Scalene, ou tous les deux Scalenes & de Baſes égales, elle peut être un cercle.

Fig. 56. *Premierement.* SOIENT deux cylindres AF, FD(*Fig.* 56.) égaux, entr'eux la diagonale menée par la rencontre de leurs côtez eſt également inclinée ſur les uns comme ſur les autres ; donc le plan paſſant par cette diagonale, & perpendiculairement à celui qui paſſe par leurs axes, coupera les deux cylindres d'une obliquité égale ; par conſéquent fera une Ellipſe commune à tous les deux.

Secondement. SI les deux cylindres ſont inégaux, comme KE & EN, *Fig.* W. & 57. (*Fig.* W. & 57.) ou il y en aura un droit qt, & un ſcalene, ou ils ſeront tous deux ſcalenes, comme KE : EN (*Fig.* W.) dans ce cas il eſt clair que la diagonale BE, menée par la rencontre de leurs côtez KB, LE & BN, ME peut être le diametre du cercle de la baſe d'un cylindre ſcalene, & par conſéquent de l'autre, qui a ce cercle auſſi pour baſe, ſoit qu'il ſoit droit comme qt, ou ſcalene comme KE, de ſorte qu'il peut être commun aux deux cylindres qui ſe rencontrent.

Troiſiémement. SI la rencontre des cylindres inégaux ne ſe fait pas à *Fig.* W. leur baſe, il eſt évident que le plan paſſant par la diagonale BE, (*Fig.* W.) menée par les angles de rencontre de leurs côtez KB, LE & BN, EM, & perpendiculairement au plan paſſant par les axes ac & CP ſera une Ellipſe égale dans chaque cylindre, car l'axe BE de l'Ellipſe eſt commun aux deux, & l'axe conjugué $\varkappa$X eſt ſuppoſé auſſi égal & ſemblablement poſé ; donc la ſection ſera une Ellipſe commune aux deux cylindres ; puiſqu'elle eſt équivalante à deux égales, *ce qu'il falloit démontrer.*

IL en ſera de même des ſections des cylindres inégaux, ayant un diametre égal, lorſqu'au lieu de ſe rencontrer ſimplement par leur *Fig.* 58. extrémité, ils ſe croiſent comme à la figure 58. & ſe pénetrent réciproquement ; car la ſection EB ſera commune aux quatre cylindres LEBK, gEBf, bBEi, nBEm, & la ſection AD ſera commune aux quatre cylindres bDAi, LDAk & fADg, mADn, qui aboutiſſent les uns aux autres, comme dans le cas précedent ; donc BE & AD ſont deux Ellipſes. Mais ſi les cylindres ſont inégaux, & qu'ils n'ayent pas un diametre égal & ſemblablement poſé, leur ſection commune ne ſera plus une figure plane, comme nous le démontrerons au Theoréme ſuivant.

Digitized by Google

Application à l'uſage.

121. Cette propoſition eſt des plus néceſſaires pour la connoiſſance des courbes des *Enfourchemens* des voutes les plus uſuelles, qui ſont les Berceaux; elle fait voir que lorſqu'ils ſont de même hauteur, quelle que puiſſe être leur largeur, leur ceintre d'enfourchement, eſt toujours une Ellipſe, ſoit qu'ils aboutiſſent l'un à l'autre, perpendiculairement ou obliquement, & alors l'angle de leur rencontre eſt moitié rentrant vers l'angle ſaillant de leurs côtez, comme depuis C en B, ce que l'on appelle alors partie de voute en *Arc de Cloitre*, & moitié ſaillant vers l'angle rentrant des côtez, comme de C en E, ce qu'on appelle partie de *Voute d'Arête.* Soit que les deux berceaux ſe croiſent, & alors ils ſont tous ſaillans, & font ce que l'on appelle proprement *Voute d'Arête.* *Fig.* W. *Fig.* 58.

Cette obſervation eſt néceſſaire pour faire connoître la fauſſeté du Trait du ceintre ſurhauſſé des voutes d'arêtes, Berlongues dans le Livre de la Coupe des Bois du Sr. Blanchard, qu'il fait en Tiers-point non ſeulement dans la figure de la planche 17. mais encore dans le diſcours, car il dit *Page* 68. *que leurs élevations . . . tendent au centre ſuppoſé* 18. *de ſa Planche* 27.

THEOREME XVIII.

La Section faite par la rencontre des Surfaces de deux Cylindres Droits inégaux, dont les Axes ſe coupent perpendiculairement, eſt un Cicloïmbre.

Soit le cylindre ABED, dont l'axe FG eſt perpendiculaire à l'axe CO d'un autre cylindre plus petit HILK, & dont la baſe eſt le cercle HMIN, ayant ſuppoſé un plan qui paſſe par les deux axes, ſi l'on en ſuppoſe d'autres qui lui ſoient perpendiculaires & à l'axe FG, ces plans qui ſeront paralleles entr'eux feront deux ſections differentes chacun, ſçavoir un parallelograme MNQR, dans le cylindre ſuperieur HILK, qu'ils couperont par l'axe, ou parallelement à ſon axe, & un cercle QSRT dans le cylindre inférieur ABED, qu'ils couperont perpendiculairement à ſon axe, leſquelles deux ſections ſe rencontreront en deux points oppoſez RQ, *rq*, qui ſeront par conſéquent communs à la ſurface des deux cylindres, & à la circonference de la Courbe, qui eſt formée par l'interſection des deux ſurfaces, auſſi bien que les points K & L, qui ſont à l'interſection des deux parallelogrames, formez par la ſection du premier plan, paſſant par les deux axes des cylindres; de ſorte que cette courbe paſſera néceſſairement par les points KR*r*L d'un côté, & KQ*q*L de l'autre, & ſi l'on joint les points oppoſez par des lignes QR, *qr*, ces lignes ſeront perpendiculaires au plan paſſant par les deux axes des cylindres, qui les coupe en deux également *Fig.* 59.

Digitized by Google

aux points P & *p*, par où paſſe l'axe courbe de la ſection ſolide KP*p*L; or il eſt aiſé de voir que ces ordonnées ſont paralleles & égales à celles de la baſe du cylindre MN, *mn*; puiſque cette baſe HMIN eſt perpendiculaire au plan paſſant par les axes, auſſi bien que QR & *qr*, qu'elles ſont entre mêmes paralleles QM, RN, ou *qm*, *rn* qui ſont les côtez du cylindre, étant dans le même plan MR, ou *mr* paſſant par l'axe OP, ou parallelement à cet axe, & s'il reſtoit quelque doute ſur l'égalité des côtez MQ, NR; pour établir le paralleliſme de MN & QR, il n'y a qu'à ſe rappeller l'article 39. où l'on a fait voir que MN étant parallele à la tangente du cercle QSR par S, & les points M & N étant également éloignez du point O, qui eſt dans le diametre TS prolongé, les paralleles à ce diametre MQ & NR, terminées à la circonference du cercle, ſeront égales entr'elles; donc les ordonnées QR & *qr* ſont égales aux correſpondantes de la baſe du cylindre dans les mêmes plans MN & *mn*. On prouvera la même choſe de toutes les ordonnées poſſibles. Donc la ſection creuſe KLRQ eſt celle que nous avons appellée un *Cicloïmbre*, par la premiere définition, *ce qu'il falloit démontrer.*

Art. 39.

Art. 75.

Il n'eſt pas néceſſaire d'ajouter que les ordonnées de cette ſection ſolide ne ſont pas dans un même plan, puiſqu'il eſt évident qu'elles s'éloignent de celui qui paſſeroit par l'axe ſouſtendant KL, à meſure qu'elles s'éloignent de ces deux points, juſqu'au milieu QR, qui répond au diametre MN, perpendiculaire au plan paſſant par les axes des cylindres; or il eſt aiſé de faire voir dans quelle raiſon elles s'éloignent ou ſe rapprochent de l'axe ſouſtendant KL; car puiſque toutes les ſections faites dans le cylindre AE, par les plans paſſans par les ordonnées de la baſe HMIN au diametre HI, parallelement à l'axe OP, ſont des cercles égaux à celui de la baſe AD; il ſuit que les ordonnées de la ſection ſolide, qui ſont égales à celle de la baſe HMIN, ſont autant de cordes inſcrites dans un cercle égal à la baſe du cylindre AE, qu'on a mis en ſuite en a*d* par les lignes ponctuées P P', *pp*' *p*' ; de ſorte que la profondeur de ces cordes dans le cercle eſt meſurée par la longueur de leurs fléches a P', a*p*' égales à SP, *sp*, qui font voir de combien la Courbe s'éloigne du plan, qui paſſeroit par l'axe KL ſouſtendant de l'axe courbe KP*p*L, à meſure qu'elle approche du milieu de ces deux points communs KL; de ſorte qu'elles augmentent continuellement en longueur dans la raiſon de celle des ordonnées de la baſe HMIN, & de profondeur dans le rapport des fléches des doubles ordonnées, inſcrites dans la baſe du cylindre AE; ou ſi l'on veut prendre les ordonnées pour des ſinus droits, leur profondeur ſera meſurée par les ſinus verſes, ce qui montre évidemment que toutes les doubles ordonnées priſes enſemble forment une ſurface courbe, en façon de tuile creuſe, plus ou moins

Digitized by Google

profonde ſelon la grandeur rélative des deux cylindres, qui ſe pénetrent perpendiculairement; de ſorte que s'ils ſont égaux la ſection eſt la plus profonde qu'elle peut être; parce qu'alors la plus grande ordonnée du milieu, que nous appellons l'axe droit, paſſera par l'axe du cylindre AE, c'eſt-à-dire, par le centre C^2 du cercle aR^2dQ^2, & alors la ſection change de nature, & devient plane comme au Theorême précedent, ſe diviſant en deux parties, qui ſont un angle rentrant KCL.

122. Il reſte à démontrer que tous les diametres de cette ſection ſolide ſon égaux, c'eſt-à-dire, toutes les lignes, qui, paſſant par l'axe de profondeur SP, ſont terminées à la circonference de la courbe. Premierement il eſt clair que l'axe ſouſtendant KL = HI eſt auſſi égal à l'axe droit QR = MN = HI; puiſque ce ſont les diametres du même cercle HMIN. Il en ſera de même des diametres W V & Uu, qui ſeront entre mêmes paralleles WU & Vu, & d'une égale profondeur au deſſous de KL, mais tous hors de la ſurface creuſe, formée par les ordonnées, qui forment la circonference de la ſection; car ils coupent l'axe SP au deſſus du centre P, par exemple, en x. Donc par la définition premiere la ſection ſera un Cicloïmbre, *ce qu'il falloit démontrer.* Art. 75.

Corollaire I.

123. Non ſeulement les ordonnées au plan paſſant par KPL, dans lequel eſt l'axe courbe, ſont égales aux correſpondantes ordonnées au diametre HI, mais encore celles qui ſeroient perpendiculaires au plan paſſant par QSR, dans lequel eſt l'axe droit, ſeroient égales aux paralleles à l'axe HI, correſpondantes dans un plan parallele à l'axe OP, leſquelles renfermeroient une portion cylindrique, terminée par la courbe KRLQ.

Lorsque nous avons dit que tous les diametres du cicloïmbre ſont égaux, nous n'avons entendu parler que des lignes droites, menées d'un point de la courbe à ſon oppoſé en paſſant par l'axe de profondeur SP; car ſi l'on voùloit appeller diametres les lignes courbes, qui paſſent à la ſurface du cylindre par le point S, & les points oppoſez de la circonference du cicloïmbre, on s'apperçoit bien que de tels diametres ſeroient tous inégaux en longueur & en courbure, le plus grand eſt l'arc de cercle QSR, dont l'axe droit QR eſt la courbe, & les autres ſeroient des portions d'Ellipſe, toujours moins concaves à meſure qu'elles s'éloigneroient de cet arc de cercle, & qu'elles approcheroient de l'axe ſouſtendant KL, où l'arc Elliptique ſe change en ligne droite, dans la ſuppoſition qu'elles paſſent toutes par le milieu S; & parce que tous ces arcs inégalement courbes, auroient pour corde des

diametres droits, égaux entr'eux; il ſuit que ces courbes ſeroient toutes inégales en longueur dévelopée, c'eſt-à-dire, rectifiée.

Corollaire II.

124. D'ou il ſuit que le cicloïmbre, conſideré comme une portion de la ſurface du cylindre, étenduë en ſurface plane, ſeroit une Ovale, dont le grand axe ſeroit QSR, & le petit KL.

Corollaire III.

125. Il ſuit encore que plus le cylindre HL ſera petit à l'égard du cylindre AE, moins la ſection ſolide ſera creuſe; & au contraire, plus le cylindre HL ſera grand à l'égard du cylindre AE, plus elle ſera creuſe, ſoit qu'on la conſidere comme portion de la ſurface du cylindre, ou comme une autre ſurface formée par une ſuite d'ordonnées à l'axe courbe KPL; de ſorte qu'en cas d'égalité, comme nous l'avons dit, la ſection ſolide devient égale à deux moitiez de ſections planes Elliptiques, qui ſe rencontrent au diametre paſſant par l'axe FG; parce qu'alors les côtez MQ, NR du cylindre HL deviennent tangens au cylindre AE, & par conſéquent ne le coupent qu'en un point chacun, qui eſt à l'extremité du diametre du cylindre AE; de ſorte que la profondeur ſera SC, qui ne peut être plus grande; parce qu'au cas que le cylindre HL divienne encore plus grand, ce ne ſera plus lui qui pénetrera, mais qui ſera pénetré par le cylindre AE.

On remarque bien auſſi que dans le cas d'égalité des cylindres, les plans des demi-Ellipſes, qui ſe rencontrent en C, ſe coupent à angle droit; puiſque les rayons KS, SL & SC ſont égaux, les angles imaginez en KCS & LCS ſont de 45. degrez; donc KCL ſera de 90. c'eſt-à-dire Droit.

Corollaire IV.

126. De ce que nous avons dit que la profondeur du cicloïmbre dans le cylindre, étoit meſurée par les fléches des cordes égales aux ordonnées à ſon axe courbe, inſcrites dans la baſe du cylindre, on tire une maniere fort aiſée de trouver autant de points que l'on voudra de ſon axe courbe; car ayant fait un cercle a R d Q, & lui ayant mené par le point a une tangente *t* a T, perpendiculaire au diametre a *d*, on portera ſur cette tangente les ordonnées PR, & *pr* en aT & a*z*, & par les points T & *z* on menera TR', *zr'* paralleles au diametre a*d*, qui couperont la circonference du cercle aux points R' *r'*, par où menant

nant des paralleles à la tangente aT, on aura ſur le diametre a*d*, qu'elles couperont, les fléches aP^2, ap^2, qui ſont les profondeurs des points de l'axe courbe, correſpondans aux ordonnées M N, *mn* de la baſe du cylindre HL, égales à celles du cicloïmbre.

Si l'on vouloit trouver ces profondeurs par le calcul, on ſe ſervira de la même méthode qu'on a donnée ci-devant au Theorême IX. pour trouver celle de l'Ellipſimbre, avec cette difference qu'elle eſt plus aiſée dans celui-ci, parce que toutes les ordonnées s'inſcrivent dans un même cercle, & que pour l'Ellipſimbre de ce Theorême elles devoient toutes être inſcrites dans des cercles inégaux.

Il eſt inutile de faire remarquer que les cicloïmbres oppoſez ſont égaux dans l'immerſion d'un cylindre dans un autre, comme dans ſon émerſion ; cette vérité ſe fait ſentir par le paralleliſme des côtez de l'un & de l'autre de ces ſolides.

Application à l'uſage.

129. Rien n'eſt plus ordinaire dans les voutes que la Courbe dont nous parlons, on voit preſque par-tout les berceaux en plein ceintre, percez de Lunettes droites, auſſi en plein ceintre, dont les impoſtes ſont à même hauteur que la naiſſance de la voute, comme ſeroient celles de la nef du Val de Grace, ſi les vitraux étoient parfaitement en demi cercle. On connoît donc par cette propoſition, que la courbe de l'arête de leur enfourchement eſt un *Cicloïmbre*. Cette courbe n'eſt pas moins commune dans l'Architecture militaire ; car les ſoupiraux circulaires des ſouterrains en berceaux de niveau & en plein ceintre, & poſez à plomb ſur la clef, ſont des cylindres qui en pénetrent d'autres perpendiculairement ſur leur axe, tels ſont encore les puis des citernes, poſez au milieu des voutes, comme à Phalsbourg.

THEOREME XIX.

La Section faite par la rencontre des Surfaces de deux Cylindres inégaux, dont les Axes ſe coupent obliquement, & qui ſe pénetrent de ſorte, que l'un entre dans l'autre de toute ſa circonference, eſt une Ellipſimbre.

La démonſtration de cette propoſition eſt ſi ſemblable à celle de la précedente, qu'on peut l'appercevoir à la ſeule inſpection de la figure 60. Soit a*b e d* un cylindre droit, dont l'axe eſt *fg*, pénetré par un autre cylindre *b i k l* plus petit, c'eſt-à-dire, d'un moindre diametre, dont l'axe xX, coupe l'axe *fg* obliquement en C. Ayant ſuppoſé comme dans la propoſition précedente un plan qui paſſe par les axes de *Fig.* 60.

ces lignes, il fera pour ſection deux parallelogrames, dont les interſections des côtez, qui ſe couperont en K, L, V*u* donneront les points K & L, communs aux deux ſurfaces. Si l'on ſuppoſe d'autres plans perpendiculaires à celui-ci, qui paſſent par l'axe *x*X, ou parallelement à cet axe comme *my*; ces plans feront deux ſections differentes, ſçavoir un parallelograme MY ou *my*, dans le cylindre *bl*, & une Ellipſe SRT, ou *srt* dans le cylindre a*d*, dont les interſections R & *r* ſeront communes à la ſurface des deux cylindres, ce qui eſt évident. Si enfin l'on ſuppoſe un autre plan, auſſi perpendiculaire au premier, mais paſſant par KL, ou parallelement à a*b* par *b*l, ce plan fera pour ſection dans le cylindre *b*L une Ellipſe *b*MIN, dont toutes les ordonnées à l'axe *b*I comme NO, *no* ſeront égales à toutes les ordonnées RP, *rp* de la ſection ſolide, par les mêmes raiſons, que nous avons expliquées fort au long dans la propoſition précedente; car la ligne MN étant (par la ſuppoſition) perpendiculaire à OC, puiſqu'elle eſt l'interſection de deux plans *b*NI, ONYX perpendiculaires à un troiſiéme *b*ILK, elle ſera parallele à la tangente, qui paſſeroit par le point S; donc NR & MQ, qui ſont paralleles, étant les côtez du cylindre, & également éloignées du diametre de l'Ellipſe SRT prolongé en O, couperont cette Ellipſe à des diſtances égales de N & M; donc RQ ſera parallele à NM, elle lui ſera auſſi égale, puiſqu'elle eſt entre mêmes paralleles NY, MZ. On démontre la même choſe de l'ordonnée *rq*, donc toutes les ordonnées à l'axe courbe KPL, de la ſection paſſant par KRrL, ſont égales à celles de l'Ellipſe plane *b*MIN, correſpondantes dans des plans paralleles entr'eux, & à l'axe *x*X du cylindre *bl*; or toutes ces ordonnées PR, *pr* ne ſont pas dans un même plan, puiſqu'elles s'écartent & ſe raprochent de l'axe ſouſtendant KL, auquel elles viennent ſe terminer à rien aux points K & L; donc leur ſomme forme une ſurface creuſe, comme celle du Theorême IX. dont le contour eſt une *Ellipſoïde* ſuivant notre définition, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

128. ON doit tirer les mêmes conſéquences de ce Theorême que du précedent. 1.° Que plus le cylindre *bi*LK ſera grand par rapport au cylindre a*bde*, la ſection KRLQ, ſera plus profonde; de ſorte que ſi les deux cylindres deviennent égaux, elle changera de nature, de ſection ſolide qu'elle étoit, elle deviendra une ſection plane, compoſée de deux Ellipſes, qui ſe rencontrent au diametre du cylindre a*d* paſſant par l'axe *fg*, au point C & perpendiculairement au plan a*d*, ou ſera l'interſection des plans des deux demi-Ellipſes, ce qui retombe dans le cas du Theorême XVII. & de la figure 58. où deux cylindres

Digitized by Google

inégaux ont un diametre commun ou ſemblablement poſé, à l'égard du plan paſſant par les axes des cylindres.

Et au contraire plus le cylindre *bl* ſera petit à l'égard de l'autre a*d*, moins la ſection ſera profonde; car puiſque les profondeurs de l'axe courbe ſont déterminées par les fléches, dont les ordonnées de la ſection ſont les cordes inſcrites dans une commune Ellipſe, qui a pour grand axe la ſection oblique S T, plus les ordonnées ſeront petites, moins elles entreront dans l'Ellipſe, où les plus petites cordes ſont toujours les plus éloignées du centre, de même qu'on l'a dit du Cercle.

Corollaire II.

129. Nous remarquerons auſſi comme au Theorême X. que la plus grande profondeur de l'Ellipſimbre n'eſt pas au milieu des points K & L; parce que l'axe droit correſpondant au petit axe MN de l'Ellipſe *b*MIN eſt plus près de L que de K, l'angle KSP étant plus grand que l'angle LSP, d'où il ſuit que les ordonnées à l'axe courbe KPL, qui ſont en nombre égal à celles de l'Ellipſe plane *b*MIN à l'axe *b*I, ſeront plus preſſées d'un côté que de l'autre, ſçavoir de P en L, que de P en K.

130. La méthode de trouver les profondeurs de la ſection, c'eſt-à-dire, les points de ſon axe courbe KPL eſt tout-à-fait la même que celle du Theorême précedent; la ſeule difference eſt que l'on inſcrit ici dans une Ellipſe, qui eſt la ſection oblique du cylindre, les ordonnées qu'on inſcrivoit dans le cercle de ſa baſe.

Si l'on fait l'Ellipſe SDTB (*Fig.* 61.) égale à la ſection oblique, qui a pour grand axe ST, ou S*t* de la Fig. 60. & le petit axe BD égal au diametre *bd* de la baſe du cylindre a*d*, (*Fig.* 60.) enſuite que l'on faſſe la ligne SH, perpendiculaire ſur ST grand axe, S1 = PR & S2 = *pr*, qu'enfin on mene par les points 1 & 2, les ſignes 1R, 2*r*, paralleles à l'axe ST, qui rencontreront l'Ellipſe SRB aux points R & *r*, ces lignes 1R, 2*r*, ou leurs égales S*p*, SP, ſont les profondeurs des points de l'axe courbe, correſpondant aux points O & *o* de l'axe *b*I de l'Ellipſe *b*MIN. *Fig.* 61.

Dans le cicloïmbre nous avons trouvé que ces lignes SP, S*p* étoient les ſinus verſes des ſinus droits RP, *rp*, ici ce ſont des abſciſſes du diametre S T, leſquelles ſont encore en même raiſon que ces ſinus verſes; car ſi l'on fait l'angle LSC (*Fig.* 62.) égal à l'angle LSC, de la Fig. 60. & S*i* perpendiculaire ſur SC, & que l'on prenne ſur SC les parties SP & S*p*, égales aux abſciſſes de la fig. 61. ſi par ces *Fig.* 62.

points P & *p*, on mene PO, & *po* perpendiculaires à la ligne SL, les lignes SO, S*o* ſeront les abſciſſes de *b*I, ; or il eſt clair que SP : SO :: S*p* : S*o* à cauſe des paralleles *po* PO. Si enfin l'on fait l'angle LS*i*, égal à l'angle I*H*i, & que l'on méne des points *o* & O les lignes *of*, OF, perpendiculaires ſur S*i*, les lignes S*f*, SF repréſenteront les abſciſſes du Cercle, c'eſt-à-dire les fléches, dont les doubles ordonnées de la ſection ſolide ſont les cordes, ou les ſinus verſes des ordonnées conſiderées comme ſinus droits, leſquelles ſont encore en même raiſon ; car SO : SF :: S*o* : S*f* :: SP : S*p*, *ce qu'il falloit démontrer*, c'eſt-à-dire, que les abſciſſes de l'axe ST de l'Ellipſe SRTQ ſont à celles de l'axe *b*I, de l'Ellipſe *b*MIN, comme celles-cy ſont à celles du cercle.

Application à l'uſage.

131. CETTE propoſition fait voir quelle eſt la Courbe de l'enfourchement d'une lunette biaiſe dans un berceau, lorſque les impoſtes de l'une & de l'autre ſont ſur un même plan, ou la courbe de l'enfourchement, d'un pui ou d'un ſoupirail circulaire, qui rachete un berceau rampant, comme on en voit au Fort St. Jean à Marſeille, & en pluſieurs Fortereſſes.

THEOREME XX.

La Section faite par la rencontre des ſurfaces de deux Cylindres, dont l'un pénetre l'autre de toute ſa circonference, perpendiculairement ou obliquement à ſes côtez, ſans que leurs Axes ſe rencontrent, eſt une Ellipſimbre.

Fig. 63. POUR rendre la figure néceſſaire à l'intelligence de la démonſtration de ce Theorême, auſſi ſimple qu'il eſt poſſible, nous ne ſuppoſerons qu'une tranche du grand cylindre (*Fig.* 63.) faite par deux plans paralleles entr'eux, perpendiculaires à ſon axe, & tangens au petit cylindre HILK, que nous ſuppoſons premierement perpendiculaire aux côtez du grand cylindre, enſorte que ſon côté HB tombe à angle droit ſur le côté V*u* du grand cylindre ; nous verrons cy-après qu'il peut tomber obliquement ſans qu'il arrive de changement à la ſection ſolide.

SI (comme dans toutes les propoſitions précedentes) nous commençons par ſuppoſer un plan paſſant par l'axe du petit cylindre HL, & perpendiculairement à celui du grand, nous verrons qu'il fera deux ſections differentes, ſçavoir un parallelograme HILK dans le petit, & un Cercle DVGU dans le grand, qui ſe couperont aux points AB, EF, leſquels ſeront par conſéquent communs aux deux ſurfaces des cylindres. Si par deux de ces points A & B, on fait paſſer un ſe-

Digitized by Google

cond plan parallele à l'axe du grand cylindre, il ſera auſſi deux ſections differentes dans ces deux corps; ſçavoir un parallelograme STUV dans le grand, & une Ellipſe AMBN dans le petit, qu'il coupe obliquement, dont le grand axe ſera AB, & le petit MN, égal au diametre de la baſe HI, & les côtez du parallelograme STUV ſeront tangens de cette Ellipſe à l'extremité de ſes axes, & par conſéquent au dehors du cylindre; donc il ne peut être la ſection commune aux deux ſurfaces; l'Ellipſe AMBN ne peut auſſi être une ſection commune, puiſqu'elle eſt toute au dedans de la ſurface du grand cylindre, avec laquelle elle n'a de commun que les points A & B; donc la ſection commune faite par la rencontre des ſurfaces ſera une courbe differente de ces deux figures avec leſquelles elle doit cependant avoir les points A & B communs, par conſéquent elle ne ſera pas dans un plan, mais une courbe à double courbure, cependant elle aura toutes les ordonnées à ſon axe courbe égales à celles de l'Ellipſe, qui eſt la ſection oblique du petit cylindre par les points communs A & B.

Pour trouver les points par où cet axe courbe paſſe, il eſt plus aiſé dans cette propoſition que dans toutes les précedentes Ellipſimbres; puiſqu'il n'eſt pas une courbe inconnuë, mais un arc de cercle APB, qui eſt portion de celui de la ſurface du grand cylindre, coupé par un plan perpendiculaire à ſon axe, & paſſant par les points DBAV, ſi le cylindre HL tombe perpendiculairement ſur les côtez du grand.

Ou dans un autre cas cet arc courbe ſera une portion de l'Ellipſe, faite par un plan paſſant par l'axe du cylindre HL, & coupant obliquement le grand cylindre par les points A & B.

Soient les points RQ & *rq* la rencontre des deux ſurfaces, les ordonnées menées par ces points à la courbe de la ſection ſolide, ſeront donc ſur la ſurface du grand cylindre, dont elles ſeront partie des côtez, telles ſont ici PR, *pr*, leſquelles ſeront paralleles & égales aux correſpondantes NC : *no* dans l'Ellipſe plane AMBN ſur des plans paralleles à l'axe *x*X; car les lignes paſſant par ces points NR, *nr* parallelement à l'axe *x*X ſont des parties de côtez du cylindre HL; par conſéquent paralleles entr'elles; mais parce que les doubles ordonnées NM, *nm* ſont paralleles à l'axe du grand cylindre, elles le ſeront auſſi aux côtez du même cylindre; donc RM & *rm* ſont des parallelogrames, par conſéquent *rq* = *nm*, & RQ = NM; c'eſt-à-dire, que les ordonnées ou doubles ordonnées de la ſection ſolide, ſont égales à celles de l'Ellipſe plane, dont le grand axe eſt le ſoutendant de l'axe courbe BPA; donc la ſection eſt une Ellipſimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

132. D'ou il ſuit que cette Ellipſimbre eſt beaucoup plus parfaite & plus ſimple que celles des propoſitions précedentes; plus parfaite en ce que ſon axe courbe eſt une portion réguliere de Cercle ou d'Ellipſe ; & plus ſimple en ce que ſes ordonnées ne ſont pas une ſurface differente de celle du grand cylindre, comme dans les Ellipſimbres précedentes, & par conſéquent le centre P de cette ſection ſe trouve à la ſurface du cylindre, où eſt auſſi l'axe droit RQ, qu'il diviſe en deux également. Tous les autres diametres courbes, qui paſſeront par le centre P ſeront des portions d'Ellipſes, dont les cordes ſeront les diametres droits de la ſection, égaux auſſi à ceux de l'Ellipſe plane ſoujacente AMBN.

Au reſte cette Ellipſimbre a toutes les proprietez des autres, ſes ordonnées, par exemple, ſont plus ſerrées d'un côté que de l'autre, excepté qu'elle eſt encore plus ſimple dans les profondeurs de ſon axe courbe, leſquelles ſe trouvent naturellement en faiſant d'un point donné ſur l'axe ſouſtendant *ab*, mis au bas de la fig 63. l'angle *poa* ou PCa égal à celui de l'axe *x*X, avec la ligne AB, & toutes les lignes paralles à PC, ou *p o* iront ſe terminer à l'arc de cercle *b*PA de la baſe du grand cylindre, ſi le petit le traverſe perpendiculairement à ſes côtez, ou à un arc d'Ellipſe *b*PA, s'il le traverſe obliquement, comme à la figure 64. ſi l'on veut avoir les profondeurs perpendiculaires à l'axe ſouſtendant *ba*, il ſera bien aiſé d'abaiſſer des perpendiculaires *p d*, PD ſur cet axe, elles donneront ces profondeurs.

Fig. 64.

133. Il nous reſte à faire voir que ſoit que le petit cylindre traverſe le grand perpendiculairement à ſes côtez, comme nous l'avons ſuppoſé (*Fig.* 63.) ſoit qu'il le traverſe obliquement, la ſection ſera toujours une Ellipſimbre, ce qui eſt aſſez clair de ſoi-même; car ſoit que le côté HB tombe d'une façon ou de l'autre ſur VB, le plan VSTU ſera toujours un parallelograme dans le grand cylindre, & une Ellipſe AMBN dans le petit, la ſeule difference eſt, que la ligne AB (*Fig.* 63.) eſt néceſſairement le grand axe de l'Ellipſe, & que ſi le cylindre *b*L (*Fig.* 64.) eſt oblique ſur le côté AB du grand cylindre, elle peut devenir le petit axe.

134. Nous ſuppoſons dans l'un & l'autre cas le petit cylindre Droit, s'il étoit ſcalene, le plan VSTU pourroit le couper de maniere que ſa ſection ne ſeroit plus une Ellipſe, mais un cercle, & alors la ſection ſolide ne ſeroit plus une Ellipſimbre, mais un cycloïmbre; parce que l'axe ſouſtendant *ba* ſeroit égal à l'axe droit AB, & toutes les ordonnées de la ſection ſolide & de la plane étant paralleles & égales, les

Fig. 64.

Digitized by Google

diametres droits ſeroient égaux entr'eux, ce qui eſt la propriété du *Cicloïmbre*, qui en conſtituë la difference avec l'Ellipſimbre ou ils ſont tous inégaux.

135. L'obliquité du petit cylindre ſur les côtez du grand, occaſionne encore une difference dans la maniere de trouver les profondeurs perpendiculaires de la ſection ſolide ſur la ſection plane. Premierement, en ce qu'au lieu d'un arc de cercle pour ſon axe courbe, il faut trouver l'arc de l'Ellipſe formée par l'obliquité du plan paſſant par l'axe du petit cylindre, de laquelle le grand axe ſera FG, & le petit *bi* baſe du petit cylindre; mais ce n'eſt pas aſſez d'avoir trouvé cet arc *b*a, car les perpendiculaires *p d*, PD, ſur la corde *b*a, ne ſont pas perpendiculaires au plan VSTU de la fig. 63., lequel eſt parallele à l'axe du grand cylindre, parce que la ligne PD, & la parallele *p d* eſt encore inclinée au côté du grand cylindre *dk*, de ſorte que pour trouver cette inclinaiſon il faut faire à part l'angle PD*y* égal à l'angle FCH ou *x*CH de l'axe *x*X avec le côté LH du grand cylindre, la perpendiculaire P*y* ſur le côté D*y* ſera la profondeur que l'on cherche. *Fig.* 64.

Corollaire II.

136. D'ou il ſuit comme au Theorême X. que plus le côté HK du petit cylindre approchera de l'extremité D du rayon CD, perpendiculaire à l'axe *x*X, plus la ſection ſera alongée, & plus les ſections oppoſées AB, EF ſe rapprocheront, de ſorte que ſi le côté HK devient tangent au cercle DVGU, les ſections ſe toucheront au point D, & qu'enfin s'il eſt hors du grand cylindre, elles ſe tronqueront réciproquement, & la ſection totale ſera compoſée de deux portions d'Ellipſimbre, comme nous l'avons dit ailleurs. *Fig.* 63.

Application à l'Uſage.

Cette propoſition fait connoître quelle eſt la Courbe des arêtes des lunettes droites ou biaiſes, dont la naiſſance eſt au deſſus des impoſtes d'une voute en berceau, dans laquelle elles ſont pratiquées, ſoit que leurs Clefs ne montent pas à la hauteur de celle du berceau, comme ſont celles de la Nef du Val de Grace à Paris, & de la Chapelle de Verſailles, ſoit que leurs Clefs ſoient de niveau, comme aux Traverſes du Rampart de Landau à la Gorge des Tours Baſtionnées, ce qui eſt le cas du ſecond Corollaire, où le côté du petit cylindre HK devient tangent au grand au point D; alors il ſe forme une voute d'arêtes difformes en ce qu'elles ne peuvent pas ſe bornoyer en lignes droites dans les diagonales, comme aux voutes d'arêtes, dont les clefs & les im-

poſtes ſont de niveau. En effet dans celles-ci, les interſections ſont des Ellipſes planes, comme nous l'avons démontré au Theorême XVII. & dans l'autre cas ce ſont des Ellipſimbres, c'eſt-à-dire, des courbes à double courbure, qui ne peuvent être bornoyées en ligne droite, en quelque ſituation que le ſpectateur puiſſe ſe mettre.

Si au lieu de faire attention aux rencontres des ſurfaces concaves des deux cylindres, on conſidere la convexe de l'un & la concave de l'autre, on reconnoîtra la courbe de rencontre d'une Tour ronde dans un berceau, ou ſi l'on veut s'arréter à de petits ouvrages, on remarquera que c'eſt celle d'un pilier rond Gotique, qui rachete un Chapiteau Octogone dans une moulure de cavet; comme on le voit ordinairement aux anciennes Egliſes entre la Nef & les bas Côtez.

On peut donner un grand nombre d'autres exemples de conſtructions qui ont rapport à ce Theorême, comme ſont les Abajours cylindriques, qui éclairent des berceaux, par une direction qui ne tend pas à leurs axes, comme ſont ceux des voutes ſouterraines des tours baſtionnées de Landau, leſquels ſont fort ſurbaiſſez dans leur orifice, c'eſt-à-dire, que ce ſont des cylindres ſcalenes, dont les rencontres avec les cylindres droits des berceaux, ſont des courbes à double courbure en Ellipſimbres.

On verra au quatriéme Livre, lorſque nous donnerons les Traits des Deſcentes biaiſes, qui rachetent un berceau, l'uſage du petit triangle DP*y*, qui eſt ſous la figure 63. pour en trouver la double obliquité.

THEOREME XXI.

La Section faite par la rencontre des Surfaces de deux Cylindres, dont l'un ne pénetre l'autre que d'une partie de ſa Circonference, & dont les axes ne ſont pas paralleles, eſt une Ellipſimbre *compoſée.*

Fig. 65. Soit, comme dans la fig. 63. une tranche de cylindre *g*VN*u* (*Fig.* 65.) repréſentée en perſpective, laquelle eſt pénetrée par le cylindre HL, qui n'y entre qu'en partie de ſa circonference, le côté IL étant hors du grand cylindre; je dis que la ſection formée par la rencontre de leurs ſurfaces ſera compoſée de deux portions d'Ellipſimbre,

Car ſi l'on ſuppoſe un plan paſſant par l'axe *x*X du petit cylindre perpendiculairement à l'axe du grand, il ſera dans l'un un parallelograme, & dans l'autre un cercle, leſquels ſe coupant aux points A & a marqueront que ces points ſont communs aux deux ſurfaces des cylindres,

Digitized by Google

lindres, & ſi par le point D, équidiſtant des points A & a, pris ſur la circonference du cercle *u d* V D, on fait paſſer deux plans coupans les deux cylindres par les points A & a parallelement à l'axe du grand cylindre, ils feront chacun deux ſections differentes, ſçavoir un parallelograme dans le grand cylindre, & une Ellipſe dans le cylindre HL, laquelle ſera en partie hors du grand cylindre, & parce que ces plans ſe croiſent en D, leur commune interſection GH ſera une ordonnée commune aux deux Ellipſes AHBG & a*H*bG; mais parce que la ſection commune aux deux ſurfaces des cylindres, qui ſe coupent, eſt une Ellipſimbre, par le Theoréme précedent, il ſuit que chaque ſection plane Elliptique correſpondra à deux portions d'Ellipſimbre, qui ſe tronqueront mutuellement, comme les Ellipſes avec les ordonnées, deſquelles elles ont un rapport d'égalité, dans les plans paralleles à l'axe *x*X, & perpendiculaire au plan paſſant par les points ADa; donc la ſection totale ſera compoſée de deux portions d'Ellipſimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

Cependant puiſque par la propoſition précedente la ſection ſolide peut être un cycloïmbre, dans le cas où le cylindre, qui en pénetre un plus grand, eſt ſcalene, il peut auſſi arriver que la ſection totale ſoit un *Cicloïmbre compoſé.*

137. Quelque ſoit la ſection, ſi l'on veut trouver l'ordonnée commune aux deux courbes à laquelle elles ſe terminent réciproquement à leur angle d'inflexion, il n'y a qu'à mener du centre C de la ſection circulaire du cylindre *d*VD*u*, la figure CF perpendiculaire ſur l'axe *x*X, laquelle coupera les côtez du cylindre HL en E & F; ſur EF comme diametre, ayant fait le demi cercle ETF, on élevera du point D, ſection des lignes AB, a*b*, la perpendiculaire DT; cette ligne qu'il faut imaginer couchée ſur les côtez du grand cylindre, parallalement à ſon axe, ſera l'ordonnée que l'on cherche; car le point T & ſon oppoſé au diametre, paſſant par l'axe *x*X du cylindre HL, ſeront à ſa circonference, puiſque ce cercle ETF eſt égal à la baſe, & que la ligne DT eſt à la ſurface du grand cylindre, quoique par la néceſſité de joindre dans la figure les plans qu'on ſuppoſe perpendiculaires entr'eux, elle ne paroiſſe pas dans ſa ſituation, qui ſeroit celle de DH, & ſon double en GH.

Corollaire.

138. On tirera la même conſéquence de la difference des inflexions du milieu de l'Ellipſimbre compoſée, que dans la propoſition 11. c'eſt-à-dire, que plus & moins le cylindre HL entrera dans l'autre, plus l'in-

flexion ſera ſenſible, que plus le point D approchera de l'axe, moins elle ſera ſenſible, & que depuis le point D vers F elle ſera un angle ſaillant, & au contraire depuis D vers E elle ſera un angle rentrant.

Application à l'uſage.

139. On voit par cette propoſition quelle eſt laCourbe de l'enfourchement d'une Tour ronde, qui rachete un berceau de niveau, ou rempant; & qu'il n'eſt pas poſſible de ſupprimer les murs de la tour ſous cet enfourchement, lorſqu'elle pénetre le berceau au-delà de la clef, parce que l'angle d'inflexion devenant ſaillant, les *Contreclefs* de l'arcade, qui devroient ſupporter la tour, pouſſeroient au vuide au contraire en-deça de la clef, il ſera facile de faire porter la tour par une Arcade; parce que l'angle d'inflexion eſt rentrant, & fait l'effet d'une voute en tiers-point.

REMARQUE.

140. Il eſt conſtant que les ſections des cylindres entr'eux ſont les plus néceſſaires à connoître; parce que les plus communes de toutes les voutes ſont les berceaux circulaires, ou ſurhauſſez ou ſurbaiſſez; or quelques ſoient les ceintres de leurs *Arcs-Droits*, c'eſt-à-dire, des ſections perpendiculaires à leurs axes, tant qu'ils ne varieront que du cercle à l'Ellipſe, ou d'une Ellipſe à une autre plus ou moins alongée, il n'arrivera aucun changement à la nature des courbes, qui ſe feront par les interſections de leurs ſurfaces, puiſque les cylindres ſurhauſez ou ſurbaiſſez ſont de vrais cylindres, leſquels, au lieu d'être Droits, ſont ſcalenes; de ſorte qu'ils peuvent toujours être coupez, de maniere qu'ils auront pour baſe un cercle, comme nous l'avons dit dans les ſections cylindriques, ce qu'il n'eſt pas inutile de répeter, afin qu'on y faſſe attention dans la pratique.

Des Sections faites par la rencontre des Surfaces des Cônes & des Cylindres qui ſe pénetrent.

141. Il ſemble au premier abord, que ſoit que le cylindre pénetre le cône, ou que le cône pénetre le cylindre, il en doit réſulter une même ſection à leur ſurface. Cependant nous y ferons voir de la difference; dans le premier cas le cône embraſſe le cylindre, & dans le ſecond le cylindre embraſſe le cône; or quoiqu'un cône d'une grandeur donnée n'embraſſe pas le

Digitized by Google

cylindre donné ; il eſt cenſé le faire, lorſqu'étant prolongé il le peut ; ainſi les deux axes de ces corps étant paralleles, quoique le cylindre ne coupe qu'une partie du cône, il ne faut pas mettre en queſtion lequel des deux embraſſe l'autre ; car il eſt évident qu'en prolongeant les côtez du cône il s'élargira de maniere, qu'il envelopera le cylindre auſſi prolongé, & la ſection ſera toujours la même, quoiqu'avant la prolongation elle fût moindre, parce qu'elle étoit imparfaite. Il n'en eſt pas de même, lorſque les axes ſe croiſent ſans ſe rencontrer, la ſection eſt tellement mutilée, que le prolongement du cône ne peut la rendre plus complete.

THEOREME XXII.

La Section faite par la rencontre des ſurfaces d'un Cône & d'un Cylindre Droits, ou d'un Cône & d'un Cylindre Scalenes de même obliquité ſur leurs baſes, dont les Axes ſe confondent, eſt un cercle.

La démonſtration de cette propoſition eſt ſi aiſée qu'elle ſe préſente d'elle-même ; car puiſque les ſections de ces corps coupez par des plans paralleles à leurs baſes, ſont des cercles, il eſt évident que les ſections FG (*Fig. 66.*) & *fg* (*Fig. 67.*) ſont paralleles aux baſes A B, & *ab* ; car les corps étant coupez par un plan paſſant par leurs axes communs SC, KC, les triangles ADF, BEG ſeront égaux ; par conſéquent F & G équidiſtans de D & E, (*Fig. 66.*) & dans la fig. 67. à cauſe des paralleles *bd*, *ie* on aura *be* : *eg* :: *bc* : *cs*, & *ad* : *df* :: *ac* : *cs*, mais *ac* = *cb*, & *ad* = *be*, donc *eg* : *cs* :: *df* : *cs*, donc *eg* = *df*, par conſéquent *fg* eſt parallele à *ab*, & la ſection faite par un plan paſſant par les points communs *f* & *g*, qui ſera un cercle dans le cylindre, comme dans le cône, ſera commune aux deux ſurfaces, dont elle ſera l'interſection à leur rencontre. On peut démontrer la même choſe en ſuppoſant le point R à la circonference de la ſection ; car on connoitra (*Fig. 66.*) que les trois triangles rectangles en L, SLF, SLG, SLR, qui ont le côté SL commun, & les angles en S égaux, ſont égaux en tout, par conſéquent que les trois lignes LF, LR, LG ſont égales, & dans un même plan * & les rayons d'un même cercle ; & [*Fig. 67.*] à cauſe de l'égalité des rayons de la baſe *ca*, *cP*, *cb*, & des triangles ſemblables *acs*, F*ls* ; P*cs*, R*ls* ; *bcs*, *gls* les lignes *lf*, *l*R, *lg* ſont égales, & dans un même plan ; par conſéquent rayons d'un même cercle comme au cône, & au cylindre, *ce qu'il falloit démontrer.* Fig. 66. & 67. * Eucl. l. 11. p. 3.

142. Quoique les axes du cône & du cylindre ſe confondent dans leur pénetration, ſi l'un de ces deux corps eſt Droit & l'autre ſcalene, comme ſi [*Fig. 68.*] le cylindre *an* étoit Droit ſur la baſe circulaire *de*, Fig. 68.

la ſection ne ſeroit plus un cercle, mais une autre courbe à double courbure.

Application à l'uſage.

143. On voit par cette propoſition que le ceintre de l'Ebraſement d'une porte étant de même nature que celui de la porte circulaire, Droit ou biais par téte, & en plein ceintre, l'aréte d'enfourchement de la partie qui fait berceau avec celle qui eſt ébraſée, eſt un cercle, c'eſt-à-dire, une portion de cercle égale à celle de la porte, qui peut être d'une moitié ou d'un arc moindre, comme à celles qui ſont ſimplement Bombées.

THEOREME XXIII.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'un Cylindre & d'un Cône, qui ne ſont pas de même nature, c'eſt-à-dire, dont l'un eſt Droit & l'autre Scalene, & dont les Axes ſe confondent, eſt une Elliſoidimbre.

Fig. 68. Soit [Fig. 68.] le cône BSA ſcalene, pénetré par le cylindre Droit D E *e d*, dont l'axe *x*X eſt en partie commun avec l'axe SC du cône. Ayant ſuppoſé un plan paſſant par ces axes, qui fera deux ſections differentes, ſçavoir, un triangle BSA dans le cône, eſt un parallelograme D E *d e* dans le cylindre, qui ſe couperont aux points *b* & a; on reconnoîtra que ces deux points ſont communs aux deux ſurfaces, par conſéquent à la circonference de la ſection. On ſuppoſera enſuite un ſecond plan perpendiculaire au premier, paſſant par *b* a, lequel fera deux ſections differentes, ſçavoir un cercle dans le cône ſcalene; parce que nous avons démontré que *b* a étoit parallele à la baſe BA [au Theoréme précedent] & une Ellipſe dans le cylindre, qu'il coupe obliquement, leſquelles figures ſoient repréſentées par leurs moitiez *b g* a, demi cercle & *b f* a demi Ellipſe, ayant pris un point P à volonté ſur le diametre commun *b* a, on abaiſſera une perpendiculaire P *g*, ſur ce diametre, laquelle coupant le cercle & l'Ellipſe, donnera les ordonnées de l'un & de l'autre, P *g* pour le cercle, & P *f* pour l'Ellipſe. Du même point P ayant mené au ſommet du cône *s* la ligne PS, & ſur cette ligne une perpendiculaire PF égale à P *f*; on prendra PF égale à P *f*; par le point F qui appartient à l'Ellipſe, on fera paſſer une parallele à *x*X pour repréſenter un côté du cylindre, & par les points G & S une ligne GS, qui repréſentera le côté du cône, & coupera celui du cylindre en *y*, ou ſera un des points de la ſection des deux ſurfaces, par ce point *y* on menera une parallele *y v* à PG, & une autre *y z* à PS, cette préparation étant faite.

Digitized by Google

A cauſe des triangles ſemblables GSP & G*yz*, on aura SP : PG :: *yz* : zG, c'eſt-à-dire la diſtance du ſommet du cône à l'ordonnée de l'Ellipſe, comme la profondeur ou diſtance de la ſection ſolide à cette ordonnée, eſt à la difference des ordonnées du cercle & de la ſection ſolide, donc cette ſection eſt une *Ellipſoïdimbre*, par la quatriéme définition.

Et parce que *yv* eſt parallele à PG, le point *v* qui eſt dans le plan paſſant par les axes, & les *Points b* & a ſeront à l'axe courbe *b v* a de l'Ellipſoïdimbre. Art. 83.

Quelque point P que l'on prenne dans l'axe, on aura toujours la même conſtruction & la même analogie; puiſque le plan *b*a étant perpendiculaire à celui qui paſſe par les axes, toutes les lignes menées du ſommet du cône à la ligne *b*a ſeront perpendiculaires aux ordonnées des ſections de la circulaire *bg*a & de l'Ellipſe *bf*a, & parce que les intervales de ces deux courbes ſont toujours inégaux, les points *y* ſeront toujours inégalement éloignez du plan paſſant par *ba*, où ſont les ordonnées du cercle, qui eſt la ſection cônique, de ſorte que le point *y* ſe rejoindra en *b* & en a, ſi les points P ſont pris en *b* & en a.

Application à l'uſage.

144. Cette propoſition fait voir que ſi *l'Arc-Droit* d'un berceau ou d'une porte eſt en plein ceintre, & qu'on lui faſſe une lunette ou un ébraſement en biais, auſſi en plein ceintre, l'aréte d'enfourchement de l'ébraſement & du berceau ſera une courbe à double courbure, de ſorte que les *Aplombs*, c'eſt-à-dire, les verticales tirez de pluſieurs de ſes points, ne tomberont pas ſur une ligne droite. La même choſe arrivera mais en ſens contraire, ſi l'ébraſement eſt ſurhauſſé ou ſurbaiſſé & le biais du berceau en plein ceintre par tête.

THEOREME XXIV.

La Section faite par la pénetration d'un Cylindre & d'un Cône, dont les Axes ſe coupent obliquement, peut être dans un ſeul cas [*expoſé cy-aprés*] *une Ellipſe plane.*

Soit [*Fig.* 69.] le triangle BSA la ſection d'un cône par ſon axe Sc, dont la baſe BA eſt indéfiniment prolongée vers D. Soit EL le diametre de la ſection Elliptique, faite par un plan perpendiculaire au triangle par l'axe SC, lequel ſoit prolongé juſqu'à la rencontre de la baſe en F; ayant mené par le ſommet S la ligne SD paralelle à DE, qui rencontrera la baſe prolongée en D, ſi l'on fait D*x* moyenne proportionelle Fig. 69.

entre BD & AD, & qu'on la place de D en x, ſur le diametre de la baſe, le point x donnera la poſition du pied d'une ligne parallele à l'axe d'un cylindre, laquelle paſſant par le ſommet du cône S, déterminera celle des côtez par les points E & L, en lui menant les paralleles Gg, Kk, je dis que la ſection faite par le plan paſſant par EL, perpendiculaire à celui qui paſſera par les axes du cône & du cylindre, ſera l'Ellipſe ERLr, dont EL ſera le grand axe, & que cette ſection plane ſera commune aux deux corps.

Pour le démontrer, ſoit pris ſur le grand Axe EL un point P à volonté, par lequel ayant mené bi parallele à la baſe BA, qui coupera le cône aux points b & a, & le cylindre aux points g & i, ſur les lignes ba & gi, comme diametres, on décrira deux demi-cercles boa, goi, qui repréſenteront les ſections faites dans le cône & dans le cylindre, par un plan paſſant par P perpendiculairement au triangle par l'angle BSA. Si du point P on éleve une perpendiculaire PO, qui coupe le cercle du cône en R & celui du cylindre en O.

On démontrera que cette ligne eſt une ordonnée commune aux deux cercles & à l'Ellipſe ERLr; car dans le cône à cauſe des triangles ſemblables EPb, SDB, aPL, LAF & SAD on aura les analogies ſuivantes; $\left.\begin{array}{l} EP : P\,b :: SD : DB \\ PL : Pa :: SD : DA \end{array}\right\}$ donc $EP \times PL : P\,b \times Pa = \overline{PR}^2 : \overline{SD}^2 : DB \times DA$. Dans le cylindre à cauſe des triangles ſemblables E Pg, iPL, SDx, on aura encore les analogies ſuivantes; $\left.\begin{array}{l} EP : P\,g :: SD : D\,x \\ PL : P\,i :: SD : D\,x \end{array}\right\}$ donc $EP \times PL : P\,g \times P\,i = \overline{PO}^2 :: \overline{SD}^2 : \overline{D\,x}^2$, ou ce qui eſt la même choſe à $DB \times DA$. Donc les lignes PO & PR ont même rapport aux lignes PE, PL; donc elles ſont égales & ſe confondent en une terminée en P & en O ou R, qui deviennent un même point; & puiſqu'on peut prouver la même choſe de tous les points P, pris à volonté, il ſuit que l'Ellipſe du cylindre eſt la même que celle du cône; puiſque les ordonnées à l'axe EL ſeront toujours communes. Donc la ſection d'un cône & d'un cylindre dont les axes ſe coupent obliquement, peut être une Ellipſe plane, *ce qu'il falloit démontrer.*

Hors de ce cas la ſection faite par la pénetration de ces corps ne peut être une figure plane, comme nous le démontrerons dans la ſuite.

Corollaire.

145. Il ſuit de cette propoſition qu'un cône BSA étant donné & une

Ellipſe ERLr dans ce cône, il eſt facile de trouver le cylindre qui a pour ſection la même Ellipſe; puiſqu'ayant trouvé une troiſiéme proportionelle aux lignes BD & DA, on aura ſur la baſe du cône un point x, lequel avec le ſommet S détermine la poſition de l'axe du cône, & les points E & L celle des côtez.

Nous donnerons l'inverſe dans les Problèmes, c'eſt-à-dire, la maniere de trouver le cône, auquel convient l'Ellipſe de la ſection d'un cylindre donné.

Application à l'uſage.

146. Cette propoſition fait voir qu'il faut examiner quelle eſt la poſition du cylindre dans le cône, lorſque les axes ſe coupent obliquement, pour reconnoître ſi la ſection eſt plane ou ſolide, comme elle eſt preſque toujours. Et dans la pratique elle peut être appliquée à la conſtruction d'une arriere-vouſſure cónique ou ébraſement biais, rachétant un ceintre ſurhauſſé ou ſurbaiſſé, dont la direction du milieu ſe croiſe avec celle de l'ébraſement.

THEOREME XXV.

La Section faite par la rencontre des ſurfaces d'un cône & d'un Cylindre, qui le pénetre, enſorte que les Axes de ces deux Corps ſe croiſent, ou ſoient paralleles entr'eux, eſt une Ellipſe ou un cercle.

Ce Theorême renferme deux cas, & les comprendroit tous en le joignant aux précedens, s'il comprenoit celui où les axes ne ſe rencontrent pas ſans être paralleles; mais il eſt ſi compoſé que nous le laiſſons à la recherche de quelque bon Mathematicien. Cependant quoique ce défaut rende notre Theorie un peu imparfaite, la pratique ne s'en reſſentira pas; parce que nous trouverons une maniere Geometrique de trouver autant de points qu'on voudra, de la courbe de cette ſection, quoiqu'elle nous ſoit inconnuë en general, on ne perd en cela qu'une formule generale d'Algebre, qui embraſſe tous les cas.

Premier cas, où les Axes ſe coupent perpendiculairement ou obliquement.

Soit [*Fig.* 70.] ASB le triangle par l'axe du cône, & IGHK le parallelograme par l'axe du cylindre, ou un autre plan CDFS paſſant par l'axe SC du cône, & par celui du cylindre xX, ce dernier plan coupera la ſurface du cône ſuivant une ligne droite SP, ſuivant laquelle un troiſiéme plan perpendiculaire au plan CF ſera ſuppoſé couper le cylindre & toucher le cône, de ſorte qu'il ne ſera qu'une ſection dans un *Fig.* 70.

Digitized by Google

des corps, ſçavoir une Ellipſe dans le cylindre, qu'il coupe obliquement en *EmLM*, dont EL ſera le grand axe, lequel eſt dans la ligne SP à la ſurface du cône, auquel cette Ellipſe étant tangente, ſera toute au dehors.

Si par les points M & *m*, N & *n*, pris à volonté ſur la circonference de cette Ellipſe, on mene de lignes QM, *q*N paralleles à l'axe du cylindre *x*X, prolongées juſqu'à la rencontre de la ſurface du cône, aux points Y & *y*, ces points ſeront à la circonference de la ſection ſolide, auſſi bien que les points E & L; de ſorte que la ligne E*y*YL ſera au contour de la ſection ſolide, & ſi par les mêmes points M & N, ou ceux qu'ils ont produit à la baſe du cylindre Q, R, *qr*, on mene des ordonnées au diametre GH, ou EL, par leſquelles on ſuppoſe des plans YR, *yr*, qui coupent le cylindre & le cône, ils feront deux ſections differentes, ſçavoir des parallelogrames *yr* & YR, dans le cylindre, & des cercles ou des Ellipſes dans le cône, dont YTV & *ytu* ſeront des arcs; mais parce que les ordonnées M*m* & N*n* ſont tangentes à ces courbes, que les points M & *m* ſont également éloignez du point d'attouchement T & *t*, de même que N & *n*, & que les lignes YM, *y*N, qui ſont les côtez du cylindre, ſont paralleles entr'elles; il ſuit que les ordonnées de la ſection ſolide YV & *yu* ſont paralleles & égales aux ordonnées à l'axe EL de l'Ellipſe plane E M L *m*, donc la courbe EYLV eſt une Ellipſimbre, *ce qu'il falloit demontrer.*

Second cas, où les Axes ſont paralleles entr'eux.

Fig. 71. Soit AS*b* le triangle par l'axe du cône, & un plan SFPC paſſant par l'axe X*x* du cylindre GH, ce plan ſera deux ſections differentes, ſçavoir un parallélograme GH*bg* dans le cylindre, & un triangle aSP dans le cône, dont SP ſera un côté, & par conſéquent à ſa ſurface. Si l'on ſuppoſe un troiſiéme plan, qui lui ſoit perpendiculaire & tangent au cône, ſuivant la même ligne SP, il ſera par ſa ſection dans le cylindre une Ellipſe EML*m*, dont l'axe EL ſera partie de cette ligne SP, laquelle Ellipſe ſera toute hors du cône, & dans le cylindre. Si enſuite on prend à la circonference des points M & N à volonté, & que par ces points on mene des paralleles à l'axe *x*X, comme MY, N*y*, elles rencontreront la ſurface du cône en quelques points Y & *y*, qui ſeront à la circonference de la ſection ſolide, puiſqu'ils ſont communs à la ſurface du cône & à celle du cylindre, dont ces lignes ſont les côtez; donc la ligne courbe E*y*YL eſt celle de la ſection ſolide.

Il reſte à démontrer que les ordonnées à l'axe courbe de cette courbe ſeront égales à celles de l'Ellipſe à l'axe EL, ce qui eſt facile par l'application de la démonſtration précedente, dont celle-ci n'eſt qu'une répeti-

Digitized by Google

répetition ; car les plans paralleles à l'axe du cylindre paſſant par les ordonnées de l'Ellipſe plane M*m*, N*n* ſont un parallelograme dans le cylindre, & des hyperboles ſemblables dans le cône, dont les arcs Y T V & *y t u* ſont touchez aux points T & *t* par les ordonnées de l'Ellipſe plane M*m* & N*n*, & les points M & *m*, N & *n*, également diſtans des points T & *t* ; donc par l'Article 39. les lignes MY, *m*V coupent l'hyperbole à des diſtances égales de la tangente MT*m* ; par conſéquent les lignes YV, & *yu* ſont paralleles aux lignes M*m* & N*n*, & elles leur ſont égales, puiſqu'elles ſont entre mêmes paralleles, qui ſont les côtez du cylindre MY, *m*V ; donc la ſection eſt une Ellipſimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

147. Quant au troiſiéme cas où les axes ne ſont pas paralleles, & ne ſe coupent pas ; quoique nous ne déterminions pas la figure qui réſulte de la rencontre des ſurfaces du cône & du cylindre par un Theorême general, nous donnerons dans les Problêmes la maniere de trouver autant de points que l'on voudra de cette courbe, en coupant le cône & le cylindre par des plans paralleles entr'eux ; mais parce que l'inclinaiſon de ces plans peut changer quatre fois la courbe de la ſection du cône, & deux fois celle du cylindre, la rencontre des ſurfaces des deux corps ſera dans l'interſection de differentes ſections ; quelquefois d'une parabole & d'une Ellipſe, d'une hyperbole & d'un cercle, de deux Ellipſes ou de deux cercles, de ſorte que la combinaiſon de ces ſections devient fort compoſée, d'où réſulte une ſi grande varieté, que je laiſſe à quelque Sçavant l'invention d'une formule algebrique, qui donne la ſolution de tous les cas de cette propoſition.

Corollaire.

148. Il ſuit de la pénetration du cylindre dans le cône, que lorſque leurs axes ſont perpendiculaires entr'eux les ſections oppoſées ſont égales, & que lorſqu'ils ſont obliques elles ſont inégales. Celle qui eſt plus près du ſommet du cône eſt la plus petite, & ſon oppoſée la plus près de la baſe, la plus grande ; cette obſervation eſt encore vraye, lorſque les axes ne ſe coupent pas, & qu'ils ne ſont pas paralleles.

Application à l'Uſage.

149. Cette propoſition fait connoître quelle eſt la Courbe de l'enfourchement d'une voute en canoniere, percée de lunettes en berceau, comme il peut arriver au grand Eſcalier du Vatican à Rome, ou cel-

le d'un Ébraſement fait au bout d'un berceau, dont la naiſſance ne ſeroit pas de niveau avec celle du plein ceintre de l'Ébraſement.

THEOREME XXVI.

La Section faite par la pénetration d'un Cône dans un Cylindre eſt une Ellipſoïdimbre.

Un cône peut pénetrer un cylindre de ſix manieres.

1.° Lorsque l'axe du cône coupe perpendiculairement celui du cylindre.

2.° Lorsqu'il le coupe obliquement.

3°. Lorsque l'axe du cône ne rencontre pas celui du cylindre, mais qu'il tombe perpendiculairement ſur ſon côté, & entre dans le cylindre de toute la circonference de ſon contour.

4.° Lorsque, dans les mêmes circonſtances, ſon axe tombe obliquement ſur les côtez du cylindre.

5.° Lorsqu'il ne pénetre le cylindre que d'une partie de ſa circonference, & que ſon axe tombe perpendiculairement ſur le côté du cylindre.

6.° Enfin lorſqu'il n'y a qu'une partie de ſon contour qui entre dans le cylindre obliquement.

Dans tous ces cas la ſection eſt une Ellipſoïdimbre de même eſpece, que celle dont nous avons parlé ci-devant au Theorême XXIII.

Fig. 72. Pour le premier & ſecond cas. Soit un cylindre D*d* F*f* (*Fig.* 72.) pénetré par un cône BAS, dont l'axe SC coupe celui du cylindre KX perpendiculairement ou obliquement. Si l'on ſuppoſe un plan paſſant par ces deux axes, il coupera le cylindre ſuivant une ligne droite EL, dont les points E & L ſeront communs aux deux ſurfaces, étant à l'interſection du triangle par l'axe fait dans le cône, & du parallelograme par l'axe du cylindre, à la ſurface duquel ſera la ligne EL. Si l'on ſuppoſe un ſecond plan tangent au cylindre ſuivant la ligne EL, que nous ſuppoſons oblique à l'axe CS, ce plan ſera dans le cône une ſection Elliptique, dont EL ſera le grand axe : ſi enſuite l'on prend à ſa circonference autant de points que l'on voudra à volonté, comme *Mm*, *Nn*, par leſquels on mène des lignes droites au ſommet S du

Digitized by Google

cône, ces lignes rencontreront la ſurface du cylindre en quelques points Y & *y*, leſquels ſeront communs aux deux ſurfaces, puiſqu'ils ſont à l'interſection des côtez du cône & du cylindre; donc la courbe E*y*YL eſt celle de la ſection ſolide.

Si par les mêmes points M & N on tire des ordonnées à l'axe EL, elles toucheront le cylindre aux points T & *t*, & ſeront perpendiculaires aux lignes TS, *t*S, & les plans qui paſſeront par ces ordonnées feront dans le cône des triangles SM*m*, SN*n*, & des cercles ou des Ellipſes dans le cylindre, dont YTV, & *ytu* ſeront des arcs, & les ordonnées YV & *yu* de la ſection ſolide, ſeront leurs cordes; il eſt viſible qu'à la ſection ſolide la plus près de la baſe, ces cordes ſeront plus petites que les ordonnées de l'Ellipſe M*m* & N*n*, puiſque les lignes MV, N*u*, *m*Y, *ny* ſont convergentes, en ce qu'elles tendent toutes au ſommet S; or ſi l'on prend leur difference en tirant les lignes *h*Y, HV, & *yo* paralleles à l'axe KX, on aura des triangles ſemblables ST*m*, Y*hm*, & S*tn*, *yon*, dans leſquels on aura les analogies ſuivantes ST : T*m* :: Y*h* : *hm*, & S*t* : *tn* :: *yo* : *on*; c'eſt-à-dire, que la diſtance du ſommet du cône à l'ordonnée de l'Ellipſe plane eſt à cette ordonnée, comme la profondeur de la ſection, ou diſtance à l'ordonnée de l'Ellipſe plane, eſt à la difference de cette ordonnée avec celle de la ſection ſolide; donc * la courbe E*y*YL eſt une Ellipſoïdimbre, *ce qu'il falloit démontrer.* * Art. 79.

150. Il paroît inutile de répeter ici ce que nous avons dit de pareilles ſections, que les oppoſées avoient leur axe courbe, tourné en ſens contraire, de ſorte, que ſi dans l'une la difference des ordonnées de la ſection ſolide & de l'Ellipſe plane eſt un excès, dans l'autre elle ſera un défaut, ſans que le rapports des analogies ſoit changé pour cela.

On ſçait encore que le même rapport de cette difference ne peut être appliqué à toutes les ordonnées, mais chacune d'entr'elles a un rapport different à la correſpondante; car il eſt clair que le rapport de *on* à *tn* eſt bien plus petit que celui de *hm* à T*m*, la raiſon eſt que ſi les axes du cône & du cylindre ſe coupent à angle droit, les triangles S*tn*, ST*m* ſont de même hauteur, ayant leurs ſommets en S & leurs baſes inégales, *tn* étant plus petit que T*m*, & ſi les axes ſe coupent obliquement, ces differences de rapport ſubſiſteront encore comme nous l'avons démontré au Theoréme XXV. ce qui comprend le ſecond cas.

151. Dans le troiſiéme cas de cette propoſition, ſi l'axe du cône

Digitized by Google

ne rencontre pas celui du cylindre, mais qu'il tombe perpendiculairement ſur ſon côté, c'eſt-à-dire ſur une ligne priſe à la ſurface du cylindre parallele à ſon axe: je dis que la courbe eſt encore la même.

Fig. 73. Soit (*Fig.* 73.) le triangle *b*Sa, qui pénetre le cylindre G*gd*D, dont l'axe S C ne rencontre pas celui du cylindre KX, comme on le voit par le profil, où *s* C' ne paſſe pas par le centre *x* du cercle 2*el*, mais qui tombe perpendiculairement ſur le côté du cône, comme ſi ST eſt perpendiculaire ſur HI, ſi l'on imagine un plan SEL, coupant l'axe du cylindre perpendiculairement à la ligne HI, les points E & L, qui ſont à l'interſection des côtez du cylindre Q*q*, R*r*, & de ceux du cône SE, SL ſeront communs aux deux ſurfaces, & par conſéquent à la circonference de la ſection ſolide. Si enſuite on ſuppoſe un ſecond plan, paſſant par ces deux points parallelement à l'axe KX du cylindre, il ſera deux ſections, l'une dans le cylindre, qui ſera un parallelograme Q R *r q*, & une Ellipſe EML dans le cône, qu'il coupe obliquement; parce que l'axe SC du cône ne paſſe pas par le centre du cercle, qui eſt la ſection faite dans le cylindre par le plan ESL, où il faut remarquer, que dans la figure on a repréſenté ce plan en perſpective, enſorte qu'il n'eſt pas perpendiculaire à HI; pour éviter la confuſion des lignes, & faire voir l'arc ETL, partie de ce cercle, qui auroit été confondu en une ligne droite.

Si ſuivant notre méthode on mene des ordonnées M*m*, N*n* à l'axe EL de l'Ellipſe, & que par les points de ſa circonference MN, *mn*, qui ſont dans le cylindre, on tire des lignes au ſommet du cône S, ces lignes ſeront à ſa ſurface & couperont celle du cylindre (au deſſous de laquelle les points MN, *mn* ſont enfoncez) en quelques points comme *y* Y, V & *u*, leſquels ſeront à la circonference de la ſection ſolide, comme il eſt évident, puiſqu'ils ſont à l'interſection des côtez du cône & de ceux du cylindre; donc la ligne qui paſſera par les points E*y*YL V*u* ſera la courbe de la circonference de la ſection ſolide.

Maintenant pour trouver le rapport des ordonnées de cette ſection avec celles de l'Ellipſe plane EML*m*, qui eſt la ſection oblique du cône par un plan, il n'y a qu'à mener des paralleles aux lignes SP & S*p* par les points Y & *y*, leſquelles retrancheront des ordonnées de l'Ellipſe les differences M*b*, N*o* de leurs excès ſur celle de la ſection ſolide Y*x*, *yz*, & donneront les analogies ſuivantes, à cauſe des triangles ſemblables SPM, Y*b*M & S*p*N, *yo*N, qu'on a répeté à côté de la figure, pour éviter la confuſion des lignes S P : P M :: Y*b* : *b*M & S*p* : *p*N :: *yo* : *o*N; donc la courbe E*y*YL eſt une Ellipſoïdimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

Digitized by Google

REMARQUE.

152. On voit ici que la difference des ordonnées de la ſection ſolide à l'Ellipſe eſt en défaut, comme l'on a vû dans les exemples des ſections précedentes, dans la partie la plus près de la baſe (*Fig.* 72.) ce qui ſemble ſe contrarier, puiſque les ſections oppoſées ſont tournées en ſens contraire ; mais il faut remarquer que dans le cas précedent les points E & L ſont conſiderez poſez ſuivant la longueur du cylindre, enſorte que le plan par la ligne E L eſt tangent, par conſéquent au dehors du cylindre, & de la ſection ſolide ; & qu'ici au contraire le plan paſſant par EL coupe le cylindre & ſe trouve au dedans de la ſection, de ſorte que l'Ellipſe plane à laquelle on la compare, étant differemment ſituée, il n'eſt pas étonnant qu'elle donne des analogies de défaut, quoique la ſection ſoit plus près du ſommet, où elle donneroit de l'excès ; ſi on l'avoit ſituée comme à la figure 72. en examinant la ſection, qui paſſeroit par *e*T/ du profil. Au reſte les rapports ſont toujours les mêmes dans chaque plan paſſant par les ordonnées des deux ſections & le ſommet du cône. La diſtance de ce ſommet à l'ordonnée de la ſection plane eſt toujours à cette ordonnée, comme la profondeur de la ſection ſolide eſt à la difference des ordonnées des deux ſections par excès ou par défaut.

Il eſt aiſé de voir les differences qui peuvent arriver à ces Courbes dans les cônes ſcalenes, où les ſections planes que nous avons conſideré comme des Ellipſes, peuvent être des cercles.

153. *Quatriéme cas.* Où l'axe du cône tombe obliquement ſur les côtez du cylindre, il n'y aura aucune difference de ſection, toute celle qui en peut réſulter, c'eſt qu'il peut arriver que les diametres EL & *Mm* deviennent égaux, & que la ſection ſoit une eſpece de cicloïmbre alteré, pour lequel nous n'avons pas fixé de nom.

154. Enfin au cinquiéme & au ſixiéme cas, ſi l'axe du cône tombe perpendiculairement ou obliquement ſur le côté du cylindre, & que le cône ne le pénetre que d'une partie de ſa circonference, la ſection ſera compoſée de deux portions de courbes, l'une plus grande que l'autre ; parce que celle qui approchera du ſommet ſera plus petite que celle qui ſera plus près de la baſe, comme nous l'avons déja remarqué, & ces courbes feront entr'elles deux angles d'inflexion, plus ou moins rentrans, ſelon que la pénetration du cône dans le cylindre ſera plus ou moins profonde ; car ſi un de ces côtez touche celui du cylindre, elles ſeront toutes les deux fermées & ſe toucheront en un point, comme nous l'avons dit de toutes les autres ſections

compoſées, ce qui ne mérite pas de répetition, avec cette difference que celles-ci ne peuvent pas être égales, quand même les deux côtez du triangle par l'axe du cône toucheroient le cylindre. Et ſi enfin ces deux côtez du cône s'élargiſſent, de ſorte qu'ils ſoient tous les deux hors du cylindre, la ſection change de nature, & retombe dans le cas du Theoréme précedent, où le cône embraſſe le cylindre; car il s'agit alors de conſiderer la pénetration du cylindre dans le cône, & non pas celle du cône dans le cylindre, dont nous avons fait la diſtinction au commencement de ce Chapitre.

Application à l'uſage.

155. Cette propoſition fait connoître quelle eſt la Courbe de l'arête d'enfourchement de toutes ſortes de lunettes ébraſées dans des berceaux, ſoit qu'elles ayent leurs naiſſances de niveau avec celle du berceau, & qu'elles ſoient Droites, comme au premier cas; ſoit qu'elles ſoient biaiſes comme au ſecond; ſoit que leurs naiſſances ſoient au deſſus ou au deſſous de celle du berceau, comme dans le troiſiéme & quatriéme cas, ce qui peut ſouvent arriver; ſoit enfin que la lunette fût priſe en maniere d'Abajour, en partie hors du berceau, ce qui ne peut guères arriver, à moins qu'on ne voulût le faire exprès par caprice, ou au bout d'un berceau, comme on en voit aux Souterrains des nouvelles Fortifications de Manheim dans le Palatinat.

Fig. 74. La figure 74. fait voir l'effet du cône, qui embraſſe le cylindre, enſorte que les deux ſections ſe raprochent, tellement que ſi le cylindre s'écartoit encore un peu plus du milieu du cône, elles n'en feroient plus qu'une compoſée.

CHAPITRE VII.

Des Sections faites par la pénetration des Cônes entr'eux.

UN cône peut être à l'égard d'un autre cône de differente grandeur, & en differente poſition; d'où réſultent les cas qui changent la nature des ſections formées à leurs ſurfaces, par leur pénetration mutuelle.

La combinaiſon de leur ſituation reſpective peut beaucoup plus va-

Digitized by Google

ſier que celle des cylindres entr'eux, qui ſont des corps plus ſimples, & dont les ſections ne peuvent être que de trois eſpeces; celles des cônes au contraire peuvent être de cinq eſpeces, qui donnent neuf combinaiſons, rejettant les inutiles. Je ne doute pas cependant qu'on ne puiſſe trouver une formule generale, qui comprendroit tous les cas des ſections ſolides, qui peuvent ſe faire par la pénetration des cônes entr'eux, dans quelque ſituation que ſoient leurs axes & leurs côtez, les uns à l'égard des autres, il ſeroit à ſouhaiter que quelque Sçavant Algebriſte voulût y travailler. Le célebre M. Bernoully de Bâle, qui a bien voulu jetter les yeux ſur ce petit Ouvrage, & me donner des inſtructions ſur la Courbe de la ſection de l'Anneau, m'a dit que le calcul pour la formule generale de l'interſection des cônes étoit plus long que difficile, pour moi qui le trouve au deſſus de mes forces, je me contenterai de ce que la geometrie lineaire pourra nous indiquer ſuivant notre méthode ordinaire, de la ſuppoſition des plans coupans ces corps de differentes façons, & comparant les ſections planes aux ſolides; & quoique je n'en approfondiſſe pas la Theorie, je fournirai les moyens néceſſaires à la pratique pour en trouver les courbes par celui de la projection, ce qui ſuffit au projet de cet Ouvrage, où l'on s'eſt borné aux connoiſſances qui doivent être de quelque uſage dans l'Architecture. Je puis auſſi dire que les rencontres des voutes coniques entr'elles ſont des cas aſſez rares, comme on le verra au quatriéme Livre; cependant nous ne laiſſerons rien à déſirer de ce qui peut tomber en pratique, quoique nous ne puiſſions donner ici une Theorie complete ſur cette matiere; quelque Sçavant pourra peut-être ſuppléer à ce qui manque ici à la curioſité.

THEOREME XXVII.

Les Sections faites par la pénetration de deux Cônes égaux, dont les Axes (s'ils ſont Droits) ou les côtez ſemblables (s'ils ſont Scalenes) ſe coupent à diſtances égales de leur Sommet, ſont des Sections Planes.

Ce Theorême contient ſept combinaiſons de poſition de cônes, qui ſe pénetrent, lorſqu'ils ont l'axe commun & qu'ils ſont tournez en ſens contraire.

1.° Lorsque leurs axes ſe confondent, & qu'ils ſont tournez en ſens contraire, comme à la fig. 83. *Fig.* 83.

2.° Lorsque les cônes ſont Droits & leurs axes paralleles entr'eux. *Fig.* 75.

3.° Lorsque leurs axes ſont inclinez entr'eux, & qu'étant prolongez ils ſe rencontrent au-delà des ſommets. *Fig.* 76.

Fig. 77. 4.° Lorsqu'etant inclinez ils ſe croiſent au deſſous des ſommets, & que les côtez oppoſez ſont paralleles entr'eux.

Fig. 78. 5.° Lorsqu'ils ſe croiſent au deſſous des ſommets, & que les quatre côtez ſe coupent,

Fig. 79. 6.° Lorsque, les cônes étant ſcalenes, les côtez ſemblables & oppoſez ſont paralleles entr'eux, mais tournez en ſens contraire, le ſommet de l'un, du côté de la baſe de l'autre.

Fig. 80. 7°. Lorsqu'etant auſſi ſcalenes ils ſont tournez en ſens contraire, ſeulement à l'égard de la baſe, & qu'ils ont un axe commun.

Au deuxiéme & troiſiéme cas la ſection HD eſt une hyperbole; au quatriéme, PR une parabole; au cinquiéme, EL, & au ſixiéme, *b*B une Ellipſe; & au ſeptiéme, SD*d* un triangle iſoſcele.

Demonstration.

Si l'on ſuppoſe un plan paſſant par les axes des deux cônes il fera par la ſuppoſition deux triangles ſemblables & égaux ASB, a*s*b, & ſi un ſecond plan perpendiculaire à celui-ci, le coupe par le point H d'interſection des côtez SB, *s*a, & des axes CX, *c*X en X, ou paralellement aux axes, s'ils ſont paralleles entr'eux comme la figure 75. il eſt clair qu'il retranchera des ſegmens de cercles égaux DEa, DE*b*, dans chaque baſe du cône; puiſque les abſciſſes Da, D*b*, qui ſont les fléches des arcs, ſont égales par la ſuppoſition; mais auſſi il retranchera des ſegmens de cône DHa, DHB, qui ſeront de même hauteur & inclinaiſon ſur ces portions de baſe, puiſqu'il les coupe à diſtances égales des ſommets S & *s* par la ſuppoſition; donc tous les arcs de ces ſegmens de cône, paralleles à ceux de la baſe comme *f*G, FG, ſeront encore égaux entr'eux, parce qu'ils ſeront coupez en même raiſon dans chaque cône à même diſtance de la baſe; donc ils n'avanceront pas plus d'un côté que de l'autre; & par conſéquent aboutiront au même plan, qui fera deux ſections égales, une à droite dans un cône, & une à gauche dans l'autre, ou pour mieux dire une ſection équivalante à deux.

Fig. 76. & 75.

Quant à la figure de la ſection, il eſt viſible qu'elle ſera déterminée par la poſition du plan coupant perpendiculairement les triangles par les axes, comme s'il n'y avoit qu'un ſeul cône, puiſque ſa poſition à l'égard de l'autre eſt ſuppoſée égale.

Appli-

Digitized by Google

Application à l'uſage.

Cette propoſition, conſiderée 1.° au ſecond & troiſiéme cas, fait voir quelles ſont les arêtes de rencontre des crenaux paralleles, convergens & divergens, joints enſemble dans une ſeule ouverture intérieure, comme on en voit en pluſieurs vieux Chateaux, & dans les Fortifications modernes aux Redoutes de Luxembourg & ailleurs. 2.° Au quatriéme & cinquiéme cas des cônes égaux, dont les axes & les côtez ſe croiſent, on voit quelle eſt la Courbe, qui ſe forme à l'angle rentrant des enfourchemens des voutes ſphériques, fermées en polygones, à leurs diagonales dans la méthode du *Trait*, qui ſuppoſe des cônes tronquez, inſcripts dans la ſphère, pour y former des Panneaux de dévelopement, comme on le verra au Chapitre ſeptiéme du quatriéme Livre, où nous ferons voir en quoi conſiſte l'erreur du trait du P. Deran & du P. Déchalles qui l'a ſuivi, & que M. de La Rue, qui l'a connu à-peu-près n'en a pas apperçû la raiſon. 3.° Au 6.e cas, cette propoſition fait voir quelle ſeroit la courbe d'arête d'enfourchement d'une *Corne de Vache double* exactement faite, comme ſi ſes piédroits étoient ceux d'un biais paſſé. *Fig.* 75. 76. & 77. *Fig.* 78. *Fig.* 79.

4.° Au 7.e cas elle fait voir que les Trompes coniques, que tous les Auteurs de la coupe des Pierres mettent aux angles des Eſcaliers, ſuſpendus à repos, ſont un compoſé de deux cônes, qui ſont un *Jarret* à la clef, en angle ſaillant; car la ſection par les points A & a, faite par un plan perpendiculaire aux deux triangles par l'axe commun SX, fait deux Ellipſes, l'une AC dans le cône ſcalene ASB, l'autre a *c* dans l'autre cône égal S*ab*, leſquelles ſe croiſent en *m* ou en *i* entre les deux axes *c*H & C*b*, de ſorte que cette ſection eſt une courbe compoſée, telle qu'elle eſt repréſentée en A*Hiba*, & en projection par la droite A *c m* C a. *Fig.* 80.

THEOREME XXVIII.

La Section faite par la pénetration des Cônes Droits inégaux, dont les Axes ſe confondent, ou des Cônes Scalenes inégaux, dont les Axes ſe confondent, & ſont également inclinez à leurs Baſes, eſt un Cercle.

La vérité de cette propoſition ſe préſente d'elle-même, & n'a pas beſoin de démonſtration; car les ſections planes, paralleles à la baſe par les points communs E F & D*d*, *d d*, ſont des cercles communs aux deux cônes, ſoit que les baſes ſoient confonduës comme aux figures 81. 82. ou parallelement éloignées comme aux figures 83. & 84. *Fig.* 81. 82. 83. & 84.

THEOREME XXIX.

La Section faite par la pénetration de deux Cônes inégaux, mais ſemblables, dont les Axes & les Côtez ſont paralleles entr'eux, eſt un Paraboloïdimbre.

Fig. 85. Soit (*Fig.* 85.) le triangle A*s*D la ſection par l'axe du petit cône, & BSE celui du grand, & le point P commun aux deux ſurfaces des cônes. Si l'on ſuppoſe un plan qui coupe le premier A*s*D perpendiculairement, ſuivant le côté BS, parallele à A*s*, il touchera le grand cône, & fera dans le petit une parabole qu'on repréſente ici par la courbe P*r*RL, dont l'axe ſera PB, auquel ſi l'on tire à volonté les ordonnées *or*, OR, & par le ſommet *s* les droites *srz* & *s*R*y*, ces lignes, qui ſeront les côtez du petit cône, étant prolongées, rencontreront la ſurface du grand BSE en quelques points *z* & *y*, par leſquels on menera des paralleles *zx* & *y*X aux ordonnées *or* & OR, juſqu'à la rencontre des lignes *sx*, *s*X, tirées du ſommet *s* par les points *o* & O, & enfin par les mêmes points *r* & R d'autres lignes *yq*, RQ, paralleles à ces mêmes lignes *sx*, *s*X, on aura des triangles ſemblables *rqz* & *sor*, RQ*y* & *s*OR; par conſéquent les mêmes analogies à l'égard de la parabole plane, qu'on a eu dans les Theorêmes XXIII. & XXV. à l'égard de l'Ellipſe, ſçavoir, la diſtance du ſommet du cône à l'ordonnée de la ſection plane, à cette même ordonnée, comme la diſtance à celle de la ſection, eſt à la difference des deux ſections *so* : *or* :: *rq* : *qz*, & *s*O : OR :: RQ : Q*y*; donc la ſection (par la def. 4.) eſt un paraboloïdimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

THEOREME XXX.

La Section faite par la rencontre des ſurfaces de deux Cônes, qui ſe pénetrent, dont les Axes ſont paralleles, & dont l'un des Côtez d'un des Triangles par l'Axe rencontre celui de l'autre [prolongé s'il le faut] eſt une Ellipſoïdimbre.

Fig. 86. Soit [*Fig.* 86.] les triangles B*s*A & *b*Sa la ſection faite par un plan paſſant par les axes de deux cônes qui ſe pénetrent, dont les points E & L ſont communs aux deux ſurfaces. Si l'on ſuppoſe un plan paſſant par EL perpendiculairement au premier, il touchera le cône B*s*A, & fera une Ellipſe dans l'autre *b*Sa, qu'il coupe obliquement ſuivant la ligne EL, qui en ſera le grand axe, auquel ayant mené des ordonnées *or* & OR à volonté, on tirera par le point S des lignes S*r* & SR, juſqu'à la rencontre de la ſurface du cône B*s*A en *z* & en *y*, ces points ſeront à la circonference de la ſection ſolide, laquelle ſera la courbe E*zy*L; or faiſant, comme au Theorême précedent *zx*, parallele à *ro*,

Digitized by Google

& *y* X parallele à RO juſqu'à la rencontre des lignes S *o*, SO, tirées du ſommet du cône, & prolongées vers *x* & X, & tirant enſuite des mêmes points *r* & R des lignes *r q* & RQ paralleles aux lignes S *x* & SX, on aura les mêmes Analogies à l'égard des ordonnées de l'Ellipſe, qu'on a eu dans la propoſition précedente à l'égard de la parabole; ſçavoir, S*o* : *or* : : *rq* : *qz*, & SO : OR : RQ : Q*y*; donc la ſection ſolide eſt une Ellipſoïdimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

Nous avons ajouté à l'énoncé de la propoſition, que le côté d'un des triangles par l'axe d'un cône devoit couper celui de l'autre, prolongé [s'il le faut] parce qu'il peut arriver comme à la fig. 89. que le côté *s*A du triangle B *s* A ne rencontre pas le côté S a de l'autre triangle, mais il le rencontrera ſi l'un & l'autre ſont prolongez vers L; parce que nous ſuppoſons qu'ils ſoient inclinez entr'eux, & non pas paralleles; de ſorte que la ſection ſera toujours la même. La ſeule difference qu'il y aura avec le cas précedent, c'eſt qu'elle ne ſera pas une Ellipſoïdimbre complete, mais mutilée, qui ſera défaillante de toute la partie correſpondante à A L de l'axe ſouſtendant EL, laquelle eſt hors du cône. *Fig.* 89.

REMARQUE.

156. Il faut remarquer que, quoique le plan que l'on feroit paſſer par la ligne SE perpendiculairement à celui des triangles par les axes *s* C, S*c*, doive faire une hyperbole dans le cône A *s* B, la ſection ne ſera pas pour cela une hyperboloïdimbre; parce que les côtez A *s* & aS étant divergens vers S, ſont convergens vers L; de ſorte qu'en prolongeant ces côtez, on revient toujours au premier cas de l'Ellipſoïdimbre.

THEOREME XXXI.

La Section faite par la rencontre des ſurfaces des deux Cônes, dont les Axes ſe coupent perpendiculairement ou obliquement, enſorte que les côtez prolongez de l'un ou de l'autre, ne ſe rencontrent pas au deſſus & au deſſous du ſommet d'un d'entr'eux, eſt une Ellipſoïdimbre.

La démonſtration de cette propoſition eſt tellement ſemblable à celle de la précedente, qu'on s'eſt contenté d'en mettre ici la figure, pour le cas où les axes ſe coupent perpendiculairement; & la figure 88. pour celui où ils ſe coupent obliquement; en coupant les cônes, qui traverſent, par des plans tangens aux cônes qui ſont pénetrez, comme on a fait cy-devant, il ſera bien aiſé de voir les rapports des ordonnées de la ſection ſolide à celle de la ſection plane, & parce que ſuivant *Fig.* 87. & 88.

les conditions du Theorême, ces ſections planes ne peuvent être que des Ellipſes ſi les cônes ſont Droits, ou des cercles s'ils ſont ſcalenes ; il ſuit que la ſection ſolide ſera une Ellipſoïdimbre, ou eſpece de cicloïmbre élargi ou reſſerré, c'eſt-à-dire une courbe, dont les ordonnées ont un excès ou un défaut ſur celles du cercle.

Nous n'avons rien à ajouter à ce que nous avons dit des ſections oppoſées ; elles ſont ici comme ailleurs les mêmes, diſpoſées en ſens contraire à l'égard du ſommet, & l'une toujours plus petite que l'autre.

On verra par le Theorême ſuivant, la raiſon pour laquelle nous exceptons dans l'énoncé de celui-ci, le cas où les côtez prolongez ſe rencontrent.

THEOREME XXXII.

La Section faite par la rencontre der ſurfaces de deux Cônes, dont les Axes ſe coupent obliquement, & dont un Côté d'un des Triangles par l'Axe rencontre les deux de l'autre Triangle, qui eſt dans le même Plan, ou un des côtez étant prolongé au deſſus de ſon ſommet, eſt une Hyperboloïdimbre dans l'un & l'autre Cône.

Fig. 91. Soient [*Fig.* 91. les triangles BSA & DEF les ſections d'un plan paſſant par les deux axes CS & *g* E, des cônes qui ſe pénetrent dans une poſition reſpective, où le côté DE rencontre les deux du triangle BSA, l'un SA qu'il coupe naturellement en H, l'autre BS en *y*, parce qu'il eſt prolongé au delà du point S en *y* ; ou bien, où le côté SA du triangle BSA rencontre les deux DE, EF du triangle DEF, ſçavoir DE en H, & FE prolongé en X.

Si l'on ſuppoſe des plans perpendiculaires à celui qui paſſe par les axes SC, E*g*, & qui coupent les cônes, l'un par HA, l'autre par HD, les ſections qu'ils feront ſeront des hyperboles, dont HA & HD ſeront les axes, & HX, H*y* les axes déterminez, & les mêmes plans qui coupent un cône ſeront tangens de l'autre. Soit une moitié de ces hyperboles la courbe H*r*R, ſur laquelle ayant pris le point *r* à volonté, on menera l'ordonnée *r o* à l'axe HD, & par le même point *r* & le ſommet S la ligne S*r z*, cette ligne rencontrera la ſurface de l'autre cône DEF en quelque point *z*, qui ſera à la circonference de la Courbe de la ſection ſolide, qui paſſera par le point H, commun aux deux ſurfaces, & par le point *z*, qui leur eſt auſſi commun, puiſqu'il eſt la rencontre du côté du cône BSA avec la ſurface de l'autre DEF ; or parce que la ligne S*r z*, part du même point S, que la ligne SA, ces lignes s'écartent & ſont divergentes, de ſorte qu'on peut ſuppoſer comme

aux Theorêmes précedens une ligne parallele à SA, & tirée du point *r*, juſqu'à la rencontre de la ligne *zx*, ce qu'on n'a pû faire bien nettement dans la figure pour éviter la confuſion des lignes, mais qu'on peut bien ſe repréſenter par la figure 90. miſe à côté, où *bx* repréſente HD, & l'on aura des triangles ſemblables *sor*, *rqz*; donc S*o* ou E*o*: *or* :: *rq*: *qz*; par conſéquent la courbe qui paſſera par *bz*, ſur la ſurface des cônes, ſera une hyperboloïdimbre, *ce qu'il falloit démontrer.* *Fig.* 90.

Il en ſera de même à l'égard de l'autre cône, & cette ſection commune variera ſuivant la difference des grandeurs reſpectives des deux cônes.

THEOREME XXXIII.

La Section faite par la rencontre des ſurfaces de deux Cônes, dont les Axes ſe coupent obliquement, & dont un des Côtez des Triangles par l'Axe eſt parallele à un des Côtez de l'autre Triangle de la Section par l'Axe de l'autre Cône, eſt une Courbe équivalemment differente dans chaque Cône; ſçavoir un Hyperboloïdimbre dans l'un des Cônes, & un Paraboloïdimbre dans l'autre, ſelon que l'un des deux Cônes ſurpaſſe ou eſt ſurpaſſé par l'autre, dans l'allignement de ces Côtez.

Soient [*Fig.* 92.] les triangles BSA & DEF les ſections de deux cônes, coupez par un plan qui paſſe par leurs axes *c*S, CE, leſquels étant prolongez vers K ſe coupent obliquement. Soit auſſi le côté DE parallele au côté BS; il faut démontrer que la courbe H*x*, qui eſt faite par l'interſection des ſurfaces de ces deux cônes, a des rapports d'excès & de défaut avec les ſections planes, faites par des plans tangens aux côtez des cônes SA & DE, ce qui ſe fera de la même maniere qu'à la propoſition précedente; car le plan tangent par DE fera une parabole dans le cône BSA, & le plan tangent en SA fera une hyperbole dans le cône DEF, dont YH eſt l'axe déterminé, & HI l'axe prolongé; or ſi l'on prend dans le contour de ces courbes differentes un point *r*, par lequel & par le ſommet on tire une ligne S*rz*, qui rencontre la ſurface de l'autre cône en *z*, la courbe, qui paſſera par H & *z* ſera celle de l'interſection des deux corps; mais du même point *z* menant au ſommet E une ligne *z*E, cette ligne qui ſera un côté du cône DE*f* paſſera à la circonference de l'hyperbole, dont HI eſt l'axe & ſon ordonnée, c'eſt-a-dire la perpendiculaire menée du point *z* au plan paſſant par les axes, aura un rapport d'excès ou de défaut avec cette hyperbole, qui ſera proportioné à la profondeur de la ſection ſolide, ceſt-à-dire à la diſtance du plan de l'hyperbole, meſurée dans un plan paſſant par les ordonnées correſpondantes & le ſommet du cône; donc cette ſection ſera un paraboloïdimbre, conſiderée comme étant dans le cône DEF, & une hyperboloïdimbre, conſiderée dans le cône BSA, *ce qu'il falloit démontrer.* *Fig.* 92.

Il faut ici que l'imagination aide un peu à la figure, qui ne peut bien repréſenter le relief.

Il nous reſteroit à déterminer la courbe, qui ſe fait par l'interſection des ſurfaces des cônes, dont les axes ne ſe coupent pas & ne ſont pas paralleles; mais ſans qu'il ſoit beſoin d'un Theoréme general, nous pouvons en trouver autant de points que nous voudrons pour chaque poſition reſpective de cônes donnez; ce qui ſuffit à la pratique, puiſque nous démontrerons que chacuns de ces points ſont bien trouvez, comme on le verra au Livre ſuivant.

Nous n'ajouterons rien ici des ſections compoſées de deux portions de courbes, qui ſe mutilent réciproquement, lorſqu'un cône n'en pénetre un autre que d'une partie de ſa circonference; nous en avons aſſez dit aux Theorêmes XXI. & XXVII. où nous avons auſſi fait remarquer que ces parties de ſections ſont toujours inégales; celle qui approche le plus du ſommet étant toujours la plus petite.

USAGE.

157. Les rencontres des voutes coniques entr'elles tombent rarement dans la pratique, nous n'en trouvons d'exemples que dans les Trompes & voutes coniques, qui rachetent une Tour ronde & en talus, dans les lunettes ébraſées d'une voute en canoniere, ou dans les crenaux qui ſe croiſent, ce qui eſt de peu d'uſage & de conſéquence.

CHAPITRE VIII.

Des Sections faites à la ſurface des Sphéroïdes, pénetrez par des Sphères, Cônes ou Cylindres.

Fig. 93. & 94. NOus avons diſtingué au Chapitre IV. differentes ſortes de ſphéroïdes, mais nous ne parlons ici que des plus réguliers, qui ſont faits par la révolution d'une demi-Ellipſe ſur un de ſes axes, ſçavoir de *l'Oblong* PL*p* [*Fig.* 93.] ſur le grand axe P*p*, & de *l'Applati*, ſur le petit axe AL comme P*tp* [*Fig.* 94.]

Digitized by Google

THEOREME XXXIV.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'un Sphéroïde avec celle d'une Sphère, d'un Cylindre & d'un Cône, qui le pénetrent, ou qui en ſont pénetrez, de maniere que les Axes de ces Corps ſe confondent, eſt un Cercle.

Cette propoſition eſt claire, ſi l'on fait attention à la generation de ces corps, car :

1.° Pour le ſphéroïde & la ſphère, puiſque le ſphéroïde eſt formé par la révolution d'une demi-Ellipſe DBE ou *dbe* ſur ſon axe, DE ou ſur le petit *de*, & la ſphère par celle d'un demi cercle PF*p*, l'ordonnée MO ou *mi* à l'axe commun D*e*, auquel elle eſt perpendiculaire, étant commune au ſphéroïde & à la ſphère, formera par ſa révolution autour de ſon point M ou *m*, immobile, un cercle qui ſera commun à la ſphère & au ſphéroïde, dont la circonference ſera à la ſurface de l'un & de l'autre; par conſéquent à leur interſection, *ce qu'il falloit démontrer.* Fig. 95.

2.° Le même raiſonnement s'applique naturellement à l'interſection des ſurfaces du ſphéroïde & du cylindre Droit; [*Fig.* 96] puiſque ce dernier eſt formé par la révolution d'un parallelograme rectangle MO *im*, ſur ſon côté M*m*; or dans la ſuppoſition que ce côté qui eſt l'axe du cylindre, ſe confond avec les axes du ſphéroïde, ſoit Applati comme *dbe*, ou alongé comme DBE, il eſt viſible que les côtez MO & *mi* ſont des ordonnées communes, dont la révolution fait un cercle, qui ſera l'interſection commune de ces deux corps. Fig. 96.

3.° Il en ſera de même de l'interſection d'un ſphéroïde & d'un cône Droit, qui eſt formé par la révolution d'un triangle rectangle SCF ou *scf*, ſur ſon côté SC ou *sc*, qui en devient l'axe, paſſant par les axes des Ellipſes, qui engendrent le ſphéroïde, les ordonnées MO & *mi* feront les rayons des cercles, dont la circonference ſera l'interſection des deux ſurfaces, ſoit que le ſommet *s* du cône ſoit au dehors du ſphéroïde ou au dedans comme KCF, (*Fig.* 97.) auquel cas l'ordonnée commune eſt *nb.* ou *vu* fig. 98. Fig. 97. & 98.

Application à l'uſage.

Cette propoſition fait voir que l'arête d'enfourchement d'une lunette en Berceau ou Ebraſée, qui rachete une voute en cû-de-four ſurhauſſée ou ſurbaiſſée, dont les impoſtes ſont de niveau à celle de la voute, & dont la direction, c'eſt-à-dire celle de leurs axes, tend au centre du cû-de-four, eſt une circonference de cercle, en terme de l'Art, un plein ceintre.

De même que l'arête d'enfourchement d'une niche ſurhauſſée ou ſurbaiſſée, ou plutôt renfoncée ou applatie par ſon plan horiſontal, dans une voute ſphérique, avec les mêmes circonſtances de direction de ſon axe au centre de cette voute eſt un cercle, ce qui n'eſt pas rare dans les bâtimens.

THEOREME XXXV.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'une Sphère & d'un Sphéroïde, dont l'Axe ne paſſe pas par le Centre de la Sphère, eſt une eſpece d'Ellipſoïdimbre, c'eſt-à-dire, une Courbe à double Courbure, dont on peut marquer quelque rapport conſtant à une Ellipſe.

Soit une ſphère ABRN, pénetrée par un ſphéroïde APB*p*, dont l'axe P*p* ne paſſe pas par le centre C de la ſphère. Si l'on ſuppoſe un plan paſſant par le centre & par l'axe du ſphéroïde, il fera pour ſection un cercle dans la ſphère & une Ellipſe dans le ſphéroïde, par le Theoréme V. dont l'interſection qui eſt aux points A & B marquera que ces points ſont communs aux deux ſurfaces, mais non pas les autres points de ces deux courbes, qui ſont l'une en dedans de la ſphère, l'autre au dehors du ſphéroïde, de ſorte que ni l'une ni l'autre de ces ſections ne peut être commune à la ſphère & au ſphéroïde.

Presentement ſi l'on veut lui chercher quelque rapport avec d'autres courbes planes, il faut ſuppoſer un plan perpendiculaire au premier (comme nous avons fait juſqu'ici) paſſant par les points communs A & B, lequel fera deux ſections de même eſpece que les précedentes, ſçavoir une Ellipſe AKB dans le ſphéroïde, & un cercle AMB dans la ſphère ; d'où il ſuit évidemment que la commune ſection de ces deux ſurfaces eſt une courbe à double courbure ; puiſqu'elle ne peut être en même tems cercle & Ellipſe, & cette courbe étant tournée du côté du Póle P du ſphéroïde, a des ordonnées à ſon axe courbe AYB, toujours moindres que celles de l'Ellipſe plane de la ſection faite par les points communs A & B dans le rapport des ordonnées à l'axe P*p* du ſphéroïde, qui paſſe l'un par l'axe ſouſtendant AB, l'autre par l'axe courbe AYB.

On pourroit conſiderer le ſphéroïde comme une infinité de petits cônes tronquez (*Fig.* 101.) faits par la ſection de pluſieurs plans *e e*, perpendiculaires à ſon axe P*p*, & c'eſt ainſi en effet qu'on le reduit le plus ſouvent pour la pratique de la Coupe des Pierres ; ces cônes tronquez auroient tous leur ſommet ſur l'axe P*p*, prolongé, par exemple, en S, & les cotez du cône *ſ e*, *ſ e* ſeroient tangentes au ſphéroïde. *Fig.* 101.

Alors

Digitized by Google

Alors on pourroit trouver la courbe de la ſection ſolide par les Analogies de celle du cône dans la ſphère comme au Theoréme XIV. mais à chaque cône on auroit un nouveau ſommet S, & parce que le nombre de ces cônes à la ſurface du ſphéroïde eſt infini, il y auroit autant de ſommets que de points dans l'axe prolongé; de ſorte que la courbe de cette ſection n'eſt pas de la même eſpece que l'Ellipſoïdimbre, telle que nous l'avons défini.

Cependant elle y a quelque rapport, la difference eſt que les ordonnées à l'axe de l'Ellipſe, & celles à l'axe courbe de la ſection ſolide n'ont pas des excès ou des défauts les unes à l'égard des autres, en raiſon Arithmetique, comme les côtez du triangle, mais en raiſon Geometrique, comme les racines des quarrez des ordonnées des Ellipſes planes, faites par des plans paſſant par ces ordonnées, & l'extrémité de l'axe du ſphéroïde, ce que l'on va démontrer comme il ſuit.

Ayant ſuppoſé comme ci-devant le ſphéroïde APLp [*Fig.* 101.] qui pénetre une ſphère ABRN, & que les points A & B ſont communs à leurs ſurfaces, ſoit AKBb l'Ellipſe faite par la ſection d'un plan paſſant par AB perpendiculairement à celui qui paſſe par l'axe du ſphéroïde & le centre C de la ſphère. Soit auſſi AMBm le cercle fait par la ſection du même plan dans la ſphère.

Si par le centre C on tire une perpendiculaire CE à l'axe Pp, elle le coupera au point D, duquel pour centre & pour rayon DH ou DN, moitié de HN conſiderée comme corde de la ſphère, ayant décrit un demi cercle HEN, il rencontrera en x la demi-Ellipſe PAp du ſphéroïde, & donnera ainſi un point x commun aux deux ſurfaces, par lequel menant une perpendiculaire xy à l'axe Pp, on aura xy pour ordonnée de la ſection ſolide; mais parce que la ſection plane paſſant par A & B coupe l'axe au point g, l'intervale gy ſera la difference des profondeurs des deux ſections dans la ſphère, & la ligne Fg perpendiculaire à Pp ſera l'ordonnée de la ſection circulaire de la ſphère, & Gg celle de l'Ellipſe dans le ſphéroïde; or par la proprieté de l'Ellipſe $Py \times yp : Pg \times gp :: \overline{xy}^2 : \overline{Gg}^2$. Donc ſi l'on connoit la longueur des ordonnées on trouvera leur diſtance, & ſi on connoit leur diſtance, c'eſt-à-dire, la profondeur de l'axe courbe à la ſection plane par AB, on connoitra les longueurs des ordonnées, & par conſéquent leur difference.

Il en ſera de même ſi par le point P on fait paſſer un plan par les ordonnées or de la ſection ſolide, & nq de l'Ellipſe plane, leſquelles ſont ici exprimées en façon de perſpective à l'égard du cercle

AMB & de l'Ellipſe AKB, qui ſont repréſentez de même, parce que ces deux plans étant partie confondus enſemble, & ayant le diametre commun AB, ſeroient auſſi confondus avec ce diametre, ſi l'on n'aidoit un peu l'imagination.

Pour voir ces ordonnées plus diſtinctement, il faut les conſiderer comme ci-devant, dans un plan perpendiculaire au premier PANR, & paſſant par le pole P comme PR, alors faiſant un demi cercle IQR ſur IR, corde de la ſphère, & une demi-Ellipſe PvL ſur PL, comme grand axe, dont *n* eſt le centre, & ſur *n*Z moyenne proportionelle entre *x n* & *n t* pour moitié du petit axe, l'interſection *v* du demi cercle IQR, & de la demi-Ellipſe P*v*L donnera un point *v* de la ſection ſolide, duquel abaiſſant une perpendiculaire *vo* ſur PR on aura le point *o* à l'axe courbe de cette ſection, & le point *n* à l'axe droit par une analogie ſemblable à la précedente P*o* × *o*L : P*n* × *n*L :: *ov* : *nz*.

Corollaire.

158. D'ou il ſuit qu'on peut trouver autant de points qu'on veut de l'axe courbe & leur diſtance à l'axe droit, ſur un plan paſſant par le point P perpendiculairement au plan paſſant par l'axe P*p* du ſphéroïde & le centre C de la ſphère; puiſque nous avons démontré au Theorême V. que toutes les ſections planes des ſphéroïdes, leſquelles ſont obliques à leurs axes ſont des Ellipſes, & que celles de la ſphères ſont des cercles, on aura toujours à l'interſection de ces deux courbes un point commun, qui ſera à la circonference de la ſection ſolide.

Usage.

159. Cette propoſition fait voir quelle eſt la courbe de l'enfourchement d'une Niche renfoncée ou raplatie dans une voute ſphérique, ſi les impoſtes ne ſont pas de niveau, c'eſt-à-dire, que l'un des deux ſoit au deſſus ou au deſſous de l'autre, quoique chacune ſoit de niveau entr'elles, ou que les unes ſoient de niveau, & les autres rampantes; alors la Courbe de l'arête qui ſe fait à la rencontre des deux ſurfaces, eſt une courbe à double courbure, dont les *Aplombs* ne ſont pas dans une ligne droite, comme au Theorême précedent, & cette courbe a quelque rapport avec celle que nous avons appellé Ellipſoïdimbre, parce que ces ordonnées à ſon axe courbe ont toujours un rapport connu avec celle de la ſection Elliptique ou ſphéroïde, coupé par un plan paſſant par AB.

La même choſe arrivera ſi les Niches, au lieu d'être renfoncées ou

Digitized by Google

raplaties horiſontalement, étoient ſurhauſſées ou ſurbaiſſées verticalement, la ſeule difference qu'il peut y avoir eſt le changement du rapport des ordonnées, qui ont, dans un cas, un excès ſur celles de l'Ellipſe, & dans l'autre un défaut, mais toujours en même proportion.

THEOREME XXXVI.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'un Cylindre droit & d'un Sphéroïde, dont l'Axe eſt perpendiculaire à celui du Cylindre, eſt un Cicloïmbre.

Soit un cylindre ABba, dont l'axe *mn*, prolongé en C & *c*, eſt perpendiculaire à celui d'un ſphéroïde alongé P*fpg*, ou applati P*dpe*. Ayant ſuppoſé ces corps coupez par un plan paſſant par leurs axes, & une ſeconde fois par un autre plan perpendiculaire au premier, & paſſant par les points A & B, a & *b* communs aux deux ſurfaces du cylindre & du ſphéroïde; on reconnoîtra que cette ſeconde ſection ſera un cercle dans le cylindre & une Ellipſe dans le ſphéroïde, laquelle ſera ſemblable à celle de ſa ſection par l'axe P*p*. La rencontre des deux ſurfaces n'eſt donc pas dans un plan, puiſque l'Ellipſe eſt hors du cylindre, & le cercle au dedans du ſphéroïde; cependant elle doit paſſer par les points A & B ou *a* & *b*. *Fig.* 99.

Supposant un troiſiéme plan perpendiculaire au premier, paſſant par l'axe du cylindre, ou parallelement à cet axe, il ſera un cercle dans chaque ſphéroïde, & un parallelograme dans le cylindre. Soit le quart d'un de ces cercles *d*H ou *gb*, & le point X ou *x*, celui où il rencontre le côté du cylindre, ce point ſera commun aux deux ſurfaces, d'où ſi l'on abaiſſe la perpendiculaire XY ou *xy* ſur l'axe C*c*, qui le coupera en Y ou en *y*, ce point ſera un de ceux de l'axe courbe AYB ou a*yb* de la ſection ſolide; mais parce que toutes les ordonnées à cet axe ſont perpendiculaires aux côtez du cylindre, & qu'elles ſe terminent toutes à ſa circonference, il ſuit qu'elles ſont toutes égales & paralleles à celles de ſa baſe, ce qui eſt évident; donc tous les diametres droits ſeront auſſi paralleles & égaux à ceux de la baſe du cylindre, comme nous l'avons démontré en pareil cas au Theorême XVIII. donc la ſection ſolide eſt un cicloïmbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

La difference qu'il y a de celui qui ſe fait à la rencontre des ſphéroïdes differemment poſez à l'égard du grand ou petit axe, eſt que le cicloïmbre, fait à la rencontre des ſurfaces du cylindre & du ſphéroïde alongé, s'approche du grand axe en creuſant, pour ainſi dire, dans ce ſphéroïde, & qu'à celle du ſphéroïde applati, il s'éloigne du petit axe en s'approchant de la ſurface, comme on le voit dans la figure 99. par les lignes AYB & a*yb*.

Digitized by Google

COROLLAIRE.

160. Il eſt aiſé de trouver autant de points que l'on voudra de l'axe courbe, en tirant par un point quelconque K de la ligne *ab* une ligne K*l* parallele à l'axe C*c*, & décrivant ſur *or* & *m*A pour rayons des arcs de cercles. Si l'on fait K*s* = K*s* & *tz* parallele à C*c* pour côté du cylindre, elle coupera l'arc *tr* en *z*, par où on menera *zq* perpendiculaire à L*l*, laquelle donnera ſur *or* un point *q* qui ſera celui de la courbe que l'on cherche.

On appliquera ici tout ce que nous avons dit du rapport des profondeurs de la ſection ſolide au Theorême XVIII. ſoit en les conſiderant comme les fléches des cordes inſcrites dans differens cercles, ou comme les ſinus verſes des ordonnées priſes pour des ſinus droits.

THEOREME XXXVII.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'un Cylindre & d'un Sphéroïde, dont les Axes ne ſe rencontrent pas, eſt une eſpece d'Ellipſimbre.
Et peut être une Ellipſe dans certains cas.

Fig. 100. Soit [*Fig.* 100] un cylindre AB*ba*, qui rencontre obliquement un ſphéroïde alongé ou applati. Ayant ſuppoſé un plan paſſant par l'axe du cylindre, qui ſera pour ſection un parallelograme dans ce corps, & une Ellipſe dans le ſphéroïde, dont les interſections *a* & *b*, A & B donnent des points communs à ces ſurfaces, ſi l'on coupe ces corps par un plan perpendiculaire au premier & paſſant par A & B, a & *b*, la ſection ſera de deux Ellipſes qui peuvent être égales, en ce cas la ſection faite par la rencontre des ſurfaces devient plane; mais comme la difference des ſphéroïdes peut donner une infinité d'Ellipſes differentes, la ſection ſera ordinairement ſolide à cauſe de l'inégalité des Ellipſes du cylindre & du ſphéroïde, ce qu'il eſt aiſé d'appercevoir.

Or parce que toutes les ordonnées de cette ſection doivent être terminées à la ſurface du cylindre auſſi bien qu'à celle du ſphéroïde, il ſuit qu'elles doivent toutes avoir un rapport d'égalité avec celles de l'Ellipſe plane, qui eſt la ſection oblique du cylindre ſuivant la ligne AB, ce que nous avons aſſez expliqué aux Theorêmes IX & X. pour qu'il ne ſoit pas néceſſaire d'entrer ici dans un plus grand détail. Il y a même ſi long-tems que nous rebattons la même démonſtration, appliquée à differentes occurrences, que je crains que le Lecteur ne ſe trouve offenſé de la défiance qu'il ſemble qu'on ait de ſa pénetration, en entrant dans un trop grand détail.

Digitized by Google

Corollaire.

On peut facilement appercevoir les changemens que les cylindres ſcalenes cauſeroient aux ſections faites par la rencontre des ſurfaces des ſphéroïdes ; puiſque les ſections obliques, qu'on a ſuppoſé Elliptiques, peuvent être circulaires, & les perpendiculaires aux axes des Ellipſes.

Application à l'uſage.

Cette propoſition & la précedente font voir quelle eſt la Courbe de l'arête d'enfourchement d'un berceau, qui rachete une voute ſphéroïde ſurhauſſée ou ſurbaiſſée, ou directement ou obliquement. Ce cas n'eſt pas rare dans l'Architecture, telles ſont les lunettes de la voute ſphérique ſurbaiſſée de la Chapelle du St. Sacrement du Val de Grace, dont les Naiſſances ſont audeſſus de celles du cû-de-four, ou hémiſphéroïde applati.

THEOREME XXXVIII.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'un Sphéroïde & d'un Cône, dont l'Axe rencontre celui du Sphéroïde, perpendiculairement ou obliquement, eſt ordinairement Courbe à double Courbure, telle qu'eſt l'Ellipſoïdimbre; mais dans certains cas elle peut être une Ellipſe Plane.

La démonſtration en eſt aiſée ; car 1.° ſi l'axe du cône SC paſſe hors du centre C du ſphéroïde, ou qu'il y paſſe, mais qu'il coupe obliquement ſon axe FG, comme celui du cône DrE, il eſt clair dans ces deux circonſtances, que le plan perpendiculaire à celui qui paſſe par les axes SC du cône, & FG du ſphéroïde, qu'on ſuppoſe auſſi, (comme nous l'avons toujours fait) paſſer par les points communs aux deux ſurfaces A & B, où *a* & *b* fera deux Ellipſes, l'une dans le cône coupé obliquement, comme en *ab*, l'autre dans le ſphéroïde, leſquelles ne ſeront les mêmes que lorſque leurs deux axes ſeront égaux, hors de ce cas ces ſections étant inégales, il eſt clair que la ſection ſolide ſera une courbe à double courbure, telle que celle que nous avons appellé Ellipſoïdimbre, qui aura des excès ou des défauts ſur l'Ellipſe plane du cône, dans le rapport des profondeurs de l'axe courbe. *Fig.* 102.

2.° Si l'axe du cône paſſe par le centre C du ſphéroïde, & perpendiculairement à ſon axe FG, il ſe fera deux ſections en AB, dont l'une ſera un cercle dans le cône, & l'autre une Ellipſe dans le ſphéroïde ; & par conſéquent la ſection ſolide ſera une courbe à double courbure de même eſpece que les précedentes, avec cette difference que les

Digitized by Google

excès ou les défauts de ces ordonnées ſur la ſection plane du cône ſeront comparez à un cercle & non pas à une Ellipſe.

Application à l'uſage.

Les lunettes évaſées dans les voutes en cû-de-four ſurhauſſées ou ſurbaiſſées, ou *ſur un plan Ovale*, c'eſt-à-dire, un ſphéroïde oblong ou applati, ſont le ſujet de ce Theoréme, qui fait voir que l'arête d'enfourchement eſt à double courbure, lorſque l'axe de la lunette, c'eſt-à-dire, la direction de ſon milieu tend au centre. 2.° Qu'elle l'eſt ordinairement ſi elle eſt biaiſe, & que cependant il peut arriver dans ce cas qu'elle ſoit Ellipſe plane.

Nous n'ajoutons rien ici des courbes compoſées des ſections des ſphéroïdes, nous croyons en avoir dit aſſez ci-devant pour mettre le Lecteur en état d'en juger par la comparaiſon des précedentes des autres corps ronds, il eſt tems d'en venir aux Problèmes, qui donnent les moyens de tracer toutes ſortes de ſections.

Si quelqu'un eſt curieux d'entrer d'une maniere plus ſçavante & plus generale dans la Theorie des courbes à double courbure, il peut s'inſtruire parfaitement dans le beau traité de M. Clairaut, dont nous avons parlé. Il ne faut pour l'entendre qu'une médiocre connoiſſance du calcul Algebrique, tant il eſt clair & méthodique dans ſes démonſtrations.

Digitized by Google

TRAITÉ DE STEREOTOMIE.

LIVRE SECOND.

De la Deſcription des Lignes Courbes formées par la ſection des Corps.

DES Corps peuvent être coupez par des ſurfaces planes ou par des ſurfaces courbes.

Les lignes courbes formées par les ſections de la premiere eſpece, peuvent être décrites ſur des ſurfaces planes & ſur des ſurfaces courbes; mais celles de la ſeconde eſpece ne peuvent être exactement décrites, que ſur des ſurfaces courbes, ſi j'en excepte peu de cas. La raiſon eſt que les lignes courbes formées par l'interſection des ſurfaces de deux corps, peuvent être conſiderées comme étant ſur la ſurface qui coupe, & ſur celle qui eſt coupée; puiſque l'interſection eſt commune à tous les deux;

Digitized by Google

par conſéquent ſi on coupe une ſphère, un cône ou un cylindre par une ſurface plane, la courbe peut être conſiderée comme étant ſur le plan qui coupe, & ſur la ſurface de la ſphère du cône ou du cylindre, qui eſt coupé ; ainſi elle peut être décrite ſur deux ſurfaces de differente eſpece, l'une plane, l'autre courbe, & ſi les ſurfaces qui ſe coupent ſont toutes deux courbes, il eſt à préſumer que la ſection ne convient point aux planes ; il en faut cependant excepter certains cas, où la même interſection eſt commune à deux ſurfaces courbes & à une troiſiéme qui eſt plane ; telles ſont les interſections des ſurfaces de deux ſphères, quelquefois de deux cylindres & de deux cônes en certaines circonſtances de poſition & de grandeur, dont nous avons parlé au Livre précedent.

PREMIERE PARTIE.

De la Deſcription des Sections Planes ſur des Plans.

LA plûpart des ſections planes que nous avons pour objet dans cet Ouvrage, ſont ces quatre ſortes de courbes qu'on appelle les *Sections Coniques* ; quoiqu'elles ne ſoient pas toutes particulieres au cône, puiſqu'il y en a deux qui conviennent auſſi à la ſphère & au cylindre.

Nous en avons cependant quelqu'autres à décrire, comme la ſection plane de l'Anneau & la Spirale : cette derniere n'eſt pas proprement une ſection de corps ordinaire, à moins qu'on ne la conſidere comme celle d'un coquillage ; mais à cauſe qu'elles ſont de peu d'uſage en comparaiſon des autres, nous jettons toute notre attention ſur les ſections coniques.

La maniere de les décrire n'eſt pas toujours la même, on eſt ordinairement aſſujetti dans la pratique à les faire paſſer par certains points ou lignes données en dedans ou en dehors, qui en changent totalement la deſcription ; c'eſt ce qu'on appelle les *Données*, qu'on peut tellement varier, que la ſolution des Problemes néceſſaires, pour réſoudre tous les cas poſſibles, fourniroit aſſez de matiere pour un gros Volume ; nous nous bornons ici à ceux qui peuvent être d'uſage dans l'Architecture.

CHAP.

Digitized by Google

CHAPITRE I.

De la Deſcription du Cercle.

NOus avons peu de choſe à dire du Cercle, parce que les Elemens ordinaires de la Geometrie en traitent aſſez au long pour la pratique des arts, & que nous ſuppoſons dans tout cet Ouvrage, que le Lecteur eſt initié dans cette ſcience. Nous voulons ſeulement ſuppléer à ce qu'on n'y trouve qu'indirectement pour la ſolution d'un cas qui ſe preſente aſſez ſouvent en Architecture, tant pour l'exécution des Traits des voutes, que de certains arondiſſemens de mur, dont le Rayon eſt ſi grand, qu'on ne trouve pas commodément une place pour le faire mouvoir ſur un centre; ſoit parce que le lieu du centre eſt embaraſſé, ou enfermé dans quelque bois ou bâtiment, ſoit parce que la longueur de ce Rayon cauſe de la difficulté dans l'uſage du *Simbleau*; car ſi on ſe ſert de Corde, elle s'alonge & altére la régularité du Contour; ſi on lui ſubſtitue une Chaine qui ſemble ne devoir pas s'alonger, elle a auſſi ſes inconveniens; car le frotement interrompt ſon mouvement, lorſqu'elle eſt poſée à plat ſur une aire horiſontale, ou inclinée, & fait varier ſon extenſion quelque précaution qu'on prenne, ce qui doit arriver néceſſairement; car il eſt démontré en Méchanique que quelque petit que ſoit ce Frotement, ou ſon poids, ſi elle étoit penduë par ſes extremitez, elle ne peut ſe mettre en ligne droite, il faut que cette Puiſſance du milieu, Frotement ou Peſanteur s'anéantiſſe, & pour que la Courbure reſte toujours égale, il faut que la Puiſſance, ou l'effort de la main qui tire, ſoit toujours parfaitement égal, ce qui eſt moralement impoſſible; de ſorte qu'on ne peut s'aſſûrer de décrire régulierement un Arc de cercle par ce moyen; celui de faire un Simbleau avec des perches eſt le plus ſûr, mais il a ſes incommoditez, lorſqu'il en faut ajoûter pluſieurs bout-à-bout, il faut le ſoûtenir bien droit pour le faire mouvoir ſans le plier, & ſuppoſer que le milieu n'eſt occupé par aucun mur ni materiaux. Il eſt donc fort agréable de pouvoir éviter toutes ces incommoditez par une pratique de Géometrie que voici.

Probleme I.

Par trois points donnez, tracer un Arc de Cercle par pluſieurs autres points trouvez, ou par un mouvement continu, ſans le ſecours du Centre.

On ne peut à moins de trois points déterminer ni tracer un arc de Cercle, puiſque par deux points donnez, on en peut faire paſſer une infinité de differentes grandeurs, mais ces points peuvent être donnez dans des circonſtances qui occaſionnent differentes manieres de

le tracer : Car 1°. ou on les donne tous trois à la circonference, 2.° ou l'on n'y en donne que deux, & le troiſiéme en idée pour le centre, en déterminant ſeulement la longueur du Rayon, ſans en marquer la poſition à l'égard des points donnez.

Au premier cas les points peuvent être donnez à diſtances égales entre eux, ce qui arrive ſouvent en Architecture, où l'on détermine ordinairement les points des Naiſſances, & celui de la clef pour les voûtes, ou celui du milieu pour les arondiſſemens des murs ; ou bien ces points ſont donnez à diſtances inégales. Ces differentes circonſtances peuvent donner occaſion à differentes manieres de décrire l'arc.

Fig. 103. Soit [*Fig.* 103.] les points ADB donnez aux deux extremitez & au milieu de l'arc qu'on doit tracer. Ayant tiré les cordes AB, AD, DB, on fera du point A pour centre & d'une ouverture de Compas priſe à volonté, l'arc *f* K terminé en *f* & en K aux cordes AD & AB, puis de la même ouverture, & du point B pour centre, on décrira l'arc indéfini FE, dont le point F eſt ſur la Corde DB; enſuite par le point A on tirera autant de lignes droites qu'on voudra avoir de points de l'arc propoſé entre D & B, par exemple ici pour trois, les lignes AX, A*x*, A*y* qui couperont au hazard l'arc *f* K aux points *g b i*, enſuite on portera les parties de cet arc, priſes entre *f* & K, ſur l'arc F E en dehors de F en E ; ainſi *fg* en FG, *fb* en FH, *fi* en FI, & par le point B & les points F G H I on tirera des lignes droites, dont les ſections avec les précedentes donneront autant de points de l'arc demandé, ſçavoir BI, coupant A*y*, donnera le point *y*; BH, coupant A*b*, donnera le point *x*, & BG, coupant A*g*, le point X, on en fera de même pour l'autre côté AD.

Fig. 104. Secondement, ſi le point donné D n'eſt pas au milieu comme à la Fig. 104. on peut trouver pluſieurs points correſpondans à ce point D conſideré comme dans un plus grand ou plus petit arc. Du point *a* pour centre & pour Rayon *a* D, ayant fait l'arc DE ; du point *b* pour centre & de la même ouverture de compas, on fera l'arc *e d* égal à DE, qui donnera un quatriéme point *d*, puis on tirera la droite D *b* qui coupera cet arc en F. du point D pour centre & de la même ouverture de compas *a* D on fera l'arc *f* 3 = F *d* qui donnera le point 3. on tirera *d a* qui coupera l'arc *f* 3 en G ; du point *a* pour centre & de la diſtance *d* 3. pour Rayon ; on fera l'arc *g* 4. = G 3. qui donnera le point 4 ; ainſi de ſuite, on trouvera autant de points qu'on voudra, par leſquels avec une Regle pliante on tracera l'arc a D *b*, qui eſt celui qu'on cherche.

Demonstration.

Dans la premiere conſtruction, où les angles DAB & ABD ſont é-

gaux, les lignes AX, A*x* & A*y* ſont des angles avec la corde AB plus petits que DAB de la quantité d'une partie de l'arc *fk*, qui en eſt la meſure : par exemple AX, de la quantité *fg*, de laquelle on a augmenté l'angle ABD, en tirant par le point G au dehors, la ligne BX, qui rencontre AX au point X; donc la ſomme des angles XAB, XBA eſt égale à celle des angles DAB, DBA, dont le ſupplément a deux droits, AXB eſt égal à l'angle qui eſt à la circonference ADB : donc (par la 21. du 3. Livre d'Euclide) le point X eſt à la circonference du même arc de cèrcle, que les points donnez ADB. ainſi des autres *x* & *y*.

Dans le deuxiéme cas il eſt viſible qu'on a fait l'angle *bd*a = a D*b*, de même que l'angle D*bd* = *b*D 3 ; a d 3. = *d* a 4. donc tous les points trouvez ſont dans le même arc que les donnez a D*b*, puiſque les angles faits dans chaque ſegment ſont toûjours égaux à ceux que font les cordes des points correſpondans D & *d*, *d* & 3, 3 & 4, D & 5, & c. *ce qu'il falloit faire.*

Corollaire.

De la proprieté du cercle dont nous venons de faire uſage, on tire une maniere *de décrire un Arc de Cercle organiquement par un mouvement continu ſans le ſecours du Centre & ſans connoître la longueur du Rayon*, mais ſeulement par le moyen de trois points donnez.

Car (*Fig.* 107.) ſi l'on fait avec deux regles de bois GE, EI aſſemblées par le moyen d'une troiſiéme FH, un angle GEI égal à l'angle ABD, dont le ſegment AEBD eſt capable, & qu'on faſſe couler cet inſtrument entre deux cloux ou chevilles A, D, le crayon qui ſera au ſommet E de l'angle que font ces deux regles, tracera l'arc demandé AEBD, lequel paſſera par les trois points donnez ABD. *Fig.* 107.

Il faut remarquer que chacune des regles EG, EI doit avoir en longueur au moins l'intervale des deux points A & D les plus éloignez, afin que le ſommet E étant tranſporté en D, la branche EG touche & s'appuye encore au point A, qui en doit regler la direction.

Autrement.

On peut encore tracer l'arc demandé par un mouvement continu avec une autre machine, mais plus compoſée que la précedente. Ce ſont deux roues AB, DE de diametres inégaux, aſſemblées ſur un eſſieu commun FC, ſur lequel la plus grande AB eſt fixe, & l'autre ED eſt mobile, en ſorte qu'on peut l'approcher ou l'éloigner de la premiere au- *Fig.* 106

Digitized by Google

tant qu'il eſt beſoin, & l'arrêter par quelque cheville à la diſtance où elle doit être ; enſuite appuyant ſur l'eſſieu vers le milieu M on fait tourner cette eſpece de Train boiteux, dont les rouës décrivent deux arcs de cercles concentriques, il eſt clair que leurs rayons ſont d'autant plus longs que les diametres des rouës ſont moins inégaux, & qu'elles ſont plus éloignées entre elles; enſorte que ſi elles étoient infiniment peu differentes, leurs traces ſeroient des lignes droites.

Cette Machine, qui eſt de l'invention De Perrault, eſt plus ingénieuſe qu'utile; car il eſt moralement impoſſible de la faire mouvoir avec l'uniformité qu'elle demande, puiſque l'experience nous fait voir qu'il eſt très difficile de conduire en ligne droite un Train de deux rouës égales, à plus forte raiſon en ligne courbe deux inégales; ſoit par le défaut de la direction de la main, ſoit par l'inégalité du frottement de l'eſſieu & du terrain ſur lequel on la fait rouler, de ſorte qu'on ne pourroit s'aſſûrer de la régularité de l'arc qu'on veut tracer. Quoiqu'il en ſoit de l'exécution, ſi l'on veut connoître la longueur du Rayon que la trace de la grande rouë décrit, il n'y a qu'à faire cette Analogie ; comme la difference A*d* des deux Rayons des rouës AC, D*c* eſt au diametre AC de la grande, ainſi la diſtance D*d* des deux rouës eſt au Rayon SC du cercle ou arc que la grande décrit, d'où par l'inverſe on tire l'Analogie néceſſaire pour trouver la diſtance des deux rouës, lorſque le rayon SC eſt donné, en faiſant CA : CS : : *d*A : *d*D, ce qui eſt clair à la ſeule inſpection de la figure, à cauſe des triangles ſemblables SCA, D*d*A.

Par où l'on voit qu'avec deux petites rouës de 6. à 7. pouces de diametre & un petit eſſieu, on pourroit tracer les ceintres des plus grandes voutes, ſi l'exécution répondoit à la juſteſſe du principe ſur lequel la machine eſt fondée, mais je n'en conſeille à perſonne l'uſage, par les raiſons que j'en ai dit.

Erreur du Trait de Maître Blanchard.

Maître Blanchard dans ſon traité de la Coupe des bois [page 6.] a voulu réſoudre le Probleme, dont il eſt ici queſtion, par un *Trait* dont il eſt à propos de montrer l'erreur pour en déſabuſer les Ouvriers, qui n'ont pas aſſez de connoiſſance pour l'appercevoir.

Supposant les trois points donnez ADB [*Fig.* 105.] il décrit un Parallelelograme AEFB, il tire les Cordes AD, DB, qu'il diviſe en un certain nombre de parties à volonté, par exemple ici en quatre, aux points *b*, *c*, *d*, ſur leſquels il éleve autant de perpendiculaires *bx*, *cy*,

Digitized by Google

dz. Puis diviſant le côté AE en un même nombre de parties égales aux points *e*, *f*, *g*, il tire des lignes droites au point D, qui coupent les précedentes aux points *x y z*, qu'il prétend être à la circonference du même arc de cercle où ſont les trois points donnez ADB.

Il eſt très aiſé de faire voir qu'il ſe trompe groſſierement par la ſeule inſpection de la figure de ſa conſtruction, faite dans un quart de cercle comme en DG, puiſqu'elle donne au lieu du quart de cercle DSG une courbe DYZG, qui eſt conſiderablement au dedans; mais il convient de *Fig.* 105. juſtifier la figure par le raiſonnement Geometrique; il eſt démontré dans les Elemens d'Euclide au l. 3. prop. 14, que les lignes équidiſtantes du centre dans le cercle ſont égales entr'elles; par conſéquent les lignes LX, *i*Z équidiſtantes [par la conſtruction] du milieu K de la corde DG, c'eſt-à-dire, du Rayon CS, doivent être égales; mais elles ne le ſont pas, donc elles ne ſont pas terminées à la circonference du cercle.

Pour voir cette inégalité d'un coup d'œil, il n'y a qu'à porter la longueur G*m* en DM, & tirer MG qui coupera LX environ au tiers de ſa longueur en *x*, quoique le point X ſoit déja au dedans du Cercle DSG, par conſéquent il s'en faut d'environ la moitié de la longueur *iz* que le point *z* parvienne au cercle en *r*.

Demonstration.

Pour le démontrer ſoit, [*Fig.* 105.] la ligne KY prolongée en H, à laquelle on menera par les points *o* & *m* les Paralleles *op*, *mq*.

A cauſe des triangles ſemblables GHK & G*op*, on aura G*o*: GH:: G*p*: GK; mais G*o* = $\frac{1}{4}$ de GH, donc G*p* ſera auſſi les $\frac{1}{4}$ de GK; par conſéquent *p*K eſt la huitiéme partie de DG, & D*p* les $\frac{7}{8}$; or à cauſe du triangle iſoſcele rectangle *op*G, la ligne *po* ſera égale à *p*G.

Presentement pour rendre la démonſtration ſenſible aux Ouvriers, nous ſuppoſerons chacune des huit parties ſoudiviſée en dix, afin de faire mieux connoître la difference des longueurs des lignes LX & *iz*.

A cauſe des triangles ſemblables DLX, D*po*, on aura D*p* [50.]: *po* [30.]:: DL [20.]: LX [12.] & à cauſe des triangles ſemblables D*qm*, D*iz*, on aura D*q* [70]: D*i* [60]:: *qm* = *q*G [10]: *iz* $8\frac{4}{7}$; donc les lignes LX & *iz* ſont entr'elles comme 12. eſt à $8\frac{4}{7}$, c'eſt-à-dire, qu'elles ſont conſiderablement inégales, par conſéquent que les points X & *z* ne peuvent être à la circonference du même cercle; on ne voit par cette démonſtration que le rapport de ces lignes entr'elles; ſi quelqu'un eſt curieux de connoître plus preciſément que par le tracé de la figure, ce-

Digitized by Google

lui qu'elles ont à celles qui parviennent juſqu'au cercle en S ou en *r*; on le pourra par la maniere ſuivante.

Tous ceux qui ſont un peu initiez dans l'Algebre, ſçavent que l'équation primitive du cercle (nommant *d* le diametre, *x* l'abſciſſe, & *y* l'ordonnée) eſt $dx - xx = yy$; ainſi on cherchera le diametre en quarrant DK & KC, & tirant la racine quarrée de leur ſomme, qui ſera égale au Rayon DC, & ſon double au diametre $= d$, enſuite pour avoir l'abſciſſe *x*, on ajoûtera la longueur K*i* au Rayon, ou on en retranchera KL; par le moyen de ces deux grandeurs connuës, on aura $dx - xx$, dont on tirera la racine quarrée, de laquelle on ôtera la longueur CK, le reſte ſera la longueur *ir*, qui parvient au cercle en *r*; & par ce calcul on trouvera que le point X eſt au dedans du cercle d'environ une partie de trois, & *z* de quatre, je dis environ à cauſe des fractions qui reſtent.

Ce que nous démontrons ici dans le quart de cercle, ſe peut démontrer facilement de tous les arcs d'un moindre nombre de degrez; on trouvera ſeulement que la difference des longueurs des lignes LX & *iz* diminuera, mais elle ſubſiſtera toûjours; ainſi la pratique de Maître Blanchard ſera toûjours fauſſe pour faire un arc de cercle, elle pourroit ſeulement ſervir à faire un arc de ſection cônique ouverte, à laquelle il n'a pas penſé, & dont il n'eſt pas queſtion.

Il nous reſte à donner la ſolution du *ſecond cas* de ce probleme, où l'on ne ſuppoſe que deux Points donnez à la circonference de l'arc de cercle demandé, & au lieu du troiſiéme point, la longueur du Rayon indépendamment de ſa poſition qui donneroit le centre, duquel on ne veut, ou on ne peut faire aucun uſage.

Fig. 108. Soient [*Fig.* 108.] les deux points donnez L & M, ayant tiré la ligne LM de l'un à l'autre, on aura la corde de l'arc demandé, & parce que le rayon eſt donné de longueur, on aura les trois côtés d'un triangle Iſoſcele LMC, dont on peut trouver l'angle C par la Trigonometrie, ou méchaniquement par un triangle ſemblable fait par le moyen d'une Echelle. La moitié de l'angle LCM ſera le ſupplément à deux droits de l'angle LNM, néceſſaire pour tracer l'arc demandé par le moyen de la deſcription Organique, dont nous venons de parler au cas precédent, avec deux Régles qui feront l'angle LNM, dont le ſegment LHNM eſt capable.

Fig. 109. Ou bien on cherchera [*Fig.* 109.] le point X milieu du ſegment AXB par le moyen de la fléche MX; pour cet effet, ayant quarré le Rayon donné AR, & la moitié AM de la corde AB, on retranche-

Digitized by Google

ra le quarré de AM, & du reſtant on extraira la racine quarrée du quarré de AR pour avoir le côté MR, lequel étant retranché du Rayon AR, donnera MX pour la flêche que l'on cherche, & par conſéquent le point X milieu de l'arc demandé. Par le moyen de ce point X & des deux autres A, B on tracera l'arc par pluſieurs points, comme nous l'avons dit au premier cas.

On peut propoſer un *troiſiéme cas* de ce probleme, en donnant une meſure déterminée au contour de l'arc qu'on veut décrire, au lieu des deux points de ſes extrémitez, & enſuite la longueur du Rayon; alors on trouvera l'angle LMN par un calcul aſſez ſimple. *Fig.* 108.

Premierement par le moyen de la longueur du Rayon, il ſera aiſé de trouver la circonference entiére en le doublant, & faiſant l'analogie ordinaire, comme 7. à 22. ou 100, à 314; ainſi le diametre donné eſt à la circonference totale meſurée en pieds, pouces & lignes. Enſuite par une ſeconde Analogie, on trouvera le nombre de degrez que doit contenir l'arc d'une longueur donnée, en diſant comme le nombre des pieds, pouces & lignes, trouvé par la premiere analogie pour la circonference entiére, eſt au nombre des pieds, pouces & lignes de l'arc donné en dévelopement ou rectification: ainſi 360. degrez, valeur totale de la circonference, eſt au nombre de degrez que vaut l'arc propoſé, dont la longueur du contour eſt donnée, alors on aura un angle dont le ſupplément à deux droits, ſera l'angle cherché LNM, ainſi ſuppoſant l'angle trouvé de 60. degrez, on l'ôtera de 180. valeur de deux droits; il reſtera pour l'angle cherché 120. degrez, qu'on formera avec deux régles, ſi on veut décrire l'arc organiquement, comme nous l'avons dit au premier cas.

Démonſtration du 2.e & 3.e *Cas.*

L'angle LNM vaut la moitié de l'arc ſur lequel il eſt appuyé, & l'angle L*d*M vaut de même la moitié de l'arc LNM, donc ils valent pris enſemble la moitié du cercle, c'eſt-à-dire deux angles droits; & par conſéquent la moitié de l'angle LCM, qui eſt égale à l'angle L*d*M, par la 20. du 3.e d'Euclide, ſera le ſupplément à deux droits de l'angle cherché LNM. *Ce qu'il falloit faire.*

USAGE.

Ce probleme eſt néceſſaire pour l'exécution de pluſieurs Traits de la coupe des Pierres, où il faut tracer des arcs de cercle, dont les centres ſont extrémement loin, par exemple pour trouver l'arc de déve-

Digitized by Google

lopement de la baſe de la Porte en Tour ronde en Talud, qui eſt celle d'une portion de Cône, dont le ſommet qui doit être à la rencontre des côtés du Cône prolongez, c'eſt-à-dire les côtés de la Tour en Talud, peut être à une diſtance conſiderablement éloignée de la baſe; ſuppoſant, par exemple que la Tour eut ſeulement 15. pieds de Rayon, 30. d'hauteur, & un dixiéme de Talud, le ſommet du Cône, qui ſeroit le centre du dévelopement, ſeroit à 150. pieds loin de la circonference; ce qui rend les préceptes du Pere DERAN & de ſon Sectateur M. de LA RUE impraticables, ſans le ſecours de ce probleme.

IL eſt encore néceſſaire pour trouver les arcs des Panneaux de Doële des premieres Aſſiſes des voutes ſphériques, ſphéroïdes, & ſur le Noyau dans le ſyſtéme de pratique qui exécute ces voutes par le dévelopement des cônes tronquez, comme nous le dirons en ſon lieu.

JE me ſerts ordinairement de la deuxiéme pratique du ſecond cas pour faire les Arondiſſemens des Contreſcarpes de nos Fortifications, *Fig.* 109. par le moyen d'un panneau A*d e* B X fait d'une planche taillée, comme la partie hachée de la figure, que je mets ſur le revêtement, le faiſant courir de piquets en piquets; mais comme le Parement eſt en Talud, & que cet arc de cercle augmente de Rayon à meſure que le mur s'éleve, je fais faire un panneau convexe ſur le derriere qui eſt à plomb, pour ſervir à jauger l'épaiſſeur qui régle le contour du Parement en Talud à chaque aſſiſe; & je trouve que cette méthode conduit facilement les Ouvriers.

SI l'arc de cercle qu'on doit décrire, étoit ſi grand qu'on ne pût ſe ſervir du compas pour faire les angles qu'on doit prendre égaux entre eux, il faudroit ſe ſervir du *demi cercle* ou Graphométre, & de piquets d'alignement, au lieu de lignes tracées à la Régle ou au Cordeau, dont on trouveroit l'interſection par la rencontre des deux Rayons viſuels des points A & B pour centre de l'inſtrument. C'eſt ainſi que l'Architecte de la nouvelle Ville de *Carls-Roube*, qu'a fait bâtir le Margrave de Bade-Dourlack, auroit pû tracer les Rûës concentriques au Château qui ont deux & trois cens toiſes de Rayon, comme je puis l'eſtimer à vûë d'œil.

CHAPITRE

Digitized by Google

CHAPITRE II.

De l'Ellipſe, premierement conſiderée comme étant faite.

PROBLEME II.

Trouver 1.° *le Centre.* 2.° *les Diametres conjuguez* 3.° *les Axes* 4.° *les Foyers d'une Ellipſe donnée.*

1.° SOit l'Ellipſe donnée DEIG [*Fig.* 110.] on tirera les lignes OO, *oo* paralleles entre elles, & terminées à la circonference de l'Ellipſe. On les diviſera en deux également en *r* & R, par où on fera paſſer une ligne DI qui ſera un Diametre : le point C, milieu de ce diametre, ſera *le Centre* que l'on cherche. 1°. Pour le Centre. *Fig.* 110.

2.° Si par le centre C on tire une ligne EG parallele à OO, cette ligne EG ſera *un Diametre* conjugué au diametre DI; parce qu'il eſt parallele aux Ordonnées *o r* OR & à la tangente T *t*, tirée par le point D du diametre DI. 2.° Pour un Diametre.

3.° Si du point C comme Centre & d'une ouverture de compas priſe à volonté, on décrit un arc KH qui coupe la circonference de l'Ellipſe en K & en H, & que de ces points comme centres, & d'une ouverture de compas priſe auſſi à volonté, on faſſe une ſection de deux arcs de même rayon en Z, la ligne AB tirée par les points C & Z, & terminée à la circonference de l'Ellipſe de part & d'autre, ſera *un des Axes*, & la ligne LM, qui lui ſera perpendiculaire, paſſant par le centre C ſera *l'autre Axe.* 3.° Pour les Axes.

4.° Si l'on prend l'intervale AC avec un compas, & qu'on s'en ſerve comme de Rayon d'un Cercle, qui auroit L ou M pour Centre, faiſant des arcs qui coupent l'Axe A B aux points F & *f*, ces points ſeront les *Foyers de l'Ellipſe.* 4.° Pour les Foyers.

DEMONSTRATION.

PAR la définition [Art. 20.] les Diametres ſont des lignes qui coupent en deux également toutes les lignes paralleles entr'elles, par conſéquent auſſi la ſurface de l'Ellipſe, puiſqu'on peut conſiderer ſa ſurface comme compoſée d'une infinité de lignes paralleles infiniment proches. Art. 20.

Digitized by Google

2.° PAR la définition [avant l'Art. 24.] le diametre parallele à ces appellé *Conjugué*.

3.° PAR la conſtruction, les points K & H ſont également éloignez du centre C, & l'on a fait AZ perpendiculaire ſur la Corde qui ſeroit tirée de H en K, laquelle ſeroit une double ordonnée, qu'elle couperoit en deux également, & à angle droit, ce qui ne convient qu'à un Axe par la définition.

Art. 28. 4.° Enfin les points F & *f* ſont les Foyers de l'Ellipſe, parce que la ſomme des lignes FL, L*f* eſt égale, par la conſtruction, à la ligne AB, & ſi les lignes F D, D*f* priſes enſemble lui ſont auſſi égales, le point D ſera à la circonference de l'Ellipſe. (Art. 29.)

USAGE.

ON trouvera dans la quatriéme Partie de ce Traité des occaſions continuelles de faire uſage de ce Problême; parce que l'Ellipſe eſt la Courbe la plus ordinaire dans la coupe des Pierres.

PROBLEME III.

Par un point donné mener une Tangente à une Ellipſe donnée.

LE point donné peut être à la circonference, ou au-dehors.

Fig. 111. 1.° S'IL eſt à la circonference, par exemple en D, [*Fig.* 111.] & que les Foyers F*f* ſoient donnez, on menera à ce point D des lignes F D, *f* D qui feront un angle en D, qu'on diviſera en deux également par la ligne D*n*; ſi par ce point D on fait TD perpendiculaire à D*n*, cette ligne T D ou T*f* ſera la Tangente que l'on cherche.

OU bien on fera *f* a = au grand Axe GA, on tirera aF qu'on diviſera en deux également en *t* d'où tirant une ligne au point donné D, la ligne *t* D ſera la Tangente demandée.

Fig. 111. 2.° SI on n'a pas les Foyers; ayant trouvé le centre C [*Fig.* 111.] on menera par le point donné D le diametre DB, & un autre à volonté comme GA, par l'une des extrêmitez duquel A ou G on menera AE parallele à DB, qui rencontrera l'Ellipſe en E, par où l'on menera au point G la ligne EG, laquelle ſera une Ordonnée au diametre DB, à laquelle ſi on tire une parallele par le point D, cette ligne *t* T ſera la Tangente demandée.

Digitized by Google

3.° Si le point donné D eſt hors de l'Ellipſe comme en *d*, ayant mené par le centre C la ligne *d*C, on fera CK perpendiculaire à C *d*, & égale à CL interſection de la ligne C *d*, & de la circonference de l'Ellipſe; enſuite ayant tiré *d*K, on lui fera la perpendiculaire KH, qui coupera *d* C prolongée en H, on portera la diſtance CH en C*i* ſur la ligne C*d*, enſuite on menera au diametre L*m* une ordonnée quelconque * par la conſtruction précedente, ce qui eſt aiſé; car il ne s'agit que de mener une parallele à *m*L par un point pris à volonté, comme *o*P, la diviſer également en deux au point *q*, & mener *q*C ou ſa parallele *o r*, à laquelle on menera une parallele *i*K par le point *i*, qui rencontrera la circonference en K, la ligne menée de ce point K au point donné *d* hors de l'Ellipſe ſera la Tangente que l'on cherche.

* Voyez l'art. 36. l. 1.

Et ſi l'on prolonge K*i* en *k* ce point ſera encore à l'attouchement d'une autre ligne menée de *d* en *k*, de ſorte que du même point donné *d*, on peut mener deux Tangentes à l'Ellipſe AEKGA, une d'un côté, l'autre de l'autre.

Demonstration.

Pour le premier cas de ce problême, il eſt démontré dans les Sections Coniques que les angles F D*t*, & *f*D T ſont égaux entr'eux; ſi on ajoute de part & d'autre les angles F D*n*, & *f*D*n* égaux entr'eux par la conſtruction; les angles *n*D*t* & *n*D T ſeront auſſi égaux entr'eux, par conſéquent droits; donc *t*T ſera une Tangeante au point D. *Fig.* 111.

Secondement. [*Fig.* 97.] A cauſe des paralleles AE, CB, GC: CA:: GS: ES; mais AC demi diametre eſt égal à GC, GS = SE, laquelle eſt une ordonnée au diametre DB, puiſqu'il la diviſe en deux également; & [par la conſtruction] D*t* ou *t*T eſt parallele à SE, donc D*t* eſt une Tangente de l'Ellipſe au point D, *ce qu'il falloit faire.*

Troiſiémement. Par la conſtruction, on a fait CH troiſiéme proportionelle à la diſtance du centre C au point *d*, rencontre de la Tangente K*d* & du demi diametre CL, prolongé en *d*, & à ce demi diametre CL, on a fait auſſi C*i* = CH, donc *d*C: CL:: CL: C*i*, diſtance du centre C à la Souſtangente *i d*; donc * *d*K & *d k* ſont des Tangentes à l'Ellipſe aux points K, ou *k* menées du point donné *d* hors de cette Courbe, *ce qu'il falloit faire.*

* Art. 46

Usage.

Ce Probleme eſt néceſſaire pour éviter les jarrets dans la jonction des lignes droites, avec des arcs Elliptiques, dans pluſieurs circonſtances d'arondiſſemens des parties droites contiguës aux Courbes, comme

Digitized by Google

il arrive ſouvent dans l'Architecture; parce que l'angle fait par la rencontre d'une Courbe & de la Tangente eſt le plus petit qu'on puiſſe imaginer; donc il différe infiniment peu de la ligne droite, à la jonction de la Courbe, par conſéquent la tranſition de la ligne droite à la Courbe devient imperceptible à la vûë.

De l'Ellipſe conſiderée comme à faire.

Probleme IV.

Un Diametre quelconque & une Ordonnée à ce diametre étant donnez, trouver ſon conjugué.

Fig. 113. Soit AB [*Fig.* 113.] le diametre donné & E D ſon ordonnée, du point C milieu de A B, ayant élevé une perpendiculaire C H, on décrira le quart de Cercle H F B, on menera enſuite par le point E de la rencontre de l'ordonnée avec le diametre A B, une ligne E G parallele & égale à CH, qui coupera le cercle en F, par où & par l'extrémité D de l'ordonnée ED, ayant tiré la ligne FD, on lui menera par le point G la parallele GL, qui rencontrera ED prolongée en L. Je dis que EL ſera égale au demi diametre Conjugué que l'on cherche; ainſi ayant mené par le point C la ligne I K parallele à E L, on portera du centre C de part & d'autre CK & CI égale à EL.

Demonstration.

A cauſe des paralleles GL, FD, on aura EG : EL :: EF : ED, mais EG [Conſtr.] = CH & EL = CK, donc EF : CH :: ED : CK; c'eſt-à-dire, que les ordonnées au diametre AB dans le cercle ſont en même raiſon que celles de la courbe, qui paſſeroit par les points K & D, ce
* Art. 41. qui eſt une proprieté de l'Ellipſe; * donc C K, ou ſon double K I eſt le diametre conjugué à AB, *ce qu'il falloit trouver.*

Probleme V.

Les Diametres conjuguez étant donnez, trouver les Axes de l'Ellipſe.

Fig. 112. Soient [*Fig.* 112.] les lignes AB DE données pour diametres Conjuguez d'une Ellipſe à décrire, qui ſe coupent également en C où eſt ſon centre. Du point A extrêmité du plus grand, ayant abaiſſé la perpendiculaire A P, on la prolongera vers G, portant la moitié C D du plus petit en A G. Puis ayant tiré G C, on la diviſera en deux également,

Digitized by Google

en m, d'où l'on tirera par le point A la ligne mg, qu'on fera égale à mG ; ſi du point g on mene par le centre C la droite indéfinie gx, on aura la poſition du grand Axe, dont la longueur Xx ſera déterminée en portant de part & d'autre du centre C la ſomme des lignes Cm, & mA en CX & Cx ; enſuite on élevera au point C une perpendiculaire à gx, ſur laquelle on portera de part & d'autre la longueur Ag de C en Y, & de C en y ; la ligne yY ſera le petit axe, *ce qu'il falloit trouver.*

Demonstration.

Du point C pour centre & pour rayon CX, on décrira un quart de cercle XH, & l'on menera par le point A la ligne Ko, perpendiculaire à XC qui paſſera à l'interſection K de l'arc de cercle HX, & de la droite CG, parce que mA = mt = mK & At parallele à la même.

Par la ſuppoſition le point A qui eſt à l'extrémité d'un des diametres, eſt à la circonference de l'Ellipſe AEBD, il faut démontrer que les points X & Y ſont à la même circonference, & à l'extrémité des axes. Puiſque mg = mC [par la conſtruction] mt ſera égale à mA, & tC = Ag = CY [par la conſtruction] or à cauſe des triangles ſemblables CKo, Ctu, Ko : Ao = tu :: CK = CX = CH : Ct = CY ; donc (Art. 41.) le point Y eſt à la circonference de l'Ellipſe, de même que le point X, comme il eſt aiſé de le prouver par la même raiſon. Art. 41.

Et parce que les lignes CX & CY ſont perpendiculaires entr'elles, ce ſont des demi-axes ; donc Xx & Yy ſont les axes demandez, *ce qu'il falloit démontrer.* Art.

Corollaire.

De-là on tire une maniere aiſée de décrire l'Ellipſe par un mouvement continu, au moyen d'un inſtrument compoſé de trois pieces, ſçavoir, d'une petite branche droite Cm, d'un triangle mAP, dont l'angle m eſt attaché par un pivot en m à cette branche, & d'une grande régle qu'on applique ſur le diametre DE, à laquelle la petite branche Cm eſt attachée ſur le point C par un pivot, ſur lequel elle peut tourner, ainſi que l'angle m du triangle à ſon autre extrêmité m : ſi l'on conduit avec la main l'angle P en droite ligne au long de la régle DE, le Crayon poſé au ſommet de l'angle A décrira en même tems la demie Ellipſe XYx, on peut même ſans remuer la régle faire paſſer le triangle AmP, & la branche mC de l'autre côté de la régle DE, mais ſa largeur couvrira une partie qu'on ne pourra tracer, c'eſt pourquoi il faudra la changer de côté. *Fig.* 112. Plan. 10.

Digitized by Google

Il faut remarquer que la ligne GP n'eſt pas toujours la ſomme deſdits diametres CD, & de la perpendiculaire AP, mais qu'elle en eſt quelquefois la difference, lorſque la direction de la branche C*m* tombe entre les points A & P.

USAGE

Cette propoſition eſt très utile dans pluſieurs Traits de la coupe des Pierres où les Axes conjuguez ſont donnez, comme aux Arcs-droits des *Deſcentes*, en ce qu'elle fournit les moyens de tracer les Ellipſes, par le mouvement continu du Trait du Jardinier, dont nous parlerons au Problême VII.

PROBLEME VI.

Un Axe & un point à la circonference de l'Ellipſe étant donnez, trouver l'autre Axe.

Ce Problême n'eſt qu'une eſpece de Corollaire du Problême IV. parce que les ordonnées aux Axes étant des perpendiculaires; en donnant un Point à la circonference, c'eſt comme ſi l'on donnoit une ordonnée à l'axe grand ou petit.

Premierement, *le grand Axe étant donné, ſi l'on cherche le petit.*

Fig. 114. Soit AB le grand axe [*Fig.* 114.] & D le point donné à la circonference de l'Ellipſe, on abaiſſera de ce point ſur AB la perpendiculaire indéfinie OF, puis du point C milieu de AB pour centre, & CB pour Rayon, on décrira un quart de cercle B*b*, qui coupera OF en R; on portera ſur OF le Rayon CB, qui donnera le point F, & la longueur OD en C*d*, parallelement à OF. Par les points R & *d*, on tirera R*y*, qui coupera l'axe donné AB en *y*.

Si de ce point *y*, on tire au point F, une ligne *y* F, elle coupera CD prolongé en X; je dis que CX eſt la moitié du petit axe que l'on cherche.

Secondement, *le petit Axe étant donné, ſi l'on cherche le grand.*

Par le point D donné à la circonference, on tirera ſur CX la perpendiculaire D*d*; puis du point C pour centre, & la moitié CX du petit axe donné pour Rayon, on décrira le quart de cercle XE qui coupera D*d* au point V, & la perpendiculaire AB ſur le milieu C au point E, par les points E & V, on tirera E*z*, qui coupera CX prolongée au point Z; ſi par les points Z & D, on tire la droite ZB,

Digitized by Google

elle coupera la perpendiculaire AB au point B, je dis que CB eſt la moitié du grand axe que l'on cherche.

Demonstration.

Pour le premier cas, à cauſe des Triangles ſemblables O$_7$R, $_7$Cd, & $_7$OF, $_7$CX, on aura $_7$O:OR::$_7$C: Cd, & $_7$O: OF::$_7$C:CX, donc OR: OF = Cb = CB::OD = Cd: CX, donc * le point X eſt à la circonference de l'Ellipſe, & à l'extrêmité de l'axe conjugué à AB. * Art. 41.

Pour le ſecond cas, à cauſe des Triangles ſemblables ZCE, ZdV & ZCB, ZdD, on aura Zd: dV:: ZC: CE, & Zd: dD:: Zc: CB, donc dV: dD:: CE = CX: CB, donc [par l'Art. 41.] le point B ſera à l'extrêmité du grand axe, *ce qu'il falloit trouver.*

Usage.

Entre pluſieurs uſages de ce Problême, on fera voir au 4.e Livre qu'il eſt néceſſaire pour le Trait du Quartier de Vis ſuſpendu, ſuivant la maniere du P. Deran, & de M. de La Rue, & pour le Trait de la Trompe ſphérique dans un angle ſaillant.

Il pourroit auſſi ſervir pour la diminution des Colones, ſi au lieu de la Conchoïde De Nicomede, qu'on y employe ordinairement, on vouloit ſe ſervir d'un arc Elliptique, le petit axe donné eſt le diametre de la Baſe; le point à la circonference, eſt l'extrêmité du diametre ſous l'Aſtragle du Chapiteau, éloigné du petit axe des deux tiers de la longueur de la colonne, ſi le renflement eſt au tiers.

Probleme VII.

Les Axes d'une Ellipſe étant donnez, la décrire par pluſieurs Points, ou par un mouvement continu.

Premierement, par pluſieurs Points trouvez au compas [*Fig.* 110.] *Fig.* 110.

Ayant porté la moitié du grand axe pour Rayon, on portera une des pointes du compas en L, d'où, comme centre, on décrira des arcs qui couperont cet axe en F & f pour avoir les Foyers.

De ces points F & f pour centres, & d'un intervale pris à volonté pour Rayon, pourvû qu'il ſoit moins grand que fA, ou FB, on décrira des arcs de cercle en quatre endroits 1. 2. 3. 4. au deſſus, & au deſ-

Digitized by Google

ſous de l'axe AB, comme en 1*n*, 2*n*, 3*n*, 4*n*, puis on portera la même longueur du Rayon *de*, A en P, & de l'ouverture PB [reſte de la longueur du grand axe] pour Rayon, on décrira des mêmes centres F & *f* des arcs de cercle, qui couperont les precédens aux Points 1. 2. 3. 4. qui ſeront à la circonference de l'Ellipſe; on recommencera pareille operation avec des ouvertures de compas, plus ou moins grandes pour avoir encore quatre autres Points; & ainſi on trouvera tant de Points, & ſi près les uns des autres, qu'on jugera à propos, pour tracer ce contour à la main de l'un à l'autre avec aſſez d'exactitude, ou mieux dans le grand, avec une Régle pliante également mince, qu'on peut arrêter & courber par le moyen de quelques pointes de cloux plantées ſur les points trouvez en dedans & en dehors, ou tous en dehors en appuyant de la main gauche par dedans, pendant qu'on trace de la droite.

Secondement, par un mouvement continu, on peut le faire de pluſieurs façons. 1.°

Fig. 110. Par le moyen d'un Cordeau, on fait ce que nous venons de faire avec le Compas; on plante deux cloux aux Foyers F & *f*, trouvez comme nous venons de le dire; puis ayant fait une boucle au bout du Cordeau, & une autre à diſtance de celle-ci, parfaitement égale à la longueur du grand axe AB, on met chacune de ces boucles à un clou des Foyers, & comme le cordeau eſt lâche, on pouſſe ſon pli F D*f* pour le faire tendre, & y faire couler un crayon D, ou une pointe de quelque Outil; ainſi le mémé cordeau qui faiſoit le pli F D*f* ſera au milieu le pli F L*f*, & le crayon qui étoit en D, ſera tranſporté en L, ce qui eſt ſi connu de tous les Ouvriers, qu'il eſt inutile d'expliquer. Cette conſtruction, qu'on appelle le *Trait du Jardinier*, quoique Méchanique; donne l'Ovale Geométrique, que j'appelle toujours *Ellipſe*, pour la diſtinguer des autres Ovales.

Il eſt clair que pour avoir l'Ellipſe entiere, il faut faire paſſer le cordeau en deſſous d'AB, comme au deſſus.

Demonstration.

Nous avons dit à l'article 29. du premier Livre, qu'une des principales proprietez de l'Ellipſe conſiſte dans l'égalité de la ſomme des deux lignes tirées des Foyers au même point de la circonference, avec la longueur du grand axe; donc la courbe tracée eſt la vraie Ellipſe qui eſt une des Sections Coniques; puiſque la conſtruction par pluſieurs points trouvez au compas, & le cordeau par le mouvement continu, fourniſſent toujours la même égalité, *ce qu'il falloit faire.*

USAGE.

Digitized by Google

USAGE.

Cette pratique eſt très aiſée, mais peu éxacte dans les grands Ouvrages, parce que le cordeau s'alonge, ſelon qu'il eſt plus ou moins long & tors, & que l'on pouſſe le crayon dans le pli avec une force plus ou moins grande; une chainette eſt moins ſujette à cet inconvenient, mais elle a les ſiens; car outre qu'elle cauſe des Ondulations, elle eſt encore un peu ſuſecptible de l'inégalité d'extenſion, cauſée par ſon poid, dans un plan vertical, ou par ſon frottement ſur un Plan horiſontal; de ſorte qu'elle ne peut ſe remettre en ligne droite, ſuivant les loix de la Méchanique; puiſque ce poid, ou ce frottement, ſont une troiſiéme Puiſſance qui fait effort contre celles des bouts, leſquelles ne peuvent, en tirant l'une contre l'autre, faire dreſſer la chaine, que lorſque la troiſiéme eſt infiniment petite; c'eſt pourquoi nous allons propoſer une autre maniere Organique qui n'a pas ces défauts.

Seconde Méthode de tracer l'Ellipſe par pluſieurs Points, ſans le ſecours des Foyers ſeulement avec deux ouvertures de compas, ou ſans compas par le moyen d'un cercle & d'une meſure conſtante.

Soient [*Fig.* 116.] les axes donnez AB, HF: on portera la moitié du petit axe CH de C en E ſur le grand, & l'on diviſera leur difference EB en deux également en M. *Fig.* 116.

Du point C pour centre, & de l'intervale CM pour Rayon, on décrira un cercle: il nous ſuffit ici pour exemple d'en mettre le quart N 2. M: ſur la circonference de ce cercle, on prendra à volonté autant de points qu'on en voudra pour tracer l'Ellipſe avec plus ou moins d'exactitude, comme ici les Points 1, 2, 3, deſquels, comme centres & toujours du même intervale CM pour Rayon, on décrira de petits arcs qui couperont l'axe AB, prolongé aux points M, *g*, *b*, d'où l'on tirera à leurs centres 1, 2, 3, des lignes 1 M, 2*g*, 3*b*, ſur leſquelles on portera toujours la moitié de la difference des demi-Axes ME, ou MB, en 1*x*, 2*x*, 3*x*, laquelle donnera tous les points *x*, *x*, *x* à la circonference de l'Ellipſe demandée.

DEMONSTRATION.

Du point C pour centre, & des longueurs CA; & CH pour Rayons, on décrira deux quarts de cercles A Q*b*, *r q* H; puis par un des points trouvez comme D, on tirera les lignes *r* Q, & P L perpendiculaires aux axes; & enfin par le centre C, la ligne C *q*.

A cauſe des paralleles rC, Pq, on aura $Cq : CQ :: rP : rQ$; mais $Cq = CH$, & $CQ = Cb$; donc $CH : Cb :: rP : rQ$; c'eſt-à-dire, que les ordonnées de l'Ellipſe à l'axe AB, ſont proportionelles à celles du cercle AQb au même axe, qui en eſt le diametre; donc [Art. 41. du premier Livre,] le point P eſt à la circonference de l'Ellipſe, *ce qu'il falloit démontrer.*

La même organiquement par un Mouvement continu.

Fig. 118. AVANT diviſé la difference Ae des deux demi-Axes CA, Cb en deux également en m, ou leur ſomme eB en M, on aſſemblera deux Régles égales chacune à la moitié MB, par le moyen d'une cheville, ou d'un clou arondi, comme Cd, dG en d, ou deux Régles d'inégale longueur, l'une D, égale à la difference Am, l'autre Da au demi-Axe AC, puis ayant pris une troiſiéme Régle de longueur égale à quatre fois Cd, ou deux fois eB, pour la 1.e conſtruction, avec les Régles Cd, dG, ou ſeulement au grand Axe pour la ſeconde, on attachera à ſon milieu C, la Régle Cd, ou CD, avec un pivot; en ſorte que le point C ſoit ſur l'alignement d'un de ſes côtez eG, puis on portera ſur la branche dG la longueur Am, pour y poſer un crayon en x, ou ſur la Régle Da en Dg, pour y poſer une pointe propre à faire couler le long de la Régle AB, & le crayon en a; dans cette diſpoſition, il ne s'agit que de faire couler le point G, dans le premier cas, ou g dans le ſecond, au long de la Régle AB, les crayons poſez en x, ou en a traceront l'Ellipſe qu'on demande, comme il eſt clair par la démonſtration précedente, pour la conſtruction par pluſieurs points, puiſque celle-ci eſt parfaitement la même réduite en Inſtrument.

Autre Maniere Organique, avec l'Inſtrument appellé Compas à Ovale.

LORSQU'IL ne s'agit que de former un quart d'Ellipſe, le compas à Ovale eſt une ſimple Equerre, ſur les côtez de laquelle on fait couler deux pivots attachez à certaine diſtance, à une Régle au bout de laquel-
Fig. 117. le eſt un crayon pour le tracer. D'où il ſuit que pour une Ellipſe entiere, il faut aſſembler quatre Equerres ſéparées par une couliſſe, pour laiſſer le paſſage de ces pivots; ſuppoſant qu'on ne veuille tracer qu'une demi-Ellipſe, il faut un Inſtrument compoſé de deux Equerres, avec une couliſſe entre deux, comme on voit à la *Fig.* 117. ABCE, & afin que la branche du milieu ſoit ferme, on y ajoute des liens, comme mn, MN, qui empêchent qu'elle ne puiſſe s'incliner vers A, ni vers B.

ON prend enſuite une troiſiéme Régle RT, qu'on fait entrer dans

Digitized by Google

trois anneaux de fer ou de cuivre quarrez H, G & K, dans leſquels on l'enfile, & afin de pouvoir les fixer où l'on veut, on y ajoute une vis.

A deux de ces anneaux faits en façon de petite Boëte, tient une queuë en forme de pivot conique, qu'on fait entrer par les bouts de la rènure CE, & dans la rènure AB, ſi l'on en fait une, qui n'eſt neceſſaire que pour mieux aſſujettir le mouvement de la Régle RT; c'eſt pourquoi on fait ces rènures plus larges au fond que par le haut, & les pivots étant coniques, quoiqu'ils puiſſent être Cylindriques. A la boëte K au lieu de pivot, on met un crayon, ou une pointe, comme on le juge à propos pour mieux tracer.

L'Instrument étant ainſi fait, il ne s'agit plus que de ſçavoir déterminer la diſtance des pivots HG entre eux, & à l'égard du crayon K, pour tracer l'Ellipſe ſuivant la longueur des axes donnez.

Ayant porté ſur le grand Axe AB, la longueur CD de la moitié du petit, de A en F, la difference des deux demi-axes FC, ſera cette diſtance qu'on cherche du pivot H au pivot G; & la longueur CD ſera celle du pivot G au crayon K.

Les pivots & le crayon étant ainſi arrêtez par le moyen des vis, afin qu'ils ne puiſſent varier, il n'y a qu'à faire mouvoir la Régle RP ſur ſes pivots, en ſorte qu'il y en ait toujours un engagé dans la rènure des couliſſes AB, EC, qui ſont ici à angle Droit, parce que les axes ſont donnez; & à meſure que la Régle tournera ſur ces deux pivots, le crayon K tracera l'Ellipſe demandée.

J'ay dit que ces deux couliſſes étoient à angle Droit, parce que les deux axes ſont donnez; car ſi au lieu des axes, on avoit donné deux diametres conjuguez, elles devroient faire entr'elles d'autres angles que ces diametres, un obtus d'un côté, & un aigu de l'autre, qui ſeront d'autant plus aigus & obtus, que les diametres conjuguez approcheront de l'égalité; ainſi [*Fig.* 115.] ayant porté la diſtance CB de D en F, on fera la couliſſe inclinée à l'égard du diametre donné AB, ſuivant la ligne CF, ou ce qui eſt la même choſe, ſuivant les angles FCB & ACF, & l'on aura le crayon en D, & les deux pivots en P & F, de ſorte que ſi les lignes CB & DP étoient parfaitement égales, cet inſtrument ne pourroit plus avoir lieu. *Fig.* 115.

Ou il faut remarquer que la diſtance DP, qui eſt la difference de la perpendiculaire FP, & du demi diametre CB, peut tomber entre les points D & P, ſi le demi diametre CB eſt plus petit que DP.

Digitized by Google

SECONDEMENT, qu'on peut s'épargner la peine de faire une couliſſe ſur AB, pourvû qu'on tienne le pivot G, *Fig.* 117. ou P, *Fig.* 115. toujours appliqué à la Régle AB.

Fig. 117. SI l'on vouloit en même tems tracer une ſeconde Ellipſe parallele, ou à peu près à la premiere, il n'y auroit qu'à ajouter un quatriéme anneau en X, pour y appliquer un ſecond crayon, comme on a fait en K; mais ces deux Ellipſes ne ſeront pas ſemblables; parce que leurs diametres ne ſeront pas proportionels, de ſorte qu'elles ne peuvent pas être la ſection d'un berceau ou cylindre creux, de même épaiſſeur; la raiſon eſt que ſi des demi-axes CD, CB, on ôte des quantitez égales D*d*, BL, les reſtes C*d*, CL ne ſont plus en même proportion, C*d* n'eſt plus à CL, comme CD à CB; car ſuppoſant CD = 2, CB = 4, D*d* = 1, C*d* ſera à CL, comme 1 à 3, ce qui eſt tout different du rapport ſuppoſé CD: CB:: 2:4.

DEMONSTRATION.

Du point C pour centre, & de l'intervale de la moitié du grand axe CB pour Rayon, on décrira le quart de cercle SB, & par le point K, on tirera ſur CB la perpendiculaire O*r*, qui coupera le cercle au point O, & du centre C la ligne CO, qui ſera parallele à HK; parce que OK eſt parallele à CH, & que HK = CS = SO; donc C*o* KH eſt un parallelograme. Que HK ſoit égal à CS, il eſt évident par la conſtruction, puiſque GK = AF, & GH = CF, & CS ou BC = CA, or à cauſe des paralleles, on aura CO: GK:: O*r*: K*r*; mais CO = CS, & GK = CD; donc CD: CS:: *r*K: *r*O: donc [Art. 41.] la courbe DKB eſt une Ellipſe.

Ou il faut remarquer. 1.° Que les deux triangles rectangles GHC, GK*r*, qui ſont ſemblables, varient continuellement par le changement de poſition de la Régle RT; en ſorte que les côtez CH, CG, G*r*, *r*K augmentent ou diminuent, & cependant ils ne ſont jamais que la ſomme des quarrez de leurs hypotenuſes, qui ſont conſtantes HG, KG.

2.° QUE l'intervale CH, qui eſt la diſtance du centre C à un pivot, eſt toujours égal à l'excès KO de l'ordonnée du cercle, ſur celle de l'Ellipſe.

D'où l'on peut tirer une maniere aiſée de trouver autant de points que l'on voudra d'une Ellipſe à peu près parallele à une autre donnée, comme *d*xL, en imitant ce qui a été fait avec l'inſtrument. Il n'y a qu'à porter l'intervale OK en CH, ou *o*ℓ en C*b*, pour avoir les

Digitized by Google

inclinaiſons de pluſieurs lignes HK, *hk*, ſur leſquelles on portera la diſtance donnée D*d* en KX, & *kx*, pour mener par les points donnez & trouvez *d*, X, *x*, L l'Ellipſe demandée, à peu près équidiſtante à DK*k*B donnée.

Si l'on veut qu'elle ſoit exactement équidiſtante, il faut connoître les Foyers F*f*, [*Fig.* 111.] mener de chacun une ligne au point donné D, ou tout autre pris à volonté, & diviſer l'angle F D *f* en deux également par une ligne D*n*, ſur laquelle on portera du point D, la largeur du Bandeau, Archivolte, ou tout autre Ouvrage qu'on veut faire exactement de même largeur par-tout. *Fig.* 111.

Pour rendre cette operation plus facile, il n'y a qu'à prendre au contour de l'Ellipſe donnée, ou toute autre courbe, pluſieurs points à volonté pour centre 1. 2. 3. &c. deſquels avec l'intervale donné D*d* pour la largeur, on fera autant d'arcs de cercles, auſquels on menera à la main une courbe tangente a*tt d*, qui ſera celle qu'on cherche. *Fig.* 117.

Mais il faut obſerver qu'une telle Courbe, & toute autre qui n'eſt pas une concentrique ſemblable à la courbe donnée, n'eſt pas convenable aux ceintres qui doivent prendre leur naiſſance ſur un piedroit, parce qu'elle y feroit un jarret en *a* avec le piedroit *ap*, lequel ſera d'autant plus ſenſible & choquant à la vûë, que l'intervale D*d* ſera grand; car, il eſt viſible que les perpendiculaires à la courbe 1*a*, & A*a* ſe couperont en quelque point comme en *a*; de ſorte que tout l'arondiſſement de la naiſſance A 1, ſe réduit à la courbe intérieure en un ſeul point a, où ces deux perpendiculaires ſe croiſent, par conſéquent, puiſque une partie ſemblable s'y trouve de moins, il s'y fera un angle avec le diametre AB, plus aigu que l'angle mixte a A 1. qui eſt droit à ſon origine A, ou infiniment peu different du droit, & égal à celui d'un piedroit perpendiculaire ſur A B, donc l'angle mixte de la courbe *da*, avec le piedroit *ap* perpendiculaire ſur A B, ſera un angle different, qui ſera d'autant plus aigu, que l'arc A 1. ſera grand, par conſéquent un jarret; ce qui eſt inſupportable en Architecture.

Corollaire.

De ce que nous venons de dire, il ſuit encore, que la méthode de ceux qui prennent la meſure de la largeur à l'intervale des deux courbes, ſur les diametres de l'Ellipſe donnée, comme l'enſeigne le P. *Fig.* 111.

Digitized by Google

Alia interior Ellipsis non tantùm concentrica, sed etiam æquali inter vallo distans ab interiori quæ distantia sumatur secundùm radios à centro procedentes.

DECHALES, Livr. 5. Prop. 21. eſt encore très fautive ; car il eſt viſible que ſi cette diſtance eſt, par exemple, Dy, ſur Dn ou Du, ſur DC, le point u s'approche plus de la circonference que le point y, par conſequent l'Ellipſe ne ſera plus équidiſtante à l'exterieure A DmG donnée ; de ſorte qu'en cet endroit, le Bandeau ou Archivolte qu'on ſe propoſe de faire de même largeur, ſe trouvera plus étroit. : or la ligne Dn, qui diviſe l'angle F Df en deux également, ne tombe jamais ſur les rayons, que lorſque le point D eſt à l'extremité du petit diametre ou axe ; car (par la 9.e Prop. du 6.e Livre d'Euclide,) la ligne qui diviſe un angle d'un triangle fDF en deux également, coupe la baſe de ce triangle proportionellement aux côtez ; mais les rayons ou demi-diametres coupent tous la baſe fF en deux également en C, donc ils ne diviſent pas l'angle F Df en deux également ; nous démontrerons encore d'une autre maniere la fauſſeté de cette pratique, au chap. VIII. du 4.e Livre.

REMARQUE.

QUOIQUE *le Compas à Ovale* ſoit un aſſez bon inſtrument, on peut s'en épargner la façon, & operer très juſte dans les grands Ouvrages, en cherchant pluſieurs points de la circonference de l'Ellipſe qu'on ſe propoſe de faire, ſur leſquels on appuye une régle pliante fort mince, & d'une épaiſſeur bien égale qu'on arrête de chant, ou avec les mains, ou avec des pointes de cloux, comme nous l'avons dit ci-devant, au long de laquelle on peut tracer un contour auſſi ferme, & auſſi net qu'avec aucun Inſtrument ; voici d'autres problémes pour l'une & l'autre Methode.

PROBLEME VIII.

Les Diametres conjuguez étant donnez, tracer l'Ellipſe par pluſieurs Points, ou par un mouvement continu, ſans connoître les Axes ni les Foyers.

Fig. 115. SOIENT [*Fig.* 115.] les diametres conjuguez AB, ED, par le point D, extremité du plus grand, on tirera ſur AB la perpendiculaire indéfinie FP, ſur laquelle on portera la longueur A C, de D en F, d'où l'on tirera au centre C la ligne FC ; en ſuite du point I pris à volonté ſur CD, on menera une parallele IG à la ligne FP, & une autre IH au diametre AB. Si du point G, où IG coupe FC pour centre & pour rayon DF, ou AC, on fait un arc de cercle qui coupe IH en H & h ; je dis que les points H & h ſont à la circonference de l'Ellipſe.

Digitized by Google

DEMONSTRATION.

Soit pris CL ſur AB égale à HI, & mené LH qui ſera parallele à CD.

A cauſe des paralleles IG, PF, on aura CD : DF :: CI : IG, mais DF = GH = AG par la conſtruction, & CI = LH; & á cauſe du triangle rectangle HIG, $\overline{IG}^2 = \overline{GH}^2 - \overline{HI}^2 = CA - \overline{CL}^2 =$ au rectangle BL×LA (par la 5.e du 2.e Livre d'Euclide) donc ſi au lieu de CI, on met ſon égal LH, & au lieu de DF ſon égale CA, on aura $\overline{CD}^2 : \overline{LH}^2 :: \overline{CA}^2 :$ BL : ×LA : donc le point H eſt à la circonference de l'Ellipſe, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

D'ou il ſuit qu'on peut décrire une Ellipſe par un mouvement continu au tour de deux axes conjuguez, ſans autre inſtrument, qu'une Régle & une fauſſe Equerre, ou deux autres Régles qui faſſent un angle égale à FCB, trouvé comme nous venons de l'enſeigner, & une troiſiéme percée, ſuivant les diſtances P, D, F, pour mettre une cheville en P, & en F, aſſez ſaillantes, pour pouvoir y appuyer les régles FC, & CB; on mettra un crayon au troiſiéme trou en D, ou une pointe propre à tracer l'Ellipſe; ſi l'on fait couler le point F, où eſt la cheville, le long de la régle FC, & la cheville P le long de la régle CB, le crayon D tracera le quart d'Ellipſe D*b*B, & ſi l'on en fait de même de l'autre côté de la ligne FC, tranſportant la régle CB en CA; de même que la régle FP, on tracera l'autre quart d'Ellipſe CHD, qui fera avec le precedent la demie Ellipſe ADB, *ce qu'il falloit faire* par un mouvement continu. Pour ne pas changer la régle CB, il faut la faire longue, en ſorte qu'elle excéde les points A & B de chaque côté, de la longueur de DP.

USAGE.

Ce Problême peut ſervir à tracer des arcs rampans, & les projections des faces Elliptiques en talud, dont on n'a ordinairement que les diametres conjuguez, pour s'épargner la peine d'en chercher les axes; mais on peut le faire par pluſieurs points d'une maniere encore plus ſimple.

SECONDE MANIERE.

Soient les diametres conjuguez AB, DE: [*Fig.* 121.] ayant mené par le point D la ligne DT, parallele à AB, & par le point C la per- *Fig.* 121.

pendiculaire CK, qui rencontrera DT au point K, on prolongera cette ligne vers F. Du point C pour centre, & pour rayon CK, on décrira le quart de cercle HK, & du même centre; & pour rayon le demi diametre CB, on décrira un autre quart de cercle FB, que l'on diviſera en autant de parties égales ou inégales que l'on voudra, 1, 2, 3, F; il convient pour la commodité & la promptitude de l'operation qu'elles ſoient égales, parce qu'il faut diviſer l'autre quart de cercle HK, en un même nombre de parties, & ſi elles étoient inégales, il faudroit qu'elles fuſſent proportionelles à leurs correſpondantes; par chaune de ces diviſions 1, 2, 3, dans l'un & l'autre quart de cercle, on menera des parelleles au diametre CB, comme a*a*, *bb*, *cc*, dans le quart de cercle HK: & 1L, 2M, 3N, dans le quart de cercle BF; en ſuite par les mêmes points 1, 2, 3, du même quart de cercle FB, on menera d'autres lignes 3*g*, 2*b*, 1*i* parelleles à FC, par conſéquent perpendiculaires à AB, leſquelles couperont ce diametre aux points *g*, *b*, *i*; on menera par ces points des lignes *gc*, *bb*, *ia*, paralleles à CD, leſquelles couperont les précedentes a*a*, b*b*, aux points *a*, *b*, *c* qui ſeront à la circonference de l'Ellipſe.

Ces Points étant trouvez, il ſera bien aiſé de trouver ceux de l'autre côté du diametre ED; car il n'y aura qu'à porter les longueurs *oa*, *pb*, *qc* en *oa*, *pb*, *qc*, ſur les mêmes lignes *aa*, *bb*, *cc*, de l'autre côté du diametre CD: on aura ainſi pluſieurs points à la circonference de l'Ellipſe, par leſquels menant une ligne courbe à la main, ou avec une régle pliante, on aura la demie Ellipſe, & l'Ellipſe toute entiere, ſi l'on veut; puiſque la moitié CDB eſt égale à l'autre, qui paſſeroit par ACE, mais diſpoſée en ſens contraire.

DEMONSTRATION.

A cauſe des paralleles au diametre AB, & des diviſions égales en nombre, & proportionelles dans les quarts de cercle HK, & FB, les rayons CK & CF ſont diviſez proportionellement, de même que les lignes CK & CD, le ſont auſſi entr'elles; donc CD: C*q*:: CF: CN: & CD: C*p*:: CF: CM & CD: C*o*:: CF: CL, mais C*q* = *g*C, C*p* = *bb* & C*o* = *ia*: & par la même raiſon *g*3 = CN, *b*2 = CM & *i*1 = CL, donc *gc*: *bb*:: *g*3: *b*2, c'eſt-à-dire, que les ordonnées au diametre du cercle, & celles au diametre de l'Ellipſe ſont en même raiſon entr'elles, *ce qu'il falloit démontrer.* Art. 41.

PROBLEME

Probeme IX.

Alonger ou racourcir les Ellipſes en telle Raiſon qu'on voudra, en ſorte qu'elles ſoient toujours les Sections d'un même Cylindre.

Soit [*Fig.* 119.] le demi cercle BFE, la haſe d'un Cylyndre quelconque; ayant abaiſſé ſur ſon diametre BE, autant de perpendiculaires que l'on voudra *o r*, *o r*, *c* F, on joindra l'axe AB, qu'on ſuppoſe donné, ou pris à volonté, au diametre BE, ſous quelque angle que l'on voudra, comme ABE, & l'on achevera de former le triangle, en tirant une ligne par les extremitez A, E; enſuite par tous les points *o*, *o* & *c*, on menera des paralleles à la ligne A E, juſqu'à la rencontre de l'axe AB aux points *b*, *b*, C, par leſquels on élevera, ſur AB, autant de perpendiculaires indéfinies *b i*, *b i*, C D, qu'on fera égales aux ordonnées *o r*, *o r*, C F, en ſorte qu'elles ſoient terminées aux points *i i* D, par leſquels on fera paſſer une courbe à la main, ou avec une régle pliante, & l'on aura la circonference de l'Ellipſe demandée; nous n'en mettons ici que la moitié pour rendre la figure plus ſimple, l'autre moitié étant parfaitement égale. *Fig.* 119.

Demonstration.

Si l'on ſuppoſe le demi cercle EFB, relevé en E*d*B, & la demie Ellipſe ADB perpendiculaires au plan du triangle ABE, toutes les perpendiculaires aux diametres EB, AB le ſeront à ce plan, donc les diſtances des ſommets correſpondans F, D, *r* & *i*, qui ſont les mêmes que *d* D, R *i*, ſeront égales aux diſtances *b o*, C *c* du plan A B E; puiſque les lignes *o r* ou *o* R & *b i*, leur ſont perpendiculaires, & que ces mêmes *o r* & *b i* ſont égales entr'elles; donc elles formeront autant de parallelogrames, comme *c* C D *d*; donc ſi la figure E *d* B D A E eſt une moitié de Cylindre, la ligne C *c* ſera ſon axe, & D *d*, qui lui eſt parallele, ſera ſon côté; c'eſt-à-dire, à la ſurface: il en ſera de même de toute autre jonction des ſommets *i* & *r* ou R, comme *b i*, R *o*, *i* R qui ſera parallele, & égale à *b o*, laquelle eſt parallele à C *c*, donc *i* R ſera parallale à l'axe C *c*, & par conſéquent à la ſurface du Cylindre, *ce qu'il falloit démontrer.*

Que la ligne ADB ſoit une Ellipſe, nous l'avons fait voir au Probleme precedent; puiſqu'à cauſe des paralleles A E, *b o*, C *c*, les lignes E B, & A B ſont diviſées proportionellement, & que les ordonnées à ces diametres, ſont égales entr'elles, & par conſéquent proportionelles à celles du cercle, par la conſtruction; donc la courbe A DB eſt une Ellipſe Geometrique.

Digitized by Google

Il eſt à propos que je rende raiſon, pourquoi j'ajoute ici l'épithete *Geometrique* au nom propre de l'Ellipſe formée par ce problême; c'eſt que Daviler fameux Architecte, qui a fort bien écrit ſur ſon Art, étoit aſſez peu verſé en Geometrie, pour ne pas connoître l'exactitude de cette operation, s'imaginant apparemment qu'elle produiſoit une courbe d'une nouvelle eſpece; ce qui lui a donné occaſion de lâcher une abſurdité, dont j'ay montré le faux au commencement, & en pluſieurs endroits de cet Ouvrage, *la ſeverité des regles de Geometrie*, (dit-il, Page 237.) *eſt inferieure à la pratique, comme la methode des Cherches ralougées vaut mieux que les figures Geometriques, d'autant qu'en cet Art, la pratique eſt preferable à la Theorie*; quelle miſere d'entendre ainſi raiſonner un Auteur, un Maître de l'Art, & ce qui eſt encore plus ſingulier, en appeller au Tribunal d'un *Ouvrier*, qui n'eſt qu'un eſpece de Singe d'un Geometre, dans les traits de la coupe des Pierres, dont il parle, *le meilleur* (dit-il) *eſt de prendre quelque habile Ouvrier pour ſe conduire, parce qu'il ſoulage & inſtruit*? quelle inſtruction peut donner un homme qui n'agit que par mémoire, & une imitation ſervile de ce qu'il a vû faire à un Maître qui ſouvent étoit auſſi borné que lui, incapable de rendre raiſon de ce qu'il enſeignoit à ſon Diſciple; par conſéquent ſuſceptible d'adopter le faux; comme le vrai? n'eſt-ce pas choiſir un Aveugle pour ſe conduire? car enfin remontons à ces Maîtres, de qui ont-ils pû ſe tranſmettre ces preceptes que d'un Geometre? un tel raiſonnement ne vaudroit pas la peine d'être relevé, s'il n'étoit trop commun parmi les Architectes, & oſerois-je le dire parmi les Ingenieurs, où il n'eſt auſſi que trop ordinaire d'entendre exalter le merite de la ſeule pratique; il me ſemble ouïr ces Chirurgiens, qui ſe mêlent de Médecine, décrier les Médecins tant qu'ils peuvent, fiers d'avoir fait quelques cures, par le moyen de quelques Remédes qu'ils ont tiré de cette ſcience, & appliqué au hazard; ils avancent hardiment que la Pratique vaut mieux que toute la Theorie de la Faculté: mais revenons à notre ſujet, cette digreſſion m'entraine au delà des bornes d'une ſimple remarque.

Corollaire.

Il eſt évident que ſi au lieu du diametre AB, on en avoit pris ou donné un plus petit, comme aB, la conſtruction auroit été parfaitement la même; cette ligne auroit été diviſée auſſi proportionellement à la ligne EB, aux points *l*, *m*, *n*, & *a*; & en élevant ſur ces points autant de perpendiculaires à aB, égales aux correſpondantes *or*: on aura autant de points à la circonference d'une Ellipſe, qui ſera beaucoup plus courte que la precédente, & qui ſera cependant toute à la ſurface du même Cylindre par la même raiſon.

Digitized by Google

Corollaire II.

D'ou il ſuit: 1.° Que ſi l'angle B*c*C eſt aigu ou obtus, le Cylindre en queſtion ſera ſcalene; de ſorte qu'il pourra arriver, que ſi l'on prenoit un diametre égal à BE qui fit avec C*c* un angle égal à B*c*C, la ſection ſera encore un cercle, comme par exemple E*x*.

2.° Que ſi au lieu du demi-cercle EFB, pris pour baſe d'un Cylindre ſcalene, on avoit le demi-cercle AGB, & que l'on prit le diametre EB pour l'axe d'une Ellipſe racourcie, on trouveroit par la même conſtruction *cf* égale à la moitié du grand axe de cette Ellipſe, en portant CG en *cf*, & *b*L en *o*K; & ainſi de ſuite pour toutes les ordonnées.

Corollaire III.

Non ſeulement, on peut transformer ainſi une Ellipſe en un autre, plus ou moins alongée, ou une Ellipſe en un cercle, qui ſoit la baſe d'un même Cylindre; mais auſſi l'on peut encore transformer une portion moindre que la demie Ellipſe, ou que le demi-cercle en une autre plus alongée, & plus accourcie, en telle raiſon que l'on voudra, ſans qu'il ſoit neceſſaire d'en avoir les diametres, par le ſeul alongement des abſciſes, & la repétition des ordonnées correſpondantes.

Soit [*Fig.* 120.] un Secteur, de cercle BC*e*, ou ſimplement un arc D*e* qu'il faut convertir en portion d'Ellipſe *d*E qui ſoit ſection d'un même Cylindre, dont D*e* eſt portion de la baſe. Ayant mené par les extremitez D & *e* deux lignes droites D*a*, *e*a qui faſſent entr'elles un angle droit ou quelconque en a; on diviſera la ligne aD en autant de parties égales qu'on voudra, comme ici en trois, & l'on menera par les points 2, & 3. des paralleles 2*p*, 3*p* à la ligne a*e*; enſuite ayant fait à part l'angle *d*AE, égal à l'angle D*a*e, on diviſera A*d* en même nombre de parties égales, ou proportionelles; ſi les diviſions de la premiere ligne aD étoient inégales, & par les points 2. & 3. de diviſion de la ligne donnée A*d*, on menera des lignes 2P, 3P, paralleles & égales aux precédentes, correſpondantes aux mêmes diviſions 2*p*, 3*p*; la ligne courbe qui ſera menée par les points EP*pd*, ſera la portion *d'Ellipſe que l'on cherche.* *Fig.* 120.

Pour ſentir la raiſon de ce Corollaire, il faut achever le cercle, en trouvant le centre C de l'arc donné D*e*, & mener CB parallele à aD; qui coupera les lignes *p*2, *p*3 prolongées aux points *f* & *g*.

Presentement, puiſque à la Figure 119. nous avons operé ſur les

Digitized by Google

diametres AB, EB ; on peut conſiderer le triangle ABE, comme une ſection par l'axe du Cylindre, dont le rayon CB de la Figure 120. peut repreſenter une partie de la ſection de ce plan avec la baſe B*y*eB, & la ligne aD, celle d'un plan parallele à la ſection par l'axe, lequel retranche des lignes paralleles *fp*, *gp*, des parties égales *f*2, *g*3, non ſeulement dans le cercle de la baſe, mais encore dans l'Ellipſe de la ſection ; par conſéquent, puiſque les ordonnées de l'Ellipſe doivent être égales à celles du cercle de la baſe du Cylindre, ſi l'on retranche des correſpondantes, des parties égales, les reſtes doivent encore être égaux ; mais les abſciſes par la conſtruction ſont proportionelles, donc l'arc E*d* de la ſection oblique du Cylindre correſpond parfaitement à l'arc *e* D de ſa baſe, *ce qu'il falloit faire.*

USAGE.

Ce Problême eſt ſans contredit le plus utile de tous ceux, dont on peut faire uſage pour la coupe des Pierres ; car comme la plûpart des des voutes ſont des Cylindres Droits ou ſcalenes, & coupez obliquement par des differentes rencontres de plans ou de Cylindres égaux, ou de baſes Elliptiques égales ; on a continuellement beſoin d'alonger ou de racourcir les courbes des ceintres, ce que les Ouvriers appellent la *Cerce ralongée.*

Quant à l'uſage du ſecond Corollaire, il eſt auſſi fréquent en pluſieurs rencontres, par exemple pour trouver les joins de tête de la Porte en Tour ronde, &c. comme on le verra au 4.e Livre.

De la Parabole.

Probleme X.

L'Axe d'une Parabole, & un Point à ſa circonference étant donnez, la tracer par pluſieurs Points, & par un Mouvement continu.

Pl. 11. *Fig.* 122. Soit [*Fig.* 122.] SO4. l'axe donné, & D le point de la Parabole à ſon contour. Ayant tiré de ce point une perpendiculaire DO ſur l'axe SO, on tirera la ligne SD, ſur laquelle au point D, on fera la perpendiculaire D4, qui coupera l'axe SO prolongé au point 4 ; la longueur O4 ſera le Paramétre de la Parabole, qu'on diviſera en quatre parties égales, dont on en portera une de part & d'autre du ſommet S en F, pour avoir le Foyer F, & en G ſur l'axe 4S prolongé pour avoir la Directrice H*b*, laquelle eſt une perpendiculaire à l'axe prolongé d'un

Digitized by Google

quart du Parametre au-delà du ſommet S, nous en dirons l'uſage ci-après.

On tirera enſuite autant de perpendiculaires que l'on voudra à l'axe SO, pour axoir la même quantité de points au contour de la Courbe comme *i*K, dont les points *i* & *i* ſont pris à volonté; ou bien on cherchera le Parametre, en prenant au contour de la Parabole un point K à volonté, par lequel & par le ſommet S, on menera K S *a* indéfinie, puis portant en S *b* la longueur *i*K, on tirera par le point *b* une perpendiculaire à l'axe prolongé, laquelle coupera *k a* au point *a*, la ligne *b a* ſera le Parametre qu'on cherche, dont le quart porté de S en G, donnera la ſection de l'axe & de la Directrice; enſuite ouvrant le compas de l'intervale G *i*, à chaque point *i* en particulier, on poſera une des pointes en F, d'où comme centre, on décrira un arc qui coupera en K chaque perpendiculaire en *i*K, pour laquelle on a pris l'intervale *i* G correſpondant, faiſant de même pour toutes les lignes, on ſe ſervira du même centre F, & par tous les points S K K D; on tracera à la main, ou avec une Régle pliante une courbe qui ſera la parabole que l'on cherche; on en fera de même pour l'autre côté S C *d*.

Demonstration.

La ligne O 4. par la définition du Parametre à la premiere conſtruction, ou *a b* à la ſeconde ayant été faite troiſiéme proportionelle à l'axe S O, & à l'ordonnée O D ou *i* K, eſt le Parametre de la Parabole, dont le quart eſt la diſtance du ſommet S au Foyer F, & au point G par où paſſe la directrice.

Or la diſtance de cette ligne eſt toujours égale à celle du Foyer à l'extremité de l'ordonnée, comme il eſt démontré dans les ſections coniques, donc la courbe S K D eſt une Parabole.

Seconde Maniere par un Mouvement continu.

On prendra un cordeau égal à la diſtance O G, dont on atachera un bout ſur la branche E L, d'une Equerre H E L, meſurant ſa longueur depuis le point E de ſon angle, & l'autre bour ſera arrêté à un clou au Foyer F: enſuite ayant poſé la branche E L ſur l'axe S O, & l'autre branche E H ſur la directrice H A, on y appliquera une régle H R, puis appuyant avec un crayon ou une pointe ſur le cordeau pour le tenir appliqué contre la branche E L, on reculera l'Equerre le long de la régle H R, & à meſure qu'on l'écartera de l'axe S O toujours parallelement à elle-même, le crayon coulant dans le pli du cordeau au

point C, tracera la Parabole d'un côté de l'axe ; on transportera ensuite l'Equerre pour tracer l'autre moitié du côté aposé.

Il est évident que cette operation est precisément la même que la precédente, mais executée d'une maniere Méchanique ; puisque l'on aura par-tout CE = CF, comme l'on a eû Gi = FK, ce qui est la proprieté de la Parabole.

USAGE.

La description de la Parabole n'est pas d'un fréquent Usage dans la coupe des Pierres ; elle sert cependant pour tracer les arcs de face des Trompes quarrées par devant dans un angle Droit : l'axe qui est la ligne du milieu de niveau à l'Impoſte est donné, & la rencontre du milieu de la Trompe, avec l'aplomb au bout de cette ligne, est le point donné au contour de la Parabole.

Elle peut aussi servir à tracer un arc Rampant, dont les Piedroits sont en surplomb, dans une circonstance, dont nous parlerons dans la suite. Elle sert encore à tracer les jambages des cheminées les plus propres à réfléchir la chaleur du Feu, comme l'a démontré M. Gauger dans la Méchanique du Feu, où il en fait voir l'avantage sur ceux qui *sont paralleles* entr'eux.

Comme cette courbe resemble si fort à la *Chainette*, que quelques Mathématiciens s'y sont mépris, comme le grand Gallilei, & après lui M^rs. Blondel dans ses Problêmes de l'Architecture, Parent, & le P. Castel dans sa Mathématique universelle ; on pourroit s'en servir à tracer les Cintres des voutes, dont on fait les Voussoirs égaux. Je crois aussi avoir lû quelque part qu'un fameux Architecte se servoit de la Parabole dans les Cintres des Lunettes dans un Berceau.

Enfin on pourroit faire usage de ce Probleme pour le renflement & courbure du profil de diminution des colonnes, au lieu des deux manieres usitées, l'axe donné est le diametre de la base, l'abciſſe est la difference des deux demi-diametres à la base, & sous le chapiteau ; c'est-à-dire, la diminution d'un côté, le sommet est l'extremité de ce diametre ; & le point à la circonference est celui de diminution du diametre superieur, c'est-à-dire, son extremité sous l'Astragale.

Digitized by Google

De l'Hyperbole.

PROBLEME X.

Le Centre, le Sommet & un point au contour de l'Hyperbole étant donnez, la décrire par pluſieurs Points, & par un Mouvement continu.

Fig. 123.

SOIT le centre C, le ſommet S, & le point D à la circonference, la ligne CO mené du centre par le ſommet S en O, ſera l'axe prolongé, auquel la perpendiculaire OD ſera une ordonnée. Des points S & D pour centres, & pour rayon une ouverture de compas priſe à volonté; on fera des ſections d'arcs en *p* & *q*, pour mener par ces points une ligne *p q*, laquelle étant prolongée, s'il le faut, coupera l'axe CO en V; d'où comme centre, & de l'intervale VS, ou VD; on décrira le demi-cercle SDG, qui rencontrera SO prolongée en G: enſuite ayant porté la longueur OG ſur la ligne DO, prolongé en OH, on lui menera par le point S la parallele indéfinie IST; on prolongera SC en R, faiſant CR = CS: on tirera RH, qui coupera IT en I; on portera la longueur SI en SK, pour avoir la ligne KR, qu'on diviſera en deux également au point M, ou ſera le centre d'un demi-cercle RTK, dont elle ſera le diametre, & dont l'arc coupera la ligne ST en T; puis ayant diviſé ST en deux également au point N, on portera la diſtance CN en CF; le point F ſera un des Foyers de l'Hyperbole, & ſi on porte la diſtance SF en R*f*, on aura l'autre Foyer.

CETTE preparation étant faite, ſi l'on veut trouver pluſieurs points de l'Hyperbole avec le compas d'une ouverture *f*L priſe à volonté, pourvû qu'elle ſoit plus grande que *f*S, pour rayon, & du point *f* pour centre, on fera un arc *l*L; enſuite on portera le même intervale *fl* de R en *o*, par exemple, ſur l'axe prolongé, & l'on prendra la difference *o*S de cet intervale & du premier axe RS, & de cette difference *o*S pour Rayon, & du Foyer F pour centre, on fera un autre arc *x y*, qui coupera *l*L au point *x*, lequel ſera à la circonference de l'Hyperbole, on trouvera de même autant de points que l'on voudra de cette Courbe.

Seconde Maniere par un Mouvement continu.

AYANT pris une régle *f*E d'une longueur convenable, qui excede la plus grande diſtance *f*D du Foyer oppoſé *f*, au point donné D; on lui fera un trou au bout *f* pour y paſſer un clou, ſur lequel elle ſera mobile; on portera ſur cette régle la longueur RS du premier axe de *f* en Q; enſuite on prendra un cordeau de longueur égale à QD, dont

on attachera un bout à l'autre Foyer F, puis posant la régle *f*E sur F*o*, on étendra le cordeau qui est lâche dans cette situation, en le tirant par un pli de F en S, le long de la régle, & en l'écartant par le bout E, l'autre restant fixe en *f*, on appuyera sur le pli du cordeau avec un crayon ou une pointe d'outil contre la régle, en le faisant couler vers D, & l'on tracera ainsi l'Hyperbole, comme nous l'avons dit de l'Ellipse & de la Parabole.

Demonstration.

L'on a cherché une troisiéme proportionelle OG à l'abscisse OS, & à l'ordonnée OD, pour trouver par son moyen le Parametre SI, car HO=OG: SI:: RO: RS; mais aussi le Parametre est troisiéme proportionelle au premier axe RS, & au second *b*Y, donc en cherchant une moyenne proportionelle ST entre SR & SI=SO, on aura *b*CY qui lui est égale; or il est démontré dans les sections coniques, que la distance du centre C au point N, milieu de ST est égale à celle de ce centre au Foyer, parce que SN est moyenne proportionelle entre RF & SF, ou ce qui est la même chose entr *f*S & SF, comme il est évident par la construction; donc les points *f* & F sont les Foyers; il est aussi démontré que la difference des lignes *f*D, FD tirées des foyers à un point de l'Hyperbole est égale au premier axe RS; donc l'Hyperbole est décrite par les points S & D, *ce qu'il falloit faire.*

Il est clair que la seconde operation, par un mouvement continu, est precisément la même que la premiere par plusieurs points; puisque l'on y a pris la difference FD du premier axe RS, pour en faire la distance du foyer au crayon D; ce n'est donc que la même chose faite méchaniquement avec un cordeau, au lieu d'un compas.

Corollaire.

Fig. 124. Si les deux axes sont donnez, les foyers se trouvent très-facilement en élevant du point S une perpendiculaire S*d*=CD, & tirant C*d* qui sera la distance du centre C au foyer F, que l'on transporte en F par un arc *d*F sur le premier axe prolongé.

Fig. 124. Il faut remarquer que dans l'Architecture où les Cônes sont presque toujours donnez, & le point ou la position du plan de leur section dans le triangle par l'axe du Cône, les deux axes sont aussi toujours donnez; car [*Fig.* 124.] soit ADB le triangle par l'axe, & le plan coupant HSC prolongé; si l'on prolonge aussi le côté BD jusqu'à la rencontre du plan en X, la distance SX est la longueur du premier axe, lequel étant divisé en deux également en C, la ligne CD sera la moitié du

Digitized by Google

du ſecond axe; & ſi par le centre C, on tire deux lignes droites CP & CT, paralleles aux côtez DA, DB, on aura auſſi les Aſymptotes, dont on peut faire uſage pour décrire l'Hyperbole par pluſieurs points. Cependant comme il peut arriver que le triangle par l'axe du Cône ne ſoit pas donné; parce que l'on peut conſiderer les ſections coniques hors du Cône. Nous allons faire voir comment l'on peut trouver les Aſymptotes d'une Hyperbole, dont on ne connoît que le centre, le ſommet & une ordonnée; de même que dans la propoſition précedente, ou ſeulement un diametre & une ordonnée.

Probleme XII.

Etant donnez le Centre, le Sommet & une Ordonnée à l'Hyperbole, ou ſeulement un premier Diametre & une Ordonnée, trouver les Aſymptotes & la décrire par pluſieurs Points.

Soit [*Fig.* 125.] le centre C, le ſommet S, & l'ordonnée DO, on aura l'intervale CS pour la moitié d'un diametre, dont le double SP ſera le diametre entier, auquel [étant prolongé] la ligne DO eſt une ordonnée qui lui ſera perpendiculaire, ſi ce diametre eſt un axe. *Fig.* 125.

Par le point S, on menera AB parallele indéfinie à DO, & par le point donné D, au contour de l'Hyperbole; on tirera la ligne DP qui coupera AB en A; on fera SG égal à AS, & par le point G ayant mené GR parallele à DO, ou AB; on tirera la droite DSR qui coupera GR au point R, la ligne GR ſera le Parametre que l'on diviſera en deux également en M; on portera la longueur GM de S en *b*, & ſur *b*C, comme diametre ayant décrit un demi cercle; on menera SN perpendiculaire à C*b*, laquelle étant moyenne proportionelle entre le demi diametre CS, & le demi Parametre GM = S*b*, ſera égale à la moitié du diametre conjugué au premier SP: on portera donc la longueur SN en SB, qui eſt parallele à DO [par la conſtruction] la ligne menée du centre C par le point B, ſera une Aſymptote: la même diſtance portée de l'autre côté vers A donnera auſſi le point par où doit paſſer l'autre Aſymptote CE; *ce qu'il falloit premierement trouver.*

Les Aſymptotes étant données, il eſt très facile de trouver autant de points que l'on voudra au contour de l'Hyperbole; car ayant fait O*d* égal à l'ordonnée OD prolongée de part & d'autre vers *r* & *r*, on tirera à volonté les lignes *qr*, Q*r* par les points D & *d*, enſuite portant les longueurs D*r*, *d r* de *q* en I, & Q en *i*; on aura les points *i* & *i* qui ſont à l'Hyperbole; on tirera autant de ces lignes Q*r* qu'on voudra trouver de points *i*, & par ces points, & les points D, S, *d*, on tracera

une courbe à la main, ou avec une régle pliante, laquelle donnera le contour de *l'Hyperbole qu'on cherche.*

On voit, comme au Problême précedent, que ſi on a la moitié du diametre conjugué toute l'operation eſt abregée; puiſqu'il ne s'agit que de la porter de S en B, pour avoir le point B de l'Aſymptote qu'on doit mener par le centre C donné.

La démonſtration de ce Problême dépend de quelques proprietez des ſections coniques que nous ne pouvons rappeller ici; on les trouvera dans tous les Traitez des ſections coniques.

La principale eſt que les lignes qui traverſent les Hyperboles d'une Aſymptote à l'autre ſont coupées également par leurs diametres; & parce que les ordonnées DO & *d*O ſont égales, comme dans toutes les ſections coniques, les reſtes D*r*, & *dr*, ſont auſſi égaux; ce qui fait la baſe de l'operation.

USAGE

On rencontre aſſez ſouvent des Hyperboles, lorſqu'il s'agit de faire des voutes ou d'autres corps coniques. La deſcription de cette courbe eſt néceſſaire, 1.° pour faire l'Epure de la Porte en Tour ronde, & en Talud, ſuivant notre méthode; 2.° pour le trait de la Trompe conique à trois Pans; 3.° pour la Trompe en tour ronde érigée ſur une ligne droite; 4.° pour les joins de la Corne de Vache; 5.° pour les naiſſances des arrieres vouſſures bombées; 6.° pour la nouvelle arriere vouſſure de Marſeille; 7.° pour les lunettes ébraſées dans une voute ſphérique; 8.° les arcs rampans dont les piedroits, ſeroient en ſurplomb dans certains cas; 9.° pour les joins montans des arrondiſſemens coniques des angles en talud; 10.° pour la ſolution du Problême qui donne la maniere de tirer les joins de Tête des ceintres Elliptiques ou Hyperboliques par des points donnez hors de ces courbes; 11°. enfin le Problême précedent peut ſervir ſi l'on veut au trait de la courbe de diminution & de renflement des colomnes, au lieu de la Conchoide de Nicomede; l'Hyperbole ſelon moy vaudroit mieux pour la grace du contour, parce que ſi on les diminuoit à la maniere des anciens dès le bas, le fuſt de la colomne auroit plus de grace étant portion d'Hyperboloide que de Cône tronqué; & par la nature de l'Hyperbole la partie inferieure de la colomne auroit le plus grand arrondiſſement qui diminueroit & le redreſſeroit en montant ſous le chapiteau; ce qui auroit une grande analogie avec celui que la nature fait

Digitized by Google

aux Arbres, & par conſéquent une plus grande beauté, qui eſt une plus parfaite imitation de la nature.

On auroit donc pour ſommet le côté de la baſe, pour point à la circonference de l'Hyperbole, & pour ordonnée celui de la diminution ſous l'Aſtragale du chapiteau, & pour le centre la diſtance du Module, ou demi diametre de la colomne à la baſe porté ſur la prolongation de ce diametre hors de la colomne, ce qui tombe dans le cas du Problême précedent.

De tout ce que l'on vient de dire, & de pluſieurs autres endroits où nous avons parlé des ſections coniques; on peut conclure que ceux qui diſent comme l'Autheur Moderne de la pratique de la coupe des Pierres, que les ſections coniques n'y ſont pas néceſſaires, n'en connoiſſent pas les uſages.

Scholie.

Par une conſtruction ſemblable à celle de ce Problême, on peut décrire au dehors ou au dedans d'une ſection conique quelconque une courbe ſemblable, dont il ſuffit d'avoir un ſeul point donné.

Soit, pour exemple [*Fig.* 127.] une Ellipſe donnée PTB, dans laquelle on en veut décrire une ſemblable par un point donné *e*; on tirera à volonté par ce point *e* une ligne 1. 2. qui coupera l'Ellipſe donnée aux points 1. 2. on portera l'intervale *e* 1. de 2. en *f*, le point *f* ſera un ſecond point de l'Ellipſe demandée; lequel ſervira à en trouver un troiſiéme, en menant par *f* une ligne auſſi à volonté *g* 4; on portera l'intervale 3*f*, de 4. en *g*, où ſera un troiſiéme point, lequel ſervira à en trouver un quatriéme *b*, en tirant 5 *g* 6, & portant *g* 5 en 6 *b*, ainſi de ſuite.

Ce que nous diſons ici pour l'Ellipſe convient auſſi à la Parabole & à l'Hyperbole; c'eſt pourquoi M. de La Hire a appellé les Figures ſemblables inſcrites ou circonſcrites à une ſection conique; avec cette proprieté *Aſymptotiques*, en ce que l'une peut être conſiderée à l'égard de l'autre, comme une Aſymptote courbe, j'explique ce nom que j'adopterai quelques-fois pour éviter les périphraſes, parce que j'ay trouvé un grand Mathematicien qui ne le trouvoit pas à ſon gré.

Digitized by Google

PROBLEME XIII.

Par cinq Points donnez qui ne ſoient pas en ligne droite, tracer une Section conique quelconque par un Mouvement continu, ſans en connoître les Axes, les Diametres, les Centres ni les Foyers.

Fig. 126. SOIENT [*Fig.* 126.] les points donnez ABCDE, par leſquels on veut faire paſſer une ſection conique qui ſe trouvera ſuivant leur ſituation une Ellipſe, une Parabole, ou une Hyperbole; dans l'exemple propoſé, ils conviennent à une Ellipſe. Ayant tiré par deux de ces points, comme AB une ligne FG, prolongée au delà des points A & B, on tirera les lignes AC, AB, AE & BC, BD, BE: enſuite on prendra avec deux régles, ou avec l'inſtrument qu'on appelle Sauterelle les angles DAF, DBG, dont on appliquera le côté AD en AC, la branche AF ſe rangera ſur A*x*, de même la branche BD de l'autre angle étant portée en BE, l'autre branche BG ſe rangera en BX; on en fera de même des angles BE*b*, BDI, & l'on aura l'interſection des côtez E*b* avec A*x* au point *x* & *i*, avec BY, au point Y. On tirera la ligne droite *xy*; enſuite ayant fait avec les mêmes Sauterelles ou quatre régles les angles BAD, ABD mobiles ſur les points A & B, comme ſur des pivots, on fera croiſer les deux branches de la Sauterelle tout le long de la ligne droite *xy*, comme par exemple en *k*, les deux autres branches A*g*, B*f* ſe croiſeront en un point comme L, qui ſera à la circonference de la ſection conique; on continuera de même en promenant la croiſée de K tout le long de *xy*; mais lorſque les branches B*f*, AG ſeront au deſſous de B & A du côté de la ligne *xy*, il faudra en prolonger l'alignement par une régle appliqué au long de A*g* ou de BF.

La démonſtration de cette conſtruction eſt un peu trop longue pour lui donner place ici: il ſuffira de dire qu'il eſt démonſtré dans les Traitez des ſections coniques, qu'on peut en faire paſſer pluſieurs differentes par quatre points donnez, mais non pas par cinq; or ſuppoſant (comme il eſt vrai) que ce mouvement organique ne peut produire qu'une courbe du ſecond ordre, ſi les points ſe trouvent diſpoſez pour une Ellipſe; il n'y en aura qu'une qui ſatisfaſſe à la propoſition. On peut voir ſur cela le ſçavant Livre de M. *Mac-Laurin* intitulé *Geometria Organica.*

PROBLEME XV.

Deux Touchantes avec les Points d'attouchement à une Section Conique, & la Direction d'un ſeul Diametre étant donnez, trouver autant de Points que l'on voudra de cette Courbe, ſans connoître le Centre de la Section, ni la grandeur d'aucun Diametre.

Fig. 129. SOIENT les deux touchantes données AD, DB, [*Fig.* 129.] qui

Digitized by Google

touchent la ſection conique cherchée aux points A & B: ſoit auſſi la ligne AP portion d'un diametre, dont on n'a pas la longueur, mais ſeulement la poſition, c'eſt-à-dire, l'angle DAP, qu'il fait avec la touchante AD: ayant tiré la droite AB d'un point d'attouchement à l'autre, on la diviſera en deux également en F, par où on tirera la ligne droite DFC indéfinie, qui ſera portion d'un diametre, ſur lequel on cherche un point de la Courbe.

On ſçait que ſi la ſection eſt une Parabole, cette ligne DC ſera parallele à AP, autre poſition de diametre donnée: ſi elle doit être une Ellipſe, les lignes AP & DC ſeront convergentes vers C, & ſi elle doit être une Hyperbole, elles ſeront divergentes, & concourront hors de la Courbe.

Par le point F, on tirera FG parallele à AP, qui coupera AD au point G, & l'on diviſera GD en deux également en I; par le point G, on menera GH perpendiculaire à AD, puis du point I pour centre, & de l'intervale IA pour Rayon; on ſera un arc H*b*, qui coupera GH au point H: enſuite on menera A*d* parallele à DC, on ſera AK égale, ſi l'on veut à GH, où l'on en prendra une partie aliquote, comme la moitié, le tiers ou le quart, ou on la ſera plus grande, & l'on ſera A*d* égal à AD, ou à la même partie aliquote, que AK l'eſt de GH, & l'on tirera par le point D la ligne *d*E, juſqu'à la rencontre de AB prolongée, s'il le faut, en E, par où on tirera EK qui coupera DC au point *x*, lequel ſera un de ceux de la Courbe.

Pour avoir enſuite un autre point de cette Courbe; on menera par le point *x* une ligne *a b* parallele à AB, & l'on ſera la même operation ſur les lignes A*a*, & *ax*, & B*b*, & *bx* qui ſeront deux tangentes données, qu'on a fait ci-devant ſur les deux AD, DB, & l'on aura deux autres tangentes, dont une ſera toujours une partie de AD; & ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'on ait cinq points de la Courbe pour la tracer par un mouvement continu par le Problême XIII. ou que les points trouvez ſoient multipliez & approchez autant qu'on le ſouhaite, pour la tracer éxactement à la main ou à la Régle pliante.

Demonstration.

Il eſt démontré dans les ſections coniques qu'un diametre, lequel étant prolongé, paſſe par la rencontre de deux tangentes, coupe en deux parties égales la ligne qui paſſe par les deux points d'attouchement; & par conſéquent toutes celles qui lui ſont paralleles, & par l'inverſe que ſi l'on diviſe une ligne qui paſſe par les points d'attouchement de

Voyez la Sect. 1. p. 18.

deux autres, en deux également, & que de leur rencontre, & par le milieu de cette ligne, on en mene une autre prolongée, elle paſſera par le centre de la ſection conique, ſi elle en a un; or par la conſtruction nous avons coupé AB en deux parties égales en F; donc la ligne DFC eſt un diametre.

Nous avons auſſi dit Article 46. que la partie de ce diametre coupée par la ligne AB, qui joint les points d'attouchement, celle qui eſt coupée par la courbe de la ſection, c'eſt-à-dire, le demi diametre de celles qui ont des centres, & l'intervale du centre au concours des deux tangentes ſont continuellement proportionelles; donc ſuppoſant ce centre en C, qui ſera dans cette propoſition (ſi l'on veut) hors de la Figure 129. il ſera toujours vrai que CF: Cx:: Cx: CD & que AP & DC doivent concourir au centre de la ſection, ſi elle en a un; mais parce que on a fait HG moyenne proportionelle entre AG & GD, ſi l'on porte GH en AI: la ligne Ix ſera parallele à AP; comme FG l'eſt à AP (par la conſtruction,) preſentement à cauſe des trois lignes CF, Cx, CD qui ſont en proportion continuë, ou des trois AG, AI, AD; on aura CF: Cx:: Fx: xD, ou:: AG: AI, c'eſt-à-dire:: AK; Ad (par la conſtruction;) donc à cauſe des paralleles Ad & FD, on a Fx: xD:: AK: Kd:: CF: Fx:: Cx: CD; donc le point x eſt à la ſection, puiſqu'il coupe FD, de maniere que Cx eſt une moyenne proportionelle entre CF & CD: *ce qu'il falloit démontrer.*

Nous avons dit que ſi CD eſt parallele à AP, la ſection ſera une Parabole, alors le point G tombera en D, & AI deviendra la même que AD, d'où il ſuit qu'il ſuffit de diviſer FD en deux également en z pour avoir ce point à la Parabole; ce qui ſe trouveroit auſſi par la premiere conſtruction, parce que AK & Kd ſeroient égales, & par conſéquent Fx & xD qui leur ſont paralleles dans le triangle ADE.

Si les lignes DC & AP concourent au dehors, la conſtruction ſera toujours la même, mais renverſée, telle eſt l'Hyperbole à l'égard de l'Ellipſe.

USAGE.

Cette propoſition peut ſervir dans l'arrondiſſement des angles des Figures irregulieres, par exemple pour une cage d'Eſcalier dans un angle aigu ou obtus, dont on prend la naiſſance à des points donnez par la convenance du lieu: elle peut auſſi ſervir pour les arcs Rampans, où l'on a trois tangentes & trois points d'attouchement donnez; mais pour ceux-ci, nous donnerons le Problême ſuivant.

Digitized by Google

Probleme XIV.

Trois Tangentes à une Section Conique, & leur Point d'attouchement étant donnez, trouver celle des Sections qui doit les toucher, & les Lignes néceſſaires pour la décrire.

Premierement, on peut facilement connoître la nature de la ſection conique demandée par les obſervations ſuivantes.

1.° Si deux de ces tangentes ſont paralleles, comme AS, BO *Fig.* 130. & 131. la ſection ne peut être qu'un cercle ou une Ellipſe; parce qu'il n'y a que ces deux qui rentrent en elles-mêmes. Elle ſera un cercle ſi les tangentes PC, CT ſont égales de même que T*i* & *ir*, & une Ellipſe, ſi elles ſont inégales, comme PE, EF * & RS, ST, &c. *Fig.* 130. & 131. *Fig.* 131.

2.° Si deux de ces tangentes, n'étant pas paralleles, concourent en X *Fig.* 127. du côté oppoſé au troiſiéme point d'attouchement T donné, comme PA, RB, la ſection demandée ſera encore une Ellipſe, par la même raiſon, ou un cercle.

3.° Si les deux tangentes extrêmes AS, BO étant prolongée, concourent du côté du troiſiéme point d'attouchement T donné; & que la tangente moyenne ſoit parallele à la ligne RP *Fig.* 128. qui paſſe par les points d'attouchement P & R des extrêmes, comme SO parallele à RP; il ſera encore facile de connoître qu'elle eſt la Courbe qui ſatisfait à la queſtion. *Fig.* 128.

Ayant diviſé RP en deux également en *m*, on tirera *m*X, qu'on diviſera en deux également en T.

1.° Si la tangente moyenne SO paſſe par ce point T, la courbe demandée ſera une Parabole.

2.° Si cette ligne paſſe au deſſous, comme en EL, elle ſera une Ellipſe.

3.° Si elle paſſe au deſſus du côté de X, comme en *by*, elle ſera une Hyperbole.

4.° * Si la tangente moyenne SO n'eſt pas parallele à RP, qui paſſe par les deux points d'attouchement des extrêmes; on connoîtra encore facilement qu'elle eſt la ſection qui ſatisfait à la propoſition; car ayant prolongé RP & SO, juſqu'à ce qu'elles concourent en Y, il ne s'agit que d'examiner le raport des parties des lignes SY & PX, ſi SY : SO :: XO : OP, la courbe ſera une Parabole, ſi le raport de SY à YO, eſt *Fig.* 132. *Fig.* 132.

moindre que celui de XO à OP, elle ſera une Ellipſe, s'il eſt plus grand, elle ſera une Hyperbole.

Fig. 133. *Premiere ſolution pour la Parabole* ayant diviſé RP en deux également en M, & tiré MX qui coupera SO en T; on lui menera par les points P & R, les paralleles PQ, RV juſqu'à la rencontre de SO prolongée, qui les coupera aux points V & Q; on diviſera enſuite les lignes TX, PQ, RV en un même nombre de parties égales, par exemple ici en trois, à commencer le compte des diviſions vers la ligne SO; les lignes menées par les points correſpondans 1. & 1. 2. & 2. ſe couperont en des points *y* & *z*, Y & Z qui ſeront à la circonference de la Parabole; ainſi menant une ligne à la main, ou avec une Régle pliante par les points R *z y* T Y *z p*; on aura le contour de la ſection qui touche les trois lignes données.

Seconde ſolution pour l'Ellipſe & l'Hyperbole, par les points d'attouchement donnez RTP, ayant tiré les lignes RT, PT [*Fig.* 134.] on les
Fig. 134. 135. diviſera en deux également en N & *n* par où, & par les points S & O, on menera les lignes NS, *n o*, leſquelles étant prolongées, ſe couperont au point C, où ſera le centre de la ſection, par le moyen duquel on a déja un diametre en portant CT en C*t* ſur la même ligne prolongée; ainſi la queſtion ſera réduite à celle-ci: *un diametre & une ordonnée à ce diametre étant donnée, trouver ſon Parametre, & autant de points que l'on voudra de la ſection.*

PAR les points P & *t* ayant mené V P *t*, qui coupera SO prolongée en V; on portera VT en TD ſur le diametre T*t* prolongé [*Fig.* 134.] & ſur la prolongation, on menera D 3. parallele à SO, qui ſera terminée au point 3. par la droite PT 3. par ce point, on menera 3. Q parallele & égale à DT, & l'on diviſera les longueurs 3. Q & TV en même nombre de parties égales, par leſquelles & par le point T, on menera les lignes 1T*y*, 2T*z*, & du point *t* par les diviſions de TV, les droites *t y*, *t z*, qui couperont les précedentes aux points *y* & *z*, & qu'ils ſeront à la circonference de l'Ellipſe *Fig.* 134. ou de l'Hyperbole *Fig.* 135. ſi par les points *y* & *z*, on mene des paralleles *y f*, *z f* à SO, qui couperont le diametre T*t*, *Fig.* 134. ou ſa prolongation *Fig.* 135. en *e* & *g*, & qu'on faſſe *e f* = *e y*, *g f* = *g* P, on aura les points *t*, *f* & *f* correſpondans à ceux de l'autre côté de la courbe; & on pourra la tracer à la main, ou avec une Régle pliante; *ce qu'il falloit faire.*

DEMONSTRATION.

Premierement, pour l'invention du centre de la ſection. Puiſque les lignes RT & TP qui joignent les points d'attouchement ſont diviſées en deux également

également en N & n, & que les lignes NS & nO paſſent par la rencontre * des tangentes; elles ſont dans la direction des diametres, par conſéquent chacune d'elles paſſera par le centre qui ſera au point C qui leur eſt commun, & le point T étant à la circonference, la ligne menée par CT ſera encore un diametre égal à 2. CT = Tt, par la conſtruction; & parce que SO tangente paſſe par T, toute ligne comme gP qui lui ſera parallele, ſera une ordonnée à ce diametre; par le moyen de laquelle on a trouvé ſon Parametre, qui doit être une troiſiéme proportionelle au premier Tt, & au ſecond inconnu, qu'on ſuppoſe ici pour la facilité de la démonſtration égal EI, *Fig.* 134.

Art. 50. *Voyez la Hire l. 2. p. 19. L'Hopital* Art. 20.

Ayant mené tI juſqu'en SO prolongée en u, & ayant fait comme dans la conſtruction TW = Tu, W4, parallele à SO, & tiré T4, la ligne W4 ſera le Parametre du diametre tT; car ſi l'on appelle tT $2a$, CI b, Tu, d, 4W, x; à cauſe des triangles ſemblables Ttu, CtI, on aura $2a$: d:: a: b, & à cauſe de TW = Tu, & des triangles ſemblables T4W, TIC, on aura a: d:: b: x, donc en multipliant ces deux analogies, on aura $2aa$: dd:: ab: bx, & $2aabx = ddab$, & retranchant de part & d'autre ab: on aura $2ax = dd$, c'eſt-à-dire, que le rectangle de $2a$ = Tt par x = 4W, ſera égal au quarré de dd = 2CI = EI, donc 4W eſt le Parametre qui eſt égal pour toutes les Ordonnées gP, ez, ey au diametre Tt, auquel il eſt troiſiéme proportionelle; *ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

Dela on tire la maniere de connoître quelle eſt la ſection qui convient aux trois tangentes données; car ſi les lignes qui paſſent par les rencontres des tangentes, & les milieux des lignes qui joignent les points d'attouchement, concourent en dedans, comme à la Figure 134. la ſection eſt une Ellipſe, ſi elles concourent en dehors, *Fig.* 135. c'eſt une Hyperbole, & ſi elles ne concourent point, qu'elles ſoient paralleles, c'eſt une Parabole, *Fig.* 133.

CHAPITRE III.

De la Deſcription de quelques Courbes Uſuelles dans l'Architecture.

Leſquelles ne ſont pas des Sections Coniques.

PROBLEME XVI.

Tracer une Ovale du quatrième Ordre formée par la Section plane d'un Corps Cylindrique, Annulaire, Horiſontal ou Rampant, c'eſt-à-dire, Helicoide.

Pl. 13. *Fig.* 149. SOIT [planche 13. *Fig.* 149.] la moitié d'un corps Cylindrique, Annulaire *i* D I G F *g i*, dont les côtez *i* D I exterieur, & *g* F G interieur, ſont des cercles Concentriques au centre C, & dont l'axe courbe eſt dans le même plan que ces deux cercles. Soit un autre plan perpendiculaire à celui-ci qui coupe le corps Annulaire, ſuivant la ligne A B; il faut décrire la courbe formée à la ſurface de ce corps par la ſection du plan.

Sur *i g* diametre du corps Cylindrique ayant fait le demi cercle *i b g*, qui repreſente la moitié de ſa baſe; on diviſera ce diametre *i g* en autant de parties que l'on voudra avoir de points de la courbe pour ſa moitié, juſqu'à une ligne C D, qui ſera priſe pour Rayon du cercle exterieur, & perpendiculairement ſur *i* I; par les points de diviſion 1, 2, 3, 4, on fera du même point C pour centre autant d'arcs concentriques, prenant ſucceſſivement pour Rayons de ces arcs C 1, C 2, C 3, C 4, & terminant ces arcs à la ligne A B, par où paſſe le plan coupant, aux points K L M, par leſquels on élevera autant de perpendiculaires indéfinies ſur A B, & pour en déterminer la hauteur, on élevera de même ſur le diametre *i g* autant de perpendiculaires par les points 1, 2, 3, 4, leſquelles couperont le demi cercle *i b g* aux points *s*, *t*, *b*, *u*, *x*; enſuite portant les longueurs 1 *s* en K *k*, 2 *t* en L *l*, 3 *u* en M *m*, & 4 *x* en E Æ; on aura les points *k l m* Æ, par leſquels on fera paſſer une courbe tracée à la main, ou avec une Régle pliante. On portera les Ordonnées correſpondantes de l'autre côté de C D en N *n*, O *o*, P *p*, & on aura tout un côté de cette Ovale depuis ſon axe A B, auquel l'autre ſera égal; ſi on a beſoin de le tracer, ce que nous n'avons pas fait dans cette Figure pour ne la rendre pas trop confuſe.

A l'égard du milieu où eſt le plus grand abaiſſement de l'inflexion; il ſera trouvé par l'arc tangent à la ligne A B qui eſt ici 4 E, & ſa hauteur 4 *x* portée en E Æ.

Digitized by Google

Corollaire I.

Si le Plan coupant approche plus près du point F que la ligne A B, l'inflexion au milieu ſera plus grande ; de ſorte que ſi le plan coupant paſſe par F, au point d'attouchement du cercle *g* F G, qui eſt le côté interieur de l'Anneau, la courbe ſe diviſe en deux, & le point Æ tombe ſur le point F ; parce que le point *g* correſpondant de la baſe *i b g* eſt dans le même plan que le point F, par conſéquent l'ordonnée E Æ ſe réduit à rien. Si au contraire le plan coupant A B, toujours perpendiculaire à C D, paſſe par le point T milieu de F D, l'inflexion de la Courbe ceſſera vers ſon milieu où elle ſera très peu courbe, & preſque droite ; & au contraire à meſure que le plan A B s'aprochera de D, toujours perpendiculairement à C D, la courbe deviendra de plus en plus courbe vers ſon milieu, & reſemblera fort à une Ellipſe, ce que l'on peut facilement concevoir par la tranſpoſition des ordonnées 1 *t*, 2 *t*, *c b*, qui vont en s'élevant, & qui ſe rapprochent à meſure que le plan coupant s'approche de D : & parce que l'ordonnée 4 *x* qui s'abaiſſe à l'égard de *c b* n'a plus lieu, lorſque le plan coupant paſſe en T, ou au delà vers D, de même que l'ordonnée 3 *u* n'a plus lieu, lorſque le plan coupant A B eſt plus près de D que le point 3. de la baſe *i b g*, n'eſt éloignée du point *i* ; & ainſi des autres.

Corollaire II.

Il eſt évident que ſi le corps Annulaire eſt fort épais à l'égard du vuide de ſon milieu *g* F G, la ſection ſera plus ſenſiblement pliée dans la partie interieure, c'eſt-à-dire, quand la ſection ſe fait au dedans de T, & plus arondie au delà.

A l'égard de la ſeconde partie de ce Problême qui concerne la Coubre faite par la ſection d'un corps Annulaire, dont l'axe n'eſt pas dans un même plan, mais élevé en Helice tournant autour d'un axe, comme le Lierre autour d'un arbre ; nous avons dit qu'elle étoit la même que la précedente, avec cette ſeule difference que ſes Ordonnées K *k*, L *l*, M *m* ſous la Figure 149. ne ſont pas un angle Droit avec leur axe a *b*, mais un angle aigu a K *k*, a L *l*, &c. leſquelles cependant ſeront toujours paralleles entr'elles, & inclinées à leur axe ſuivant le même angle.

Ainsi pour tracer la Courbe du corps Cylindrique, Helicloide coupé par un plan parallele à l'axe de l'Helice ; on commencera par tracer la ſection d'un corps Annulaire, Horiſontal, de même demi diametre de revolution C D, & de même diametre de baſe *i g* : enſuite ayant fait une ligne *a b*, qui repreſente la ſection du plan vertical A B, avec l'Horiſontal *a b* on élevera au point *a*, une ligne *a a* perpendiculaire à *a b*, & d'une

longueur *a*a, qui ſera déterminée par l'élevation de l'Helice ſur l'Horiſon au point où le plan vertical coupe le côté exterieur montant du corps cylindrique, helicoide ; & de ce point a d'hauteur donnée, on tirera la ligne a*b* inclinée, qui ſera l'axe de la ſection qu'on cherche ; il ne s'agit donc plus que de diviſer cet axe en même raiſon que l'axe AB du corps Annulaire eſt diviſé, pour cela il n'y a qu'à en tranſporter les diviſions des abſciſſes ſur l'horiſontale *a b*, ou (ſi on les met ſur le même axe ED, en ſorte que AB ſoit parallele à *a b*,) on ne ſera qu'abaiſſer des paralleles à ED, par les diviſions KLME, &c. leſquelles couperont l'axe incliné a*b*, en des points KLM*e*, &c. ſur leſquels on portera les Ordonnées de la baſe *ihg*, aux points correſpondans aux nombres 1, 2, 3, 4, comme l'on a fait ci-devant, & comme la Figure 149. le fait voir très ſenſiblement.

La ſeconde difference qu'il y a de cette Courbe à celle du corps Annulaire, eſt qu'elle n'eſt pas uniforme à chaque moitié, le long de ſon axe a*b*, à cauſe de l'obliquité de ſes Ordonnées ; elle eſt plus arondie vers a du côté de l'angle aigu, que vers *b* du côté de l'angle obtus, la raiſon en eſt claire ; car quoique toutes ces Ordonnées ſoient paralleles, les diſtances de leurs ſommets ne ſont pas égales ; car ſi l'on tire des lignes droites des points a & *b*, aux points *k* & P, quoique les côtez a*k* & p*b* ſoient égaux, de même que K*k* & P*p* ; il eſt évident par la Geometrie Elementaire que dans les triangles *p b* P, a*k* K, qui ont deux côtez égaux qui comprennent des angles differents, la baſe opoſée à l'angle obtus, ſera plus grande que celle de l'angle aigu.

Demonstration.

Si l'on ſuppoſe un plan paſſant par l'axe du corps Annulaire, Cylindrique, & ſur ce plan pluſieurs Cylindres d'inégale grandeur, mais concentriques au centre C, & dont l'axe commun ſoit perpendiculaire au même plan *i*DIC ; les ſections de leurs ſurfaces coupées par ce plan feront autant de cercles Concentriques ; & ſi l'on ſuppoſe un ſecond plan AÆB perpendiculaire au premier, & coupant le corps Annulaire & les Cylindres, il ſera dans chaque Cylindre un parallelograme, dont les côtez ſeront perpendiculaires au plan *i*DIC, comme K*k*, L*l*, M*m*, &c. & chacun de ces côtez aura une partie commune à l'Ordonnée du cercle, qui ſeroit fait par la ſection C*i*, CK, ou CD, d'un troiſiéme plan coupant le corps Cylindrique, perpendiculairement à celui qui paſſe par ſon axe courbe, par le centre C, & l'origine de chaque Ordonnée K, L, M, E, &c. comme C*y*, lequel feroit pour ſection un demi cercle égal à *ihg*, que nous prenons pour baſe de ce corps ; donc tous les points *k l m* Æ, &c. ſont au contour de la Courbe, *ce qu'il falloit faire.*

Digitized by Google

Nous avons dit au Livre I. de quel uſage étoit cette courbe dans les voutes ſur le Noyau & la vis St. Giles ; on en verra l'application au Trait de ces voutes au Livre IV. voilà à peu près toutes les ſections des corps, dont nous devons connoître les Courbes.

De la Spirale.

Quoique la ſpirale ne ſoit pas une ſection de ces Corps réguliers, qui ſont le principal objet de notre Stereotomie ; elle eſt cependant une ſection de ceux que la nature produit, & que l'Architecture imite en pluſieurs rencontres, tels ſont certains coquillages, & quelques cornes d'Animaux : par cette raiſon nous avons cru devoir lui donner place dans la deſcription des Courbes uſuelles, pour la conſtruction, & la décoration des Edifices.

Il n'y a pas de courbe dans la Geometrie qui puiſſe être ſujette à plus de varieté que la ſpirale ; M. Varignon dans un Memoire inſeré dans ceux de l'Academie des Sciences en a fait voir differentes generations, qui peuvent être pouſſées à l'infini, nous qui n'en voulons qu'à la pratique, nous nous contenterons d'en donner les premiers Principes.

Probleme XVII.

Tracer la Spirale la plus ſimple & la plus uniforme, qu'on appelle la Spirale d'Archimede. Plan. 12.

Du centre C, [*Fig.* 136.] & de l'intervale C A pour Rayon pris à volonté pour celui d'une revolution entiere de la ſpirale ; ayant décrit un cercle A 3, 6, 9 A, on en diviſera la circonference en autant de parties qu'on voudra avoir de points au contour de la ſpirale : on la diviſe commodement en 12. comme dans cette Figure ; parce qu'en portant ſix fois le Rayon à la circonference du cercle, on n'a plus qu'à diviſer en deux chaque ſixiéme, & tirer les diametres A 6, 9, 3, &c. on peut multiplier cette diviſion autant que l'on voudra, pour avoir la courbe plus exactement. Enſuite on diviſera le Rayon CA en autant de parties qu'on a diviſé la circonference, pour trouver par leur moyen ſur chaque differente poſition du Rayon A C, la longueur du Rayon de la courbe, laquelle partant du point A, s'approche continuellement de ſon centre C ; ou ce qui eſt encore mieux, ſi l'on veut la conſiderer autrement, partant du centre C, s'en écarte continuellement, en tournant autour de ce centre à l'infini, ſi l'on veut. *Fig.* 136.

Du centre C, & pour Rayon l'intervale C 1, partie de C A ; on décri-

ra l'arc 1 *a*, lequel coupant le Rayon C *a* 1, de la premiere diviſion de la circonference A 1, donnera le point *a* au contour de la ſpirale; enſuite du même centre, & d'un intervale plus petit d'une diviſion C 2; on décrira entre les Rayons C *a* 1, C *b* 2, l'arc 2 *b*, qui donnera le point *b* ſur le Rayon C *b* 2. On continuera de même pour trouver les autres points *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, &c. en diminuant toujours le Rayon d'une douziéme partie, juſqu'à ce qu'on ait parcouru toute la valeur du cercle A 3 *b* 9 A, & alors on aura une revolution entiere de la ſpirale, qui revient au Rayon AC, d'où elle étoit partie.

Le cercle qui enferme la premiere revolution s'appelle *Cercle circonſcript*, & celui qui répond à pluſieurs, ou qui eſt au dehors ou au dedans du point A s'appelle *Cercle de revolution*, & les arcs 1 *a*, 2 *b*, 3 *c*, *Arcs de revolution.*

Corollaire I.

Il ſuit par cette géneration que les parties du Rayon AC, ſont eſſentiellement proportionelles aux arcs de revolution, ou ce qui eſt la même choſe, à ceux du cercle circonſcript; de ſorte que ſi le Rayon AC en parcourt la 24.e ou 36.e partie, ce Rayon diminuera ou augmentera pour chaque arc de revolution d'une 24.e ou 36.e partie, &c.

Corollaire II.

Il ſuit encore que lorſqu'on veut avoir plus d'une revolution, par exemple, une & demi, ou deux & un quart; il faut diviſer le Rayon AC, que nous ſuppoſons toujours pris à volonté, en un nombre de parties convenables à ce deſſein, par exemple pour une & demi, dans la ſuppoſition de la diviſion de celle du cercle en douze; on diviſera le Rayon en dix-huit parties, & pour deux & un quart en vingt-ſept, & alors on aura plus d'un point de la ſpirale ſur chaque Rayon du cercle de revolution; on tracera enfin d'un point à un autre, une ligne courbe à la main, ou avec une Régle pliante; & l'on aura la ſpirale qu'on demande, ſi on la veut réguliere; mais parce qu'on veut quelques fois en alonger ou racourcir le contour, ſuivant les differents effets qu'on ſe propoſe; nous dirons comment on peut le varier.

Corollaire III.

Si après avoir tracé une ſpirale comme en A *c f i* C, du côté droit, on retrace la même tournée du côté gauche, comme la ponctuée A *k f l* C, qui croiſe la précedente en *f*, partant de la même origine A, & aboutiſſant au même centre C; il ſe formera un entrelas, dont le milieu à

Digitized by Google

la figure d'un cœur C *ifl* C, qui peut ſervir aux ornemens des grilles de fer contourné, & autres Ouvrages de pareille nature, qui ont été fort à la mode dans les Roſes des vitraux de l'Architecture Gotique.

Probleme XVIII.

Alonger ou racourcir le contour de la Spirale, en telle Raiſon que l'on voudra.

L'on peut réſoudre ce Problême d'une infinité de manieres; car on peut faire les Rayons des arcs de revolution dans le rapport des Ordonnées de telles abſciſſes de courbe que l'on voudra choiſir, & les arcs de revolution dans le rapport de leurs Ordonnées; ce qui rend ce Problême très general. On peut auſſi, ſans varier les arcs de revolution les faire tous d'un nombre égal de Degrez, & varier ſeulement les Rayons de ces arcs en telle raiſon que l'on voudra, comme dans celle des tangentes, ou des ſecantes, ou des Puiſſances, comme des Racines, des Quarrez, des Cubes, &c. les Architectes ſe ſervent dans leur volute Ionique, du rapport des tangentes: j'en vais donner un exemple, où l'on peut augmenter l'inégalité des diviſions en élevant le Rayon à diviſer A C, *Fig.* 137. au deſſus du point P, où eſt l'angle Droit du ſinus total R P, par exemple en C: *Fig.* 138.

Soit donc le rayon donné A C, pour le plus grand de la ſpirale dont on veut que le contour ſe reſerre plus que la ſpirale réguliere, à meſure qu'elle approche du centre C, & à laquelle on veut faire faire deux revolutions: ayant tranſporté ce rayon en a C, *Fig.* 138. & ayant pris à volonté le point R, en ſorte qu'ayant mené à ce point une ligne C R, elle faſſe avec a C, un angle obtus a *c* R, on tirera a R, & du point R pour centre & pour Rayon R C; on fera l'arc C D qui coupera D R au point D; on diviſera cet arc en vingt-quatre parties pour deux revolutions, & par chaque diviſion, & par le centre R, on tirera autant de lignes juſqu'à la rencontre de a C, qui donneront vingt-quatre diviſions inégales, diminuant vers le point C; on portera ces diviſions ſur le Rayon A C, [*Fig.* 137.] où l'on les marquera par des chiffres, pour éviter la confuſion, & on operera ſur ce Rayon de la même maniere qu'au Problême précedent; ce qui donnera une ſpirale, telle qu'on la voit à la Figure 137. *Fig.* 137, 138.

Corollaire.

Dela on tire la maniere de faire une ſpirale dans une autre, pour lui ſervir de compagne, qui forme avec elle une côte élevée, ou un creuſé en canal, comme aux volutes des Chapiteaux des colomnes de certains

Digitized by Google

ordres d'Architecture; en ſorte qu'elles ſe reſſerrent plus ou moins au gré de l'Architecte; quoique partant ſi l'on veut d'un même point D, elles viennent aboutir au même centre C par differents chemins, ainſi la ſpirale D*i*K*lmn*C ſe rapproche plus de ſa compagne A 3 6 9 [12] C que la ſpirale DEFGHC, quoique l'une & l'autre partent du même point D, & arrivent au même centre C.

Fig. 139. Soit [*Fig.* 139.] la ligne A 12, égale à la diſtance donnée de la premiere revolution à la ſeconde, & dans cet intervale un point D à volonté pris pour la naiſſance de la ſpirale interieure, que l'on placera auſſi ſur le Rayon AC de la Fig. 137. on fera [12]S perpendiculaire & égale à 12A, puis on tirera SD & SA: ſur s [12], on portera tous les intervales de la premiere ſpirale pris ſur les Rayons tirez du centre C: C2, C4, C6, &c. par exemple [15] 3 de S en 3 à la Fig. 139. [18], 6 de s en 6, ainſi du reſte; & par les points 3, 6, 9, &c. ayant mené des paralleles à A [12] qui couperont SD aux points *efgh*, on aura les longueurs *e*3, *f*6, *g*9, *h* [12] qui donneront ſur les mêmes Rayons du cercle de revolution A6 [12] [18]A les points E, F, G, H, des diminutions des Rayons pour la ſpirale interieure ou compagne de la premiere A 3 6 9 [12] &c. D'où il ſuit qu'en élevant ou abaiſſant le point D, on change le contour de la ſpirale: preſentement ſi aulieu de la droite SD, on avoit fait un arc de cercle ou S*c*D, S*b*D, on auroit eu une compagne de la ſpirale, qui auroit commencé & fini au même point que la precedente, mais qui n'auroit pas ſuivi la diſtance proportionnelle triangulaire.

On peut non ſeulement changer les longueurs des Rayons, mais encore le rapport des arcs de revolution; ce qui peut fournir le moyen de faire une infinité de ſpirales, toujours differentes; car on peut faire ce rapport égal à celui des Ordonnées d'une courbe quelconque Geometrique ou Mechanique, comme l'a imaginé M. Varignon, qui nous a ouvert le chemin à des variations infinies de ſpirales, où il s'en trouve d'un contour très agreable: je vais donner un exemple de celles qu'il appelle *Paraboliques verticocentrales*, c'eſt-à-dire, qui ont leur ſommet au centre de la ſpirale, choiſſant la plus ſimple, qui eſt celle qu'on tire du cercle; il ſera aiſé d'en faire l'application à l'Ellipſe, aux autres ſections coniques, ou à telle courbe qu'on voudra.

Spirale, Circulaire ou Elliptique ou Parabolique, &c.

Soit *Fig.* 140. la ligne AX priſe pour l'axe d'une ſpirale, dont la courbe Generatrice eſt un quart de cercle CLR: ſoit AC, le plus grand Rayon de la ſpirale, & le point C pour ſon centre, la ligne AC ſera priſe pour l'axe de la courbe qu'on choiſit pour *Generatrice*, lorſqu'elle eſt ici un cercle,

Digitized by Google

cercle, dont elle ſera le rayon, & le point A le centre: l'axe de la ſpirale AX, ſon centre C, & la courbe Generatrice C6R étant donnez, on ſe déterminera au nombre de revolutions, qu'on veut qu'elle faſſe, & l'on prendra une ligne conſtante ST, qui ſoit contenuë dans la plus grande Ordonnée RA de la courbe Generatrice RLC, autant de fois que l'on veut de revolutions completes ou incompletes: nous la ſuppoſerons dans cet exemple contenuë deux fois & demi dans RA, pour avoir deux tours & demi de la ſpirale; enſuite il faudra toujours faire cette analogie.

Comme la ligne conſtante ST,

Est à l'Ordonnée variable de la courbe Generatrice.

Ainsi le cercle de revolution 12, 9, 6, 3,

Sera à l'arc de revolution, au premier tour, ou au cercle de revolution, plus à un arc de ſeconde revolution donné.

A l'arc de revolution cherché;

Si la courbe Generatrice eſt une Ellipſe, une Parabole, ou une Hyperbole, &c. la ſpirale s'appellera *Elliptique*, *Parabolique ou Hyperbolique*, *&c.*

Pour s'épargner le calcul de cette analogie; on diviſera la ligne donnée ST en autant de parties égales qu'on voudra, pour ſervir d'échelle propre à connoître le rapport de cette conſtante avec les Ordonnées du cercle tirées par des points de l'axe AC, qui ſeront pris pour les termes des Rayons des arcs de revolution, comme C1*, C2*, C3*, C4*, &c. leſquels termes ſeront auſſi ceux des abſciſſes de cet axe AX; ſuppoſant, dans cet exemple, la ligne ST diviſée en 12. & le cercle de revolution 12, 9, 6, 3, auſſi en 12, ou ſi l'on veut en 360. degrez, dont 30. répondront à une diviſion de ST; on diviſera l'Ordonnée AR en 30. parties égales pour deux revolutions & demi, & par ces diviſions *bcde*F, &c. on menera des perpendiculaires à l'Ordonnée AR, ou ce qui eſt la même choſe des paralleles à l'axe AC, qui couperont la courbe Generatrice ALC aux points 1, 2, 3, 4, 5, 6, par leſquels on menera des perpendiculaires à l'axe AC, qu'elles couperont aux points 1*, 2*, 3*, 4*, 5*, 6*, enſuite par chacun de ces points, & du point C pour centre; on décrira des arcs de revolution proportionez à la partie de la conſtante ST, par exemple, pour la premiere, l'arc 1*, 1' de 30. degrez; 2*, 2', de 60. degrez; 3*, 3', de 90. degrez; 4*, 4', de 120. degrez, & ainſi de ſuite: ce qui ſe fait facilement en diviſant le cercle en 12. & augmentant d'une douziéme de ſa circonference à la rencontre du Rayon, auquel elle doit ſe terminer; comme on le voit dans la Figure aux points 1', 2', 3', 4', 5', &c. par tous

ces points trouvez, on tracera une courbe à la main, ou avec une régle pliante, & l'on aura une ſpirale, telle qu'on ſe la propoſe pour le nombre des revolutions: nous donnerons même le moyen de fixer les intervales des revolutions, comme on le jugera à propos.

Nous ferons remarquer auparavant qu'on peut trouver les Rayons des arcs de revolution d'une autre maniere; on tranſportera les diviſions de la ligne ST ſur C*r*, perpendiculaire à CA, par exemple en 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, d'où tirant des paralleles à CA, qui couperont la courbe Generatrice aux points *f g b i k l m*; on aura des longueurs 6*f*, 7*g*, 8*b*, 9*i*, 11 *k*, 10 *l*, 12 *m*, qui ſeront celles des abſciſſes, qu'on doit prendre pour Rayons des ars de la ſeconde revolution BDSV, prenant celle-ci pour exemple en partie ſeulement; ainſi *c u* ſera égal à CV, 90 *s*, à CS & CD à 60 *d*, &c. & ſans prendre la peine de faire des arcs de revolution; il ne s'agit que de porter ces parties ſur les Rayons qui leur conviennent, c'eſt-à-dire, les correſpondans au nombre des diviſions de la conſtante, plus ou moins une, ou pluſieurs revolutions, comme L 3' ſur CA, *l* 3 ſur C 11', *k* 10 ſur C 10', *i* 9 ſur C 9', *b* 8 ſur C 8', &c.

Corollaire I.

D'où l'on tire le moyen de *fixer la premiere revolution de la ſpirale, à telle diſtance que l'on veut du centre C, ſur l'axe AC*: car ſi l'on veut, par exemple, qu'elle commence en B, on menera par ce point B la ligne BL perpendiculaire à l'axe AC, juſqu'à ce qu'elle rencontre la courbe Generatrice en L, par où menant LS parallele à l'axe AC, qui coupera l'ordonnée RA au point S, la diſtance SR ſera la longueur de la ligne conſtante qui eſt ici égale à ST, laquelle a toujours un certain rapport avec la circonference du cercle de revolution 12, 3, 6, 9; mais ce point B étant une fois déterminé, on n'eſt plus le Maître de changer les autres revolutions; elles ſe trouvent réglées par le rapport des parties de la conſtante SR trouvée avec les arcs de revolutions.

Corollaire II.

L'inverse du Corollaire précedent eſt claire à la ſeule inſpection de la Figure; car, ſi l'on veut connoître à quel point de l'axe AC ſe terminera la premiere revolution; il n'y a qu'à tirer par le point S, extremité de la conſtante ST, poſée de R en S, une ligne SL parallele à l'axe, juſqu'à ce qu'elle coupe la courbe Generatrice en L, & par ce point L, mener la perpendiculaire LB au même axe, laquelle donnera le point B que l'on cherche: ſi la ligne ST eſt contenuë pluſieurs fois dans AC, on trouvera de même tous les points de revolution ſur l'axe.

Digitized by Google

Corollaire III.

Il ſuit naturellement de cette conſtruction : 1.° Que ſi au lieu du cercle, on avoit prit un quart d'Ellipſe pour courbe Generatrice, & qu'on eut mis à la place de R A, la moitié de ſon grand ou de ſon petit axe; on auroit alongé ou reſſerré la ſpirale: 2.° Que plus la ligne S T ſera contenuë de fois dans A R, plus la ſpirale ſera arondie, & au contraire; par où l'on voit que cette conſtruction, indépendamment du changement qui provient de la courbe Generatrice, qu'on peut choiſir, donne une grande facilité de ſe contenter ſur ſon contour plus ou moins redoublé: au lieu de poſer le ſommet de la courbe Generatrice au centre de la ſpirale; on peut la mettre dans une ſituation differente; mais alors la ſpirale qui en reſultera, ne ſera plus du nombre de celles qu'on appelle *Vertico-Centrales*, dont nous parlons: je vais donner un exemple d'un autre eſpece que M. Varignon appelle *Cocentrales*.

Soit [*Fig.* 141.] la courbe H Y P, une Hyperbole Equilatere, dont A C & C 24 ſont les Aſymptotes, leſquelles ſont un angle Droit en C, où je poſe le centre de la ſpirale; & par conſéquent celui du cercle de revolution D E F G, que je fais d'une ouverture de compas priſe à volonté, & dont je diviſe la circonference en tel nombre de partie que je veux avoir de points de la ſpirale à chaque revolution, par exemple en douze; enſuite ayant pris auſſi à volonté une ligne conſtante, par exemple C G, je la diviſe auſſi en douze parties égales, c'eſt-à-dire, en un méme nombre que la circonference du cercle de revolution, & par chacune de ſes parties, je mene des paralleles à une des Aſymptotes A C, que je prends pour l'axe A X de la ſpirale; & parce que cette premiere parallele rencontre l'Hyperbole hors de cet axe en H; je commence auſſi ma ſpirale au point 1*r*, éloigné de l'axe A X d'une douziéme partie de la revolution A 1*r* du point 2. où la ſeconde diviſion de la conſtante C G, donne le point 2. je fais un arc 2, 2*r* de deux douziémes de la revolution, qui me donne le point 2*r*, & ainſi de ſuite, comme aux ſpirales Paraboliques, Verticocentrales; mais enfin parce que l'Hyperbole H Y P, ne parvient jamais à ſon Aſymptote C G, cette ſpirale ne fera que tourner autour du centre C, dont elle approchera toujours à chaque revolution, ſans pouvoir jamais y arriver.

Je ne m'arrêterai pas aux differences des poſitions des courbes Generatrices, qui croiſent l'axe de la ſpirale; je dirai ſeulement qu'alors, il ſe forme deux ſpirales, une d'un côté, l'autre de l'autre de cet axe, leſquelles ſont égales & tournées en ſens contraire, comme nous l'avons dit de la ſpirale d'Archimede [*Fig.* 136.] ſi les deux parties de la courbe Generatrice ſont égales; mais ſi elles ſont inégales, il eſt clair que la Figu-

re de Cœur qui en reſulte deviendra irréguliere; un côté étant plus ou moins enflé que l'autre; ce qui n'eſt d'aucun uſage pour les ornemens d'Architecture: c'eſt pourquoi je paſſe ſur les varietez infinies qui en peuvent réſulter; les exemples que je viens de donner, étant ſuffiſans pour exercer les Architectes & les Artiſtes qui ont des ornemens à tracer dans des agreables variations de contour de ſpirales.

J'AVERTIRAY ſeulement; 1.o que ſi la courbe Generatrice ſe ferme du côté de l'axe de la ſpirale, comme ſi l'on prenoit un demi cercle, ou une demie-Ellipſe, au lieu de leur quart; la ſpirale ne continueroit pas à tourner du même ſens, depuis la plus grande Ordonnée; mais elle ſe rebrouſſeroit & reviendroit en quelques façons ſur ſes pas, ayant ſa concavité tournée du même côté.

2.o QUE ſi l'on prend pour courbe Generatrice, une Hyperbole équilatere, cocentrique, c'eſt-à-dire, dont le centre ſoit le même que celui de la ſpirale; celle qui en ſera engendrée, n'aura ni commencement ni fin; c'eſt-à-dire, qu'elle commencera à une diſtance infinie de ſon centre, & n'arrivera jamais à ce centre; & cependant que lui donnant un commencement, elle coupera ſon axe après la premiere revolution; ce qui eſt une ſuite des proprietez des Aſymptotes, qui approchent à l'infini de l'Hyperbole, ſans pouvoir y arriver, comme nous venons de le dire.

3.o QUE ſi l'on prend pour courbe Generatrice une courbe Logarithmique, au lieu de l'Hyperbole, la ſpirale qui en ſera engendrée, aura un commencement, & n'aura point de fin, où ſi elle a une fin, elle n'aura point de commencement; ſelon que l'on mettra ſon Aſymptote ſur l'axe, ou perpendiculairement à l'axe de la ſpirale.

ON peut faire la même choſe par le moyen de l'Hyperbole, en mettant le centre de la ſpirale non au centre de l'Hyperbole; mais ſur une de ſes Aſymptotes à quelque diſtance de ce centre; ce qui fournit un moyen très commode pour tracer une infinité de volutes, qu'on peut faire venir d'un point éloigné du centre & de l'axe, & les faire finir au milieu par un *Oeil* circulaire, comme font les Architectes à la volute Ionique; parce que l'on peut ſauver plus délicatement le jarret qui ſe fait à la jonction de la ſpirale & de cet *œil*, ſi elle eſt de la nature de celles qui tournent autour de leur centre, ſans y arriver; par la même raiſon, on fait auſſi plus parfaitement la jonction de la branche droite du limon, avec *la volute ou colimaçon* qui le termine au bas des Eſcaliers les plus à la mode.

ON peut encore changer toutes ſortes de ſpirales en les élargiſſant, ou reſſerrant de telle maniere que l'on voudra, par le moyen de la réduction

Digitized by Google

des Quarreaux changez en Parallelogrames, & même en Trapezes; ſi on vouloit la reſſerrer d'un côté plus que de l'autre, ſuppoſant par exemple que ſuivant un deſſein que je me propoſe; je trouve la ſpirale A L B V C trop ouverte ſur ſon diametre 2' C 8; je n'a y qu'à faire des Parallelogrames reſſerrez ſuivant cette condition, comme on voit à la Fig. 142. & tracer ſur l'original des quarrez en même nombre, ce que l'on a pas fait ici pour éviter la confuſion; parce que tous les Deſſinateurs ſçavent réduire au quarreau du petit au grand; & qu'il n'y a ici d'autre difference, que celle de la Figure des quarreaux, qui ſont quarrez dans l'Original, & oblongs dans la réduction; ce qui fait une figure diſſemblable, mais cependant encore proportionelle en un ſens. *Fig.* 142.

USAGE.

Laſpirale eſt une courbe, dont on fait uſage en Architecture en pluſieurs ſortes d'Ouvrages; premierement elle eſt très fréquente dans les ornemens de ſerrurerie & de ſculpture; on l'employe pour les volutes des chapiteaux Ioniques & Compoſites en petit, & en grand dans les amortiſſemens de differentes pieces d'Architecture, particulierement pour les Conſoles & les terminaiſons des contreforts ou piliers butans qu'on éleve, pour arbouter les voutes des Nefs & des Domes des Egliſes, comme on en voit en quatre differents endroits au dehors du Val de Grace à Paris, & dans toutes les Egliſes Modernes, tant en Italie qu'ailleurs; les Architectes qui ont du goût pour tracer l'ornement, leur donnent des contours tâtonez en renflant ou reſſerrant chaque partie, ſelon qu'ils trouvent que l'œil eſt plus ou moins ſatisfait: s'ils avoient connoiſſance des ſecours de la Geometrie, je ne doute point qu'ils ne réuſſiſſent beaucoup mieux dans la grace du contour, lequel, étant intrinſéquement régulier, ſe preſente par toutes ſes parties avec une uniformité qui ne contente pas moins l'eſprit que les yeux; ce que l'on ne peut ſe flater de faire par le ſeul tâtonement.

Enfin la ſpirale eſt une courbe néceſſaire pour former la baſſe des Enroulemens qui s'élevent en Limace, comme ſont ceux que l'on fait aux extremitez des limons des Eſcaliers, que les Ouvriers appellent *Colimaçons*: la *Circulaire*, telle que nous venons de la donner à la Figure, convient mieux à l'évaſement des premieres marches, & à la jonction du limon droit que la ſpirale d'Archimede, ou la volute des Architectes, comme j'en ay fait l'experience chez un de mes amis où je l'ay employée, & celle qui eſt Hyperbolique, Cocentrale encore mieux, nous donnerons ci-après la maniere d'en tracer les joins.

Digitized by Google

Des Arcs Rampans.

EN termes d'Architecture les lignes qui ne ſont ni verticales ni horiſontales, mais inclinées à l'Horiſon, ſont appellées *Rampantes*, & les arcs dont les naiſſances ne ſont pas de niveau entr'elles, l'une étant plus baſſe que l'autre, ſont appellez *Arcs rampans*, tels ſont les *Arcs Droits* des deſcentes biaiſes, dont les naiſſances du cintre de face ſont de niveau, & les arcades pratiquées au deſſous des Rampes des Terraſſes ou des Eſcaliers.

POUR expliquer géometriquement, & plus géneralement la ſignification de ce terme à l'égard des lignes courbes; on peut dire que toutes celles dont les Ordonnées ne ſont pas perpendiculaires à un diametre Vertical; lorſqu'elles ſont paralleles à la ligne qui paſſe par les naiſſances de l'arc, ſont des courbes Rampantes & *des Arcs Rampans.*

IL eſt bon de faire remarquer ici que les Aparailleurs appellent particulierement *Courbe Rampante*, celle du limon de la *Vis à jour*; mais nous ne croyons pas devoir ici nous priver d'une expreſſion génerale pour nous conformer à un langage ſi peu reſpectable.

PROBLEME.

Changer en Arc Rampant un Arc de Cercle, ou d'une Courbe quelconque.

Fig. 143. SOIT donné [*Fig.* 143.] l'arc de cercle AHB qu'on ſuppoſe ici un demi cercle, quoiqu'il puiſſe être un ſegment plus ou moins grand; ſur le milieu C de la corde AB, on élevera une perpendiculaire indéfinie C*b*, à laquelle on menera deux paralleles par les extremitez A & B; enſuite on prendra ſur C*b* un point *c* à volonté pour le ſommet d'un angle C*cb*, qu'on fera égal au complement de l'inclinaiſon qu'on veut donner à la Rampe avec une ligne de niveau *b*N, & l'on tirera la ligne *ab*, qui ſera terminée par les paralleles indéfinies A*a*, B*b*, dont les interſections en *a* & *b* donneront les points des naiſſances, haute & baſſe de l'arc Rampant qu'on ſe propoſe de faire.

ENSUITE ayant tiré à volonté pluſieurs paralleles O O, *ii*, D F à la corde AB, qui couperont CH aux points *r*, G, *e*; on portera les abſciſſes C*r*, CG, C*e* & CH en *c*R, *cg*; *c*E: & *cb*: & par les points R*g*E, on menera des paralleles à *ab*, ſur leſquelles on portera de part & d'autres les longueurs *r*O, G*i*, *e*D du demi cercle qui donneront les points *o*, I, *f*, *b*, *d*, &c. par leſquels on tracera à la main, ou avec une Régle pliante le contour de l'arc rampant *abb*, qu'on demande.

ON peut faire la même choſe d'une autre maniere, en menant à volon-

gitized by Google

té [*Fig.* 144.] autant de paralleles que l'on voudra à la ligne C*h*, prolongées indéfiniment, & portant ſur chacune des ces paralleles, comme *o*R, *o*D, les longueurs O*r* & O*d* compriſes dans le ſegment de cercle donné; en OR & OD, au deſſus de la ligne inclinée *ab*, & l'on aura autant de points que l'on voudra *a*R*b*D*b* de l'arc Rampant demandé, qui eſt comme l'on voit une portion d'Ellipſe. *Fig.* 144.

Second exemple pour toute autre courbe que le cercle.

Soit [*Fig.* 145.] une ſpirale DBHL*c* que l'on veut faire ramper en tout ou en partie; ayant pris pour axe la verticale AB, qui paſſe par le centre de la ſpirale, à laquelle les Architectes ont donné le nom de *Cathete*; on lui menera à volonté autant de perpendiculaires qu'on voudra avoir de points de la ſpirale rampante, comme AD, EH, FN, GI, &c. que l'on prolongera juſqu'à ce qu'elles rencontrent une autre ligne *ab*, parallele à AB & diſtante à volonté, qu'elles couperont aux points a*blkb*: enſuite on fera l'angle *bki* égal au complement de l'inclinaiſon que l'on veut donner à la Rampe, pour déterminer la poſition d'une des Ordonnées *ki*, à laquelle on menera des paralleles indéfinies par les points trouvez *ablk*, comme *ad*, *be*, *ln*, *co*, *kg*, ſur leſquelles on portera les longueurs des Ordonnées à l'axe AB, comme AD en a*d*, HE en *be*, LF en *lf*, &c. ſuivant leur ordre; & l'on aura les points *defgbinbmlc*, par leſquels on tracera à la main une ſpirale, qui eſt celle qu'on demande. *Fig.* 145.

Troiſiéme exemple pour les Figures mêlées de differentes courbes, par exemple [*Fig.* 146.] un contour de Baluſtre droit, qu'on veut rendre rampant pour porter un appui de rampe d'Eſcalier. *Fig.* 146.

Ayant mené des perpendiculaires à l'axe AB, c'eſt-à-dire, à la ligne du milieu du Baluſtre droit, juſqu'à la rencontre d'une parallele CD, poſée à diſtance priſe à volonté, on menera par tous les points de rencontre autant de lignes inclinées à CD, ſuivant la pente de la Rampe donnée, ou déterminée par la ſituation des lieux, qui couperont une troiſiéme parallele *ab* priſe pour l'axe du Baluſtre rampant, à diſtance priſe à volonté, en des points correſpondans aux diviſions du Baluſtre droit, qui ſeront les milieux des diſtances des côtez du Baluſtre rampant, comme on vient de le dire pour la ſpirale dans l'exemple précedent; ce que la Fig. 146. expoſe ſenſiblement à la vûë.

USAGE.

Ce Problême, & particulierement les deux derniers exemples, ſont la baſſe de la pratique de tous les ornemens de bois, de pierre ou de fer, que l'on met aux appuys des rampes des Eſcaliers; car ayant commencé

Digitized by Google

par tracer régulierement les Baluſtres, Guillochis & Enroulemens de Rinceaux & autres deſſeins, tels qu'on les veut dans une ſituation horiſontale; on en ralonge les parties inferieures, & on racourcit les ſuperieures dans une ſi juſte proportion, que l'œil n'eſt point choqué de ce changement; & bien loin de cauſer de la difformité dans les contours des ornemens, il ſemble au contraire qu'il y ſurvient une varieté agreable à la vûë.

Il peut auſſi ſervir pour les cintres des Arcades & voutes Rampantes, lorſqu'on n'a aucune ſujetion de hauteur ou de direction de piedroit, parce qu'alors, il n'y a qu'à changer l'arc circulaire en Rampant; mais à cauſe des differences qui peuvent y ſurvenir, nous devons y pourvoir par un Problême géneral.

Des Courbes qui conviennent à ces ſortes de Voutes & d'Arcades qu'on appelle Arcs Rampans.

NOus avons parlé au Problême précedent de la tranſmutation des courbes, dont les Ordonnées ſont horiſontales en courbes inclinées à l'horiſon; il s'agit à preſent de trouver le moyen de faire paſſer une courbe par certains points donnez, qui ſont ceux des Impoſtes & des Clefs des arcs Rampans, avec cette circonſtance qu'elle ſoit touchée par les lignes droites qui paſſent par ces points, leſquelles doivent auſſi être données de poſition ou de direction.

Les lignes qui doivent toucher les arcs Rampans, ſont premierement les deux *piedroits* ou *jambages* qui portent l'arcade; leſquelles peuvent avoir trois ſituations differentes, 1.° ou verticale, lorſqu'ils ſont *a plomb*, en termes de l'Art, 2.° ou inclinées en *ſurplomb*, 3.° ou inclinées en *talud*.

Secondement, une ligne réelle ou imaginaire qui termine la hauteur de l'arc Rampant, laquelle peut auſſi être horiſontal, ou inclinée à l'horiſon.

La ſituation la plus ordinaire des piedroits eſt la verticale; cependant quelques fois pour plus de ſolidité, on leur donne du talud, & quelques fois auſſi pour mieux buter & appuyer une voute ou un mur, on les fait en ſurplomb, ce cas eſt plus rare dans la pratique que le précedent; car on ne fait plus guere d'arcs boutans, comme dans l'Architecture Gotique; les Modernes tâchent de cacher la néceſſité de ces eſpeces de contreforts par des moyens plus agreables à la vûë, comme ſont des Groupes de colomnes, ou des Conſoles renverſées.

La

La ſituation la plus naturelle à la termination de la hauteur d'un arc rampant ſemble être une ligne horiſontale; en effet il peut toujours l'être par une telle ligne, qui devroit être appellée la ligne de *Sommité*; cependant on appelle ainſi toute ligne donnée qui traverſe les piedroits prolongez, & qui doit toucher la courbe de l'arc rampant.

Outre ces trois lignes eſſentielles aux arcs rampans qu'elles doivent toucher; on en conſidere une quatriéme, qui joint leurs points d'attouchement aux piedroits qu'elle coupe, leſquels ne ſont pas de niveau par la nature de cette eſpece d'arc; on l'appelle *la ligne de Rampe.*

Les differences de poſition de ces quatre lignes, ſçavoir des deux piedroits, de la ligne de ſommité, & de la ligne de rampe, font toute la difficulté & la varieté des cas, où il faut chercher les Courbes convenables.

Il eſt évident à tous ceux qui ſçavent un peu de Geometrie, qu'on peut trouver une infinité de courbes qui peuvent toucher les trois premieres lignes droites dans tous les cas, ou du moins dans pluſieurs de ceux qu'on peut propoſer; mais on ſe borne en Architecture à celles des ſections coniques, qui ſont les plus connuës, pour éviter les difficultés que les autres entrainent avec elles, ou dans leur conſtruction, ou dans la maniere de leur mener des tangentes, en certaines circonſtances marquées.

Pour moy je trouve qu'à cette difficulté près les ſpirales de M. de Varignon donnent un contour de ceintre autant & plus agreable à la vûë que celui des ſections coniques, qu'on peut employer pour un arc Rampant: je pourrois parler auſſi de la ſpirale d'Archimede; mais on ne peut autant la varier, comme celles-là; or cette difficulté n'eſt pas petite, ſi l'on vouloit operer geometriquement; on peut même dire qu'elle eſt inſurmontable; car Archimede a démontré que la ſous-tangente de ſa ſpirale étoit égale à la circonference du cercle de revolution; d'où il ſuit que ſi l'on pouvoit lui tirer une tangente, on auroit trouvé la Quadrature du cercle: cependant ſuppoſant la rectification de la circonference du cercle, qu'on connoit ſuffiſamment pour ne pas trouver d'erreur dans la pratique; on peut mener des tangentes à cette ſpirale, comme nous le dirons ci-après.

On demandera, s'il eſt de néceſſité indiſpenſable que la courbe du ceintre de l'arc rampant touche les deux piedroits, & pourquoi.

A cela je réponds, ce que j'ay déja dit ailleurs, que puiſque l'arc doit être une continuation du piedroit; il doit ſe faire une tranſition inſen-

ſible de la ligne droite du piedroit à la courbe de l'arc rampant; or l'alliance de la ligne courbe avec la droite, ne peut ſe faire qu'au point de l'attouchement, où l'angle qu'elles font enſemble eſt infiniment grand; par conſéquent imperceptible à la vûë; puiſqu'il differe infiniment peu de la ligne droite, l'œil ne peut être trompé que par cet artifice; toute autre jonction ailleurs qu'au point d'attouchement devient difforme, & choque la vûë: l'Architecte de la Chapelle de Verſailles n'a pas ſenti ce défaut, lorſqu'il a fait des arcs rampans ſous les arcs boutans au deſſus des bas côtez; car leur jonction au grand mur eſt un bon pli bien marqué, c'eſt un arc coupé & appliqué contre ce mur ſans art & ſans naiſſance naturelle ſur un piedroit, ou ſur un Doſſeret.

Le plus grand ſujet de variation des arcs Rampans vient de la ligne de ſommité, qu'il eſt au choix de l'Architecte d'approcher ou d'éloigner des Impoſtes de l'arc, & de lui donner telle direction & inclinaiſon qu'il juge à propos, ſuivant le deſſein qu'il ſe propoſe; & l'égard qu'il a à la ſituation des Lieux, comme lorſque l'arc Rampant doit ſoûtenir un Palier, ou ſe terminer ſous un Plinthe de niveau, la ligne de ſommité devient horiſontale; quelquesfois il convient de donner à cette ligne une direction parallele à celle de la ligne de Rampe, comme lorſque l'arc Rampant ſoûtient une ſeconde Rampe égale & parallele à la premiere, quelquesfois plus ou moins inclinée; ſi cette ſeconde Rampe ou un Plinthe ou Corniche au deſſus eſt inclinée plus ou moins: dans ces deux derniers cas, le point d'attouchement de la ligne appellée de ſommité, n'eſt pas au ſommet de la Courbe; je veux dire à l'endroit le plus élevé, comme les Figures 148. & 150. le font voir: puiſque ce point eſt variable, il s'agit de le trouver, lorſqu'on a déterminé la diſtance & l'inclinaiſon de la ligne de ſommité.

Probleme XX.

La Direction des Piedroits, la ligne de Rampe, & celle de Sommité d'un Arc Rampant étant donnez, décrire la Section Conique, qui doit lui ſervir de Cintre.

Ou en termes Geometriques.

Trois lignes inclinées entr'elles, qui doivent toucher une Section Conique, dont les Points d'attouchement des deux Extrêmes ſont donnez, trouver celui de la moyenne, & les lignes néceſſaires pour décrire cette Courbe.

Fig. 147. 148. 150. 151.

Soient les piedroits AR, BP [*Fig.* 147. 148. 150. 151.] la ligne de Rampe RP, la ligne de ſommité SO: Premierement, ſi les piedroits AR, BP ſont paralleles entr'eux, auſſi bien que les lignes de Rampe RP, &

Fig. 131. 132.

Digitized by Google

de ſommité SO; * il eſt clair que le point d'attouchement de cette der- *Fig.* 147.
niere eſt donné au milieu de SO au point T; parce qu'en ce cas la ſection qui ſatisfait au Problême eſt une Ellipſe, comme nous l'avons dit ci-devant, & que la ligne T*t* qui paſſera par le milieu de RP, ſera un diametre conjugué à la ligne de Rampe, où ſera le centre C; parce que BP & SO étant des tangentes, les lignes qui leur ſont paralleles, & qui paſſant par le centre C ſont des diametres conjuguez; cela ne ſouffre point de difficulté.

Dans tous les autres cas où les lignes de Rampe & de ſommité ne *Fig.* 148. ſont pas paralleles; quoique les piedroits ſoient paralleles entr'eux, ou 150. 134. ne le ſoient pas; on trouvera le point T, où la courbe doit toucher la 151. ligne de ſommité, comme il ſuit.

Ayant prolongé les lignes RP & SO données juſqu'à ce qu'elles concourent en Y par le point S, on menera une parallele DE à OR, ſi les piedroits ne ſont pas paralleles, comme aux Figures 150. & 151. laquelle ne ſera qu'un piedroit prolongé, s'ils ſont, comme à la Figure 148. paralles, elle coupera RY en D, enſuite ayant porté DS en SE, ou Figure 148. PS en SE; on tirera ER qui coupera SO au point T, où ſera celui d'attouchement que l'on cherche.

Ce point étant trouvé: 1.° il ſera facile de décrire la ſection conique qui doit toucher les trois lignes AO, OS, SB aux points RTP par le Problême XIV.

2.° On pourra auſſi la décrire par le Problême XIII. parce qu'on a *Fig.* 150. cinq points donnez; ſi elle eſt une Ellipſe ou une Hyperbole, dont le centre ſoit dans l'étenduë du plan où on veut la décrire; car menant des paralleles à SO par les points donnez à la circonference P & R qui couperont le diametre T*t* en V & *u*: ſi on fait V*p* = P V, *ur* = *u*R, *q*C = C*u*, & qu'on mene par *q* une parallele à SO, ſur laquelle on prenne *qn*, *q*N = *u*R, *ur* & C*t* = CT, on aura déja huit points de l'Ellipſe.

3.° Supposant que le centre ſe trouve loin hors de l'étenduë de la ſurface, ſur laquelle on veut la décrire; on pourra en trouver autant de points que l'on voudra par le Problême XV. car on a deux tangentes, & la poſition d'un, & même de deux diametres S*m* & OM, qui paſſent par les points S & *m* & O & M, ſuppoſant PT & TR diviſez en deux également en *m* & M.

4.° On peut par ce moyen trouver les diametres conjuguez; car puiſque T*t* eſt donné, en faiſant C*t* = CT, que ſon conjugué doit paſſer

Digitized by Google

par le point C trouvé, comme au Problême XV. & parallelement à SO, il ne s'agit plus que de trouver ſa longueur de part & d'autre du point C; ce que l'on peut faire par le Problême IV. puiſqu'on a une, & méme deux Ordonnées au diametre tT, ſçavoir Ru & Pu, ou par un autre methode que voici.

Ayant mené par le centre C une ligne FG parallele à SO; on menera auſſi RK parallele à Tt; enſuite on cherchera une moyenne proportionelle entre CK & CG, laquelle donnera Cz pour moitié du diametre conjugué à Tt (par l'Art. 46.) qui dit que les lignes menées du centre à la tangente, & coupées par une Ordonnée, ſont diviſées en raiſon continuellement proportionelles $CK : Cv :: Cz : CG$. Art. 46.

Demonstration.

Nous avons dit dans nos Préliminaires ſur les ſections coniques Art. 48. que les tangentes à une ſection conique qui ſe rencontrent, & qui ſont terminées par d'autres lignes tirées par deux points d'attouchement, ſe coupent en raiſon Harmonique; ce que nous avons dit être démontré dans les Traitez de ces ſections: or la tangente OY eſt coupée par la ligne RP prolongée, qui paſſe par deux points d'attouchement R & P, & par les tangentes RO & PS, qui paſſent par ces mémes points R & P; donc on a trois points d'une diviſion Harmonique, ſçavoir O, S & Y, il reſte à prouver que le quatriéme T eſt bien trouvé.

A cauſe des triangles ſemblables YOR, YSD, on aura $YO : OS :: YS : SD = SE$, & à cauſe des triangles ſemblables ORT, SET, on aura $OR : SE :: OT : ST$; donc par raiſon d'égalité $YO : OS :: OT, ST$, *ce qu'il falloit démontrer.*

Remarque.

Cette propoſition renferme quinze Problémes que M. Blondel a donné pour trouver les Courbes des ſections coniques, qui peuvent toucher toutes ſortes de piedroits & de lignes de ſommité en quelque poſition qu'ils puiſſent être pour former un arc Rampant; ainſi elle abrege beaucoup cette matiere.

Digitized by Google

CHAPITRE IV.

De l'imitation des Courbes Régulieres par des compoſitions d'Arcs de Cercles.

Lorsqu'on aime la régularité, on ne ſe ſert point de ces Courbes qui n'ont que de la reſſemblance avec les régulieres, dont elles ne ſont que des copies imparfaites, formées par la compoſition de pluſieurs arcs de cercles de differents Rayons; l'original eſt ſans contredit préferable à la copie; cependant l'ignorance des proprietez des Courbes, même les plus communes, comme ſont les ſections coniques & les ſpirales, jointe à une plus grande facilité apparente de tracer des arcs de cercles, & peut être encore celle d'en tirer les joins de tête pour les traits des voutes, ont fait chercher pluſieurs moyens de les imiter par un aſſemblage de portions de cercles; & comme l'Ellipſe eſt une des plus uſuelles, les Deſſinateurs & les Architectes ſe ſont efforcés pendant longtemps, mais inutilement, de l'imiter parfaitement ſans jarrets par 3, 4, ou 5. portions de cercles, les axes étant donnez: pour s'en convaincre, il n'y a qu'à jetter les yeux ſur deux des planches du Livre de Bosse, touchant la maniere de deſſiner l'Architecture, où il a raſſemblé ce qu'on avoit fait de mieux juſqu'alors: cette découverte étoit reſervée à un Geometre, tel que M. Pitot de l'Academie Royale des Sciences, qui a trouvé la poſition de trois centres, & la longueur de deux Rayons, avec leſquels on peut l'imiter auſſi parfaitement qu'il eſt poſſible, comme nous le dirons ci-après.

Il paroît auſſi par les planches du Livre du P. Deran, particulierement par celle du Chapitre XIX. que cet Auteur qui s'étoit exercé à tant de Traits, n'entendoit pas celui de l'imitation de l'Ellipſe; car la difference de la juſte poſition des centres de ſes arcs Rampans eſt trop conſiderable, & les jarrets trop ſenſibles, pour qu'on en doive rejetter la faute ſur le Graveur. Cependant ces Traits ſont regardez en Architecture comme des choſes remarquables: une perſonne verſée dans cet Art me citoit pour une des raretez du nouveau Pont de Compiegne un arc ſurbaiſſé, qui avoit cinq centres; à quoi je répondis en ſouriant qu'il auroit été plus beau & meilleur, ſi au lieu de cinq centres, il n'avoit eû que deux Foyers.

Régle Generale.

Tout l'art d'imiter les Courbes par differents arcs de cercles, conſiſte à poſer les deux centres des arcs qui ſe joignent ſur une même ligne

droite, qui paſſe au point de leur jonction, afin que la perpendiculaire qu'on lui tireroit à ce point fût tangente commune, de l'une & de l'autre arc au même point; la raiſon eſt, 1.° que l'angle de l'arc avec la tangente étant infiniment petit de part & d'autre du point d'attouchement, le Rayon eſt preſque auſſi exactement perpendiculaire ſur cet arc, qu'il l'eſt ſur la tangente, à une difference près qui eſt infiniment petite: 2.° Que l'angle compoſé de ces deux preſque droits ſera infiniment grand, par conſéquent ſes côtez ſeront dirigez en une ligne ſi peu differente de la ligne droite, que l'œil ne peut en appercevoir le pli; tels ſeroient tous ceux d'un Polygone d'une infinité de côtez infiniment petits inſcrits dans le cercle.

Cependant l'œil Geometrique qui eſt un Juge ſevere, apperçoit fort bien le changement ſubit de la convexité & de la concavité, particulierement ſi les Rayons des deux arcs qui ſe joignent, ſont conſiderablement differents en longueur, comme il eſt ſouvent néceſſaire qu'ils le ſoient pour former une demi-Ellipſe de trois arcs; alors les gens les moins connoiſſeurs ſentent bien cette irrégularité, ſans en ſçavoir la raiſon; c'eſt pourquoi je ne conſeille à perſonne d'avoir recours à cet artifice de l'ignorance; quoique je donne ici les meilleures régles pour en cacher les défauts, je ne le fais que pour contenter ceux qui aiment à s'épargner de la peine, au préjudice d'une plus grande perfection d'ouvrage, ou lorſque la choſe n'eſt pas aſſez de conſéquence pour meriter plus de ſoin, ou pour en faciliter l'exécution aux Ouvriers qui ne ſont pas capables d'une operation plus parfaite.

Probleme XXI.

Deux Axes étant donnez, imiter une Ellipſe par un aſſemblage de quatre Arcs de Cercles.

Ou ce qui eſt le même, imiter une demi-Ellipſe par trois arcs de 60. Degrez chacun.

Pl. 14. *Fig.* 153. Soit le grand axe AB [*Fig.* 153.] & la moitié du petit axe CD: on portera premierement la longueur CD de cette moitié ſur le grand axe en B*y*, pour avoir la difference des deux demi-axes C*y*, qu'on diviſera en deux également en F, puis on portera CF en C*z*: ſur *zy*, comme diametre, on fera le demi cercle Z E*y*, qui coupera CD en E, on portera la longueur ZE en ZS, & la diſtance CS d'un côté à l'autre, CS en C*s*: les points *s* & S ſeront les centres des petits arcs des extrêmitez de l'Ovale, & les lignes AS & *s*B leurs Rayons; enfin des points *s* & S, comme centres, & de l'intervale *s*S, on fera le triangle équilateral S T*s*, dont le ſommet T ſera le troiſiéme centre que l'on cherche; & les côtez

Digitized by Google

de ce triangle prolongez, détermineront la jonction des grands & petits arcs en *i* en I, ſur leſquels on prendra T*s* + *s*B pour Rayon du grand arc ; ainſi les trois arcs ſeront de ſoixante Degrez chacun, & auront des Rayons communs ; *ce qu'il falloit faire.*

Demonstration.

Soit AC = *a*, CD = *b* & l'inconnuë C*s* = *x*, par la Conſtruction CY = *a* — *b* & CZ = $\frac{1}{2}a - b$, ainſi CE = $\sqrt{a-b \times \frac{1}{2}a - b}$ & ZE = $\sqrt{\frac{1}{2}a-b^2 + \frac{1}{4}a-b^2}$, mais CS (*x*) = CZ $\frac{1}{2}a - b$ + ZS ou ZE $\sqrt{\frac{1}{2}a-b^2 + \frac{1}{4}a-b^2}$ donc $x = \frac{1}{2}a-b + \sqrt{\frac{1}{2}a-b^2 + \frac{1}{4}a-b^2}$ *ce qu'il falloit démontrer.*

Probleme XXII.

Imiter par deux Arcs de Cercles les portions d'Ellipſes faites ſur deux Diametres, qui ne ſont pas des Axes conjuguez, dont l'un eſt terminé par deux Tangentes à ſes extrêmitez, & dont le Conjugue eſt déterminé par une troiſiéme Tangente donnée de poſition.

On ne peut imiter avec une compoſition de deux arcs de cercle raſſemblez, toutes ſortes d'Ellipſes faites ſur des diametres conjuguez, qui ne ſont pas des axes, & qui doivent toucher une ligne donnée de ſituation & de diſtance ; mais on peut faire en ſorte que l'Ovale touchera la parallele de la troiſiéme tangente donnée.

Pour connoître ſi le Problême peut être réſolu par des arcs de cercle.

Soient [*Fig.* 154.] PD & RG deux tangentes aux points B & A, & *Fig.* 154. D*g* une troiſiéme ligne qui doit toucher l'Ovale propoſée à faire ; on portera la longueur D B ſur la ligne D*g* en D*b*, & la longueur *g*A en *g a*, ſi ces deux points *a* & *b* ne tombent pas au même point, le Problême ne peut pas être réſolu ; parce qu'il eſt démontré dans la Geometrie Elementaire, que ſi d'un point *d* ou G pris hors du cercle, on lui mene deux tangentes *d*B, *d*T, ou GA, GT, elles ſont égales entre elles ; ſuppoſant donc la ligne D*g* donnée, il faut pour réſoudre ce Problême faire D*b* = D B, & *g a* = *g*A, tirer A*a* & B*b*, le point T de leur interſection ſera celui d'attouchement de la tangente *d*G, auquel on tirera la perpendiculaire indéfinie T C, & par les deux autres points d'attouchement A & B donnez, faiſant B*c* perpendiculaire ſur *d*P, & AC perpendiculaire ſur RG ; les points C & *c*, où ces lignes couperont T C, ſeront les centres des arcs de cercles qui doivent répreſenter l'Ellipſe propoſée à faire, dans le cas où elle peut en approcher le plus. Si la ligne D*g* donnée de poſition eſt au deſſous

D'Eucl. l. 3. pr. 37.

Digitized by Google

du point T, comme EF, il faut faire $Eb = EB$, & $Fi = FA$, tirer Bb & Ai, leſquelles étant prolongées, ſe couperont au point T, qui eſt celui de l'attouchement que l'on cherche, par lequel ayant tiré une parallele dG à la donnée Dg ou EF; on reconnoîtra que la ſomme des lignes Bd & AG ſera égale à celles des parties dT & GT.

DEMONSTRATION.

A cauſe des paralleles Dg & dG ou EF, $DB : Db :: dB : dT$ & $gA : ga :: GA : GT$, mais $gA = ga$ (par la conſtruction) & $DB = Db$, donc $dT = dB$, & $GA = GT$; donc le point T eſt celui de l'attouchement de la ligne DG, *ce qu'il falloit trouver.*

COROLLAIRE I.

D'ou ſe tire la maniere de *faire toutes ſortes d'arcs Rampans, avec des portions de Cercle dans quelque poſition que ſoient les Piedroits, entr'eux, paralleles, en ſurplomb ou en Taluid, & en quelque ſituation que ſoit la ligne de ſommité dG:* en voici des exemples pour les piedroits paralleles entr'eux qui ſont les plus ordinaires.

PREMIER cas où la ligne de ſommité dG eſt horiſontale, & les piedroits à plomb. Soit *Fig.* 155. la ligne de Rampe donnée AB, ſa hauteur ſur l'Horiſon BO étant portée ſur Ob d'alignement à la ligne horiſontale AO, on diviſera Ab en deux également en m, d'où l'on élevera la perpendiculaire mT: puis du centre m, & pour Rayon Am, on décrira l'arc de cercle AT juſqu'à la rencontre de mT; enſuite ayant pris ſur mT, la longueur $mc = OB$, le point c ſera le centre du ſecond arc BT, qui rencontrera le premier au point d'attouchement T, ce qu'il falloit faire pour en rendre la jonction imperceptible.

Fig. 155.

Second cas où la ligne de Rampe AB eſt parallele à celle de ſommité dG.

AYANT diviſé l'horiſontale AO en deux [*Fig.* 156.] également en m, & élevé en ce point la verticale mT, qui coupera la ligne de ſommité dG au point T, il faut faire $Ad = dT$, comme nous l'avons dit au commencement de cette propoſition; puis au point T faire TC perpendiculaire à dG, ou ce qui eſt la même choſe à la parallele AB; le point C où cette perpendiculaire coupera l'horiſontal AO, ſera le centre du grand arc de cercle AT: puis menant Be parallele à AO, elle coupera TC au point c, où ſera le centre du ſecond arc TB, qui ſe joindra au grand au point d'attouchement en T, comme il eſt néceſſaire.

Fig. 156.

Troiſieme

Troiſiéme cas où la ligne de ſommité D*g* [*Fig.* 157.] n'eſt pas parallele à la ligne de Rampe AB. *Fig.* 157.

Ayant trouvé le point T, comme on l'a dit au commencement de ce Problême; on tirera TC perpendiculaire à D*g*, & B*c* parallele à A*e*, on aura, comme au cas précedent, les points C & *c* pour les centres des deux arcs qui doivent former le Rampant ATB.

Demonstration.

On voit que dans le fond tous ces cas ne different en rien pour la conſtruction: Car, 1.° [*Fig.* 155.] puiſque AO & *d*G ſont paralleles entr'elles, de même que CT & A*d*; il eſt évident que A*d* = *d*T, & puiſque C*b* = CA = CT, & O*b* = OB, BG ſera égal à CO = TG, donc les deux tangentes de chacun de ces arcs AT, TB ſont égales, par conſéquent elles conviennent au cercle, & les centres C & *c* étant ſur une même ligne, la même tangente *d*G eſt commune aux deux arcs de differents cercles.

Les deux cas ſuivants ſont démontrez par le Principe general qui établit la poſition des centres, & les mêmes conditions des tangentes, dont nous venons de parler.

Corollaire.

Dela on tire la maniere de tracer *l'Ovale pointuë*; s'il eſt permis d'uſer ici de ce mot, pour exprimer l'inégalité de ſon contour aux extrémitez de ſon grand axe; laquelle à cauſe de ſa conformité avec le contour d'un œuf appellé en latin *Ovum*, eſt nommée en Architecture un *Ove*: comme c'eſt un ornement, dont on fait grand uſage dans les Corniches, & qu'on en trouve de faux Traits dans les Livres; je vais tâcher de les corriger. Albert Duret dans ſa Géometrie en donne deux faux, l'un qu'il tire du Cône, dont le contour fait un jarret à chaque extremité du grand axe, comme il ſeroit facile de le démontrer, ſi la choſe en valoit la peine; l'autre Trait qui a été ſuivi par quelques Auteurs, eſt une compoſition d'arcs de cercles, où il a fait encore une erreur groſſiere, joignant les ſecond & troiſiéme arcs au deſſus du point I en S au dehors des Rayons communs DI: 3I. *Fig.* 158.

Soit donné le petit diametre AB pour la plus grande largeur de l'Ove; on le diviſera en quatre parties, & ayant prolongé ce diametre de part & d'autre, de trois de ſes parties faiſant DA & B2 égales à *m*B: puis du point C, milieu de AB pour centre, on décrira un cercle AHBE, dont

on diviſera les quarts de circonference A E, B E en deux également aux points 3. & 4. par leſquels on menera les lignes D I, 2 *i*, qu'on fera égales à D B ou 2 A, en décrivant deux arcs B I, A *i* des points D & 2. pour centres; leſquels arcs étant continuez, ſe couperont au point *x* par où, & par le centre C, on tirera la ligne H *x*: enſuite des points 3. & 4. pour centres, & de l'intervale 3 I pour Rayon, on décrira deux arcs qui ſe couperont en *y* ſur la ligne H *x*: on diviſera l'intervale E *y* en deux également en *c*, par où on tirera les lignes 3 G, 4 *g*, qui rencontreront ces arcs en G & *g*; enfin du point C pour centre, & *c* G ou *cg* pour Rayon, on décrira l'arc G *g*, qui achevera l'ovale en Ove.

Il eſt aiſé de voir qu'on peut alonger ou racourcir cet Ove, en remontant ou rabaiſſant les centres 3. & 4. & le dernier *c*.

Les Architectes placent ordinairement cet Ove dans une Niche, dont *Boſſe* régle ainſi le contour, il fait H L perpendiculaire & égale au diametre H E; il la diviſe en deux également en O, & la moitié O L en quatre parties égales: il diviſe enſuite le grand axe H F en trois également, & ce tiers en cinq, il porte une de ces cinquiémes de F en *p*, & de l'intervale S *p* tiers de F H, il décrit un arc F *z*, il ne dit pas de combien de degrez; ce qui ſeroit cependant néceſſaire pour avoir les intervales des Rayons *q* K, *z* N, qui ſont les cordes & les rayons de ces arcs.

Toute cette conſtruction n'eſt qu'une fantaiſie & un goût de deſſein arbitraire imité apparemment des reſtes des Corniches antiques, où l'on voit ces Niches formées de differentes façons, en côtes relevées & diviſées entr'elles par des ornemens de feüilles, & quelquesfois de Dards; ce qui n'eſt pas de notre ſujet.

Nous avons donné ci-devant la maniere de décrire des demi-Ovales, par le moyen de trois arcs de cercle de 60. degrez chacun, ſupoſant les axes donnez; il nous reſte à montrer comment on peut les faire de tant d'arcs de cercles que l'on voudra, ſoit régulierement en ovale, ou irrégulierement en portion d'Ove; ce qui eſt néceſſaire pour tracer differentes ſortes de *Cavets*, ou moulures creuſes, & les contours de certains amortiſſemens qu'on appelle *Piedouches*.

Fig. 159. Soient par exemple [*Fig.* 159.] donnez pluſieurs points A, 1, 2, 3, B, rangez d'une façon convenable au contour creux qu'on ſe propoſe; on prendra l'intervale A 1 pour côté d'un triangle équilateral A 1 D, & du point D pour centre, on décrira l'arc A 1: enſuite ayant tiré la corde 1, 2, & l'ayant diviſée en deux également en *m*, on y élevera une perpendiculaire *me*, qui coupera 1, 2, prolongée en *e*, où ſera le centre du

Digitized by Google

ſecond arc de cercle 1, 2, on tirera de même la corde 2, 3, & ſur ſon milieu M, on élevera la perpendiculaire M C, qui coupera 2 *e* prolongée au point C, où ſera le centre du troiſiéme arc 2, 3, ainſi de ſuite, on aura le dernier centre *f*.

La raiſon de cette pratique eſt claire par la ſeule conſtruction, où l'on reconnoit l'application de la Régle generale, en ce qu'il y a deux centres ſur la ligne droite, où ſe fait la jonction des arcs qui doivent ſe toucher, c'eſt-à-dire, avoir une tangente commune, comme T N, qui touche également les arcs 2, 1 & 2, 3, *ce qu'il faut faire pour éviter tous jarrets.*

Corollaire.

Il ſuit de cet exemple, que quoique nous ayons compoſé des arcs Rampans de deux ſeuls arcs de cercles d'un nombre de degrez égaux ou inégaux; on peut encore mieux les former de tel nombre d'arcs que l'on voudra; car ſi l'on conçoit la Figure 159. changée de ſituation, & qu'on prenne les points A & *p* pour des Impoſtes, il eſt viſible que la Courbe A 1 2 3 *p* peut ſervir pour un ceintre d'arc Rampant: mais alors elle ſera moins une imitation de l'Ellipſe, que de la ſpirale à laquelle le Problême ſuivant ſervira d'introduction.

Probleme XXIII.

La difference d'hauteur des Impoſtes A & H, & l'intervale horiſontal D A des Piedroits d'un arc Rampant étant donnez, tracer un Cintre compoſé d'autant d'arcs de Cercles que l'on voudra inégaux en Rayons, mais égaux en nombre de Degrez, ou ſi l'on veut d'une partie *de plus avec certaines circonſtances.* Fig. ſur 160.

Soit [à la Figure au deſſus du chiffre 160.] le cintre A B H qu'on ſe propoſe de faire, par exemple de cinq arcs de cercles; ſur la hauteur donnée D H comme diametre, on décrira un demi cercle H I D, qu'on diviſera en cinq parties égales, c'eſt-à-dire, en cinq arcs, dont on tirera les cordes, auſquelles on menera des paralleles tangentes au cercle, pour lui circonſcrire la moitié d'un décagone: enſuite ayant prolongé la ligne A D vers *n*, on portera ſucceſſivement les cinq côtez de D en *n*.

On diviſera *n* A en deux également en X, par où on menera X *x* parallele & égale à D H, ſur laquelle comme diametre, ayant décrit un demi cercle, on lui circonſcrira le même Polygone; mais tourné differemment en commençant par porter une moitié de côté en X 1, & *x* 5, ſur les paralleles D A & H 5, on fera C 3 égale à O 2, diſtance du centre O, à un angle du Polygone, & des points 3 & 1, 3 & 5 pour centres & pour

Digitized by Google

Rayon le côté du Polygone, on fera des interſections d'arcs qui donneront les points 2 & 4, pour tirer par les points 2, 3, 4, 5 les côtez qu'on prolongera indéfiniment vers B, E, F, G; enfin des points 1, 2, 3, 4, 5 pour centres & pour rayons 1 A, 2 B, 3 E, 4 F, 5 G; on décrira des arcs A B, B E, E P, F G, G H qui formeront enſemble ſans aucun jarret le cintre qu'on demande: ſi le nombre des côtez du Polygone n'eſt pas complet, qu'il y ait une moitié de plus, il y aura auſſi un arc de cercle moindre que les autres; ce qui arrivera toujours, lorſque les côtez feront enſemble la moitié d'un nombre impair, comme du triangle Equilateral, du Pentagone, de l'Eptagone, &c.

Il n'eſt pas néceſſaire de rendre raiſon de cette conſtruction pour le concour des arcs de cercles, qui ſe rencontrent au point commun d'attouchement; il ſuffit de dire pourquoi, on a porté les côtez du Polygone circonſcrit ſur la ligne A D prolongée; c'eſt pour avoir l'axe X*x*, & le centre C du Polygone generateur qui doit être au milieu d'une ligne compoſée de la donnée D A & de l'ajoutée D *n*; parce que chaque Rayon des arcs de ſuite diminuë de la longueur d'un côté du Polygone 1 2, 2 3, 3 4, &c. par conſéquent tous enſemble diminuent de la quantité D *n*, au dedans d'un demi cercle, qui auroit X A ou X *n* pour Rayon, & ſeroit partie du cercle de revolution de la ſpirale, dont cet arc Rampant eſt une moitié. On voit par-là la raiſon de la conſtruction de la Figure 155. où nous avons porté la hauteur O B en O *b* ſur A O prolongée; parce que nous étant propoſé de faire un ceintre de deux arcs de 90. degrez chacun, qui ſont la moitié du cercle, le Polygone generateur en doit être le quarré, dont la hauteur O B eſt un côté qui doit être diminué ſur la longueur du Rayon du ſecond arc: ce que l'on verra plus clairement au Problème ſuivant, qui n'eſt qu'une eſpece de Corollaire de celui-ci.

J'ay dit qu'il falloit que l'arc Rampant fit une demi-revolution, parce que j'ay ſuppoſé les piedroits à plomb paralleles entr'eux; mais s'ils étoient en talud, il faudroit qu'il en fit plus, & en ſurplomb moins, par la raiſon que nous avons ſouvent repeté, que les piedroits doivent être tangens aux arcs à leurs naiſſances.

PROBLEME XXIV.

Imiter la Spirale par des portions d'Arcs de Cercle.

Suivant le Principe géneral que tous les arcs inégaux doivent ſe joindre à un point commun d'attouchement, pour qu'on n'en aperçoive pas la jonction; il ne s'agit pour imiter la ſpirale, que d'avoir toujours deux centres de ſuite ſur un même Rayon, il faudroit encore que ces Rayons

Digitized by Google

diminuaſſent toujours dans une certaine proportion qui pourroit beaucoup varier, & que les angles qu'ils font entr'eux fuſſent égaux ou variables, auſſi dans une certaine proportion, comme nous l'avons dit des ſpirales; ce que l'on peut bien concevoir après ce que nous avons dit de cette courbe, & l'exécuter ſuivant l'intention qu'on a de faire plus ou moins de revolution, en imitant la ſpirale réguliere : mais comme il ne s'agit pas dans cette imitation d'une ſi grande préciſion, qui ne peut convenir à une compoſition d'arcs de cercles; il nous ſuffit de donner la maniere génerale de faire ce qu'on appelle en Architecture *Volute*.

Avant pris un point C pour centre de la ſpirale ou volute; [*Fig.* 160.] on prendra ce point pour le milieu du côté d'un Polygone quelconque : nous donnons ici pour exemple l'Exagone *Fig.* 160. & 161. & on le fera de telle grandeur que l'on voudra, à l'égard du plus grand Rayon que l'on veut donner à la volute, & de l'intervale que l'on veut occuper par les Rayons oppoſez, dont on peut compter la diminution par le nombre des changemens des centres de chaque arc, & la longueur des côtez du Polygone ajoûtez enſemble. Les Architectes, qui, pour terminer les revolutions vers le centre, y font un cercle qu'ils appellent *l'Oeil* de la volute, ſe réglent par la grandeur de cet œil, auquel ils aſſignent un certain nombre de parties du Module, c'eſt-à-dire, d'une diviſion faite ſur le diametre de la colomne, ſuivant leurs ſiſtémes arbitraires. *Fig.* 160.

Pour nous qui ne propoſons qu'une maniere génerale, dont on peut facilement deduire les particulieres; nous dirons ſeulement qu'ayant fait un Polygone quelconque, *Fig.* 161. & ayant pris le milieu d'un de ſes côtez pour centre de la ſpirale; on tirera de ce point C à tous les angles du Polygone des Diagonales C 4, C 5, C 3, C 2, & enſuite s'étant fixé un nombre de revolutions, on y inſcrira autant de Polygones ſemblables au premier, qui auront toujours un de leurs côtez commun avec le premier *b* C 1, & les côtez de ces Polygones ſeront encore en telle raiſon que l'on voudra, ſelon le deſſein propoſé que la volute ſe reſſerre plus ou moins vite. *Fig.* 161. & 162.

Cette diſpoſition étant faite, on prolongera tous les côtez de ces Polygones d'une part ſeulement, & à volonté, autant à peu près qu'il convient à la longueur des Rayons, ſuivant le premier A C qui a été donné comme on voit dans la Figure 160. 1 2 *a*, 2 3 *b*, 3 4 *c*, 4 5 *d*, 5 G *e*, G 1 *f*, & 1 2 *a*, qui acheve la revolution. Enſuite du centre 2, & pour Rayon 2 *a*, on fera l'arc *a b* terminé en *b* par le Rayon 2 *b b* 1; du centre 3 & de l'intervale 3 *b* pour Rayon, on décrira l'arc *b c*; du centre 4, & pour Rayon 4 *c*, on décrira l'arc *c d*, & ainſi de ſuite en changeant de centre à chaque *Fig.* 160.

Digitized by Google

arc, posant la pointe du compas sur un des angles du Polygone, & arrêtant l'autre au Rayon fait du côté de ce Poligone prolongé.

Apres la premiere revolution, on continuera de même pour la seconde sur le Polygone inscrit immédiatement dans le premier, & au bout de cette seconde revolution, on continuera sur les angles du troisiéme Polygone, suivant l'ordre des chiffres de la Figure 161.

Fig. Ou il faut remarquer que la seconde revolution, commençant par deux centres 6, 7 qui sont sur un Rayon commun, ne doit point faire de jarret avec la premiere; mais elle fait une sorte d'irégularité, en ce que la distance du centre 6 au centre 7, n'est pas égale à celle du centre 5 au centre 6, comme elle l'a été depuis le point 1, jusqu'au point 5, & comme elle le doit être ensuite aux intervales 8, 9, 10, 11, & 12; la même chose arrive à la troisiéme revolution; cependant les Architectes qui donnent la Geometrie à bon marché, disent comme Daviler que la *volute de Goldman*, qui est faite sur ce principe, est *Geometrique*, quoiqu'elle ne soit qu'un cas de notre methode, dont la seule difference est que son Polygone central est un quarré, comme on voit en la Figure 162. mais en fait de volute Ionique, on n'a pas besoin d'y regarder de si près; car les Architectes n'en veulent qu'à une décoration de goût, & non pas à une grande précision.

Corollaire I.

Il suit que si l'on veut *agrandir la volute* en dehors, on peut en agrandissant les Rayons, continuer les arcs de suite, en changeant de centres sur les mêmes angles des Polygones, ou sur d'autres circonscrits sur le même côté 6C1.

Corollaire II.

Secondement que si l'on veut *faire un double trait* qui vienne aussi en se resserrant avec le premier; ayant déterminé la largeur *ai* sur le Rayon *ca*, on cherchera le côté d'un Polygone semblable au premier, qui soit en même raison que *ci*, *ca*, par cette analogie *ca* : *ci* :: *c*1 : *cx* appellant *x* le point qui sera à l'angle du second Polygone sur le Rayon sous 2*b*; la petitesse de la Figure ne nous a pas permis d'exprimer ces differences, de peur d'y jetter de la confusion: nous ne disons point comment cela se fait par les lignes; car nous supposons que nous parlons à des Lecteurs qui sçavent trouver une quatriéme proportionelle à trois lignes données, comme il est enseigné chez Euclide *liv. 6. prop.* 12.

Digitized by Google

REMARQUE.

On voit par la Figure 162. que la volute de Goldman que Daviler donne comme la plus convenable au Chapiteau Ionique, n'eſt qu'un cas de notre maniere génerale d'imiter la ſpirale par des arcs de cercles, en prenant pour le Polygone central le quarré, au lieu des autres Polygones qui ont plus de côtez, d'où réſulteroient cependant des volutes plus parfaites.

CHAPITRE IV.

De la diviſion des Sections Coniques par des Lignes droites perpendiculaires à leurs Arcs.

On ſçait que la perpendiculaire à un arc n'eſt autre choſe que celle qui fait des angles Droits, avec la tangente de cet arc au point d'attouchement ; ainſi il faut conſiderer chaque point de diviſion, comme celui d'un attouchement, y ſuppoſant une tangente réelle ou poſſible, à laquelle il faut tirer une perpendiculaire par le point d'attouchement donné, ou par un autre point pris hors de la Courbe ; ce qui s'exécute differemment pour chacune des ſections Coniques.

I.°

Pour le Cercle.

Probleme XXVI.

Par un Point donné, tirer une Perpendiculaire à un arc de Cercle, dont on ne connoit pas le Centre.

Il peut y avoir trois cas dans ce Problême : 1.° où le point donné eſt dans l'arc ; 2.° ou hors de l'arc ; 3.° ou à l'extremité de l'arc.

Pl. 15.

Si le point donné eſt à la circonference en D [*Fig.* 163.] on prendra de part & d'autre deux longueurs égales D *e*, D *f* ; & des points *e* & *f* comme centres, & d'une ouverture de compas priſe à volonté pour Rayon, on ſera une interſection d'arcs en *g*, par où & par le point D, on tirera la ligne *g* D, qui eſt celle qu'on cherche. Fig. 163.

Secondement ſi le point donné eſt hors de l'arc DGB, comme en *d* : du point *d* pour centre & pour Rayon un intervale pris à volonté ; on tracera l'arc *b i*, qui coupera le donné AGB aux points *b* & *i*, deſquels comme centres, & de la même ouverture de compas, ou de telle autre

Digitized by Google

qu'on voudra pour Rayon, pourvû qu'elle ſoit plus grande que la moitié de la diſtance des centres *b* & *i*, on fera une interſection d'arcs en *b*; ſi par les points *b* & *d*, on tire une ligne *bd*, la partie *d*G ſera celle que l'on cherche.

3.° Si le point donné eſt ſur l'extremité de l'arc donné AGB en B, & qu'on ne puiſſe pas le prolonger au delà de ce point; 1.° par la maniere ordinaire, ayant porté à volonté deux longueurs égales BK, KL pour faire avec d'autres ouvertures pour Rayons, à volonté l'interſection en P, du même Rayon BP, & du point K pour centre, on fera un arc en R, & de KP pour Rayon, & du centre B, on fera une interſection en R, la ligne RB ſera la demandée; autrement on portera trois longueurs égales priſes à volonté ſur cet arc comme en K, L, *m*, & par le premier cas ayant fait KP & LN perpendiculaires ſur l'arc AGB, & égales entr'elles; on tirera les lignes LP, KN qui ſe couperont au point O; enſuite ayant tiré BP, & fait B*q* = KO, par le point *q*, on menera KR = KN, ou BP; enfin par les points R & B, on tirera AB qui ſera la ligne que l'on cherche.

Demonstration.

Par les Elemens de Géometrie, il eſt évident que ſi l'on tire les cordes *ef* & *bi*, la perpendiculaire ſur le milieu eſt auſſi perpendiculaire aux arcs, dont elles ſont ſous-tendantes; or les deux operations ont été faites, comme ſi les cordes avoient été tirée de *e* en *f*, & de *b* en *i*, & qu'on voulut leur tirer des perpendiculaires, & les diviſer en deux; donc les lignes D*g* & *d*G ſont perpendiculaires à l'arc AGB; de ſorte que ſi l'on prolongeoit ces lignes, elles ſe rencontreroient au centre du cercle en C.

La raiſon de la conſtruction du troiſiéme cas n'eſt pas moins claire, car les triangles LKP, KBR ont été faits égaux; mais le côté KP eſt perpendiculaire à l'arc LKB (par la conſtruction;) donc BR le ſera auſſi au même arc, *ce qu'il falloit faire.*

Usage.

Ce Problême ſert à tracer les joins de tête de tous les ceintres circulaires des voutes, afin que les Arêtes des angles des Vouſſoirs qui les compoſent, ſoient d'égale reſiſtance; c'eſt ce que les Ouvriers appellent le *Trait quarré ſur la ligne courbe, & au bout de la ligne courbe*, lorſqu'il s'agit de faire le joint à une extremité, comme en BR.

Les Ouvriers ont coûtume de faire la même operation ſur les arcs qui ne ſont point circulaires, comme les ſurbaiſſez ou ſurhauſſez qui ſont des portions

Digitized by Google

portions d'Ellipſes ou d'autres courbes; cependant elle ne convient qu'au cercle, & eſt défectueuſe dans les autres courbes; l'erreur à la verité n'en eſt pas bien ſenſible, lorſque l'on ne ſe ſert que d'une petite longueur des Rayons d'interſection, & qu'on prend une fort petite corde, ou portion d'arc dans les grandes voutes, mais dans les petites; & lorſqu'on prend un grand arc de l'Ellipſe ailleurs qu'aux environs de ſes axes, elle peut être fort ſenſible: en un mot elle eſt contraire à la régularité, à la ſimetrie, & peut nuire à la ſolidité, comme nous l'avons expoſé.

Lemme.

La Perpendiculaire ſur le milieu de la Corde d'un arc de Section Conique autre que le Cercle, & qui n'eſt pas un des Axes, eſt oblique à cet arc.

Soit [*Fig.* 164.] l'arc ADPB portion d'une Ellipſe, d'une Parabole ou d'une Hyperbole, & le point D ou P, qui ne ſoit pas à l'extrêmité d'un des axes de la Courbe: ſi ayant fait $bP = Pe$, des points b & e comme centres, on fait des interſections d'arcs en g & h avec des Rayons égaux, de longeur priſe à volonté, je dis que la ligne menée par ces deux points g & h, qui eſt perpendiculaire à la corde be, ne la ſera point à ſon arc bPe. *Fig.* 164.

Demonstration.

Une ligne n'eſt perpendiculaire à un arc, que lorſqu'elle l'eſt à ſa tangente au point P où elle le rencontre; mais ſi Pt perpendiculaire à Pb eſt une tangente, la corde be qui lui eſt parallele, & coupée en deux également en m par la ligne Pb ſera une Ordonnée, & cette ligne Pb ſera un diametre; or il n'y a de diametres perpendiculaires aux Ordonnées que les axes, donc le point P eſt ſur un axe; ce qui eſt contre la ſuppoſition.

Secondement il eſt démontré qu'on ne peut mener qu'une tangente par un point P; cependant il eſt clair que par cette conſtruction, on pourroit en mener pluſieurs; car ſi au lieu des points b & e équidiſtans de P, & centres des interſections g & h, on en prend deux autres auſſi équidiſtans de Pe, comme B & r, la corde rB ne ſera plus parallele à be, & par conſéquent la perpendiculaire xPy ne ſe confondera point avec le premiere gh, mais elle la croiſera, & cependant encore au même point P, $rP = BP$, comme bP étoit égal à PE par la conſtruction, la raiſon en eſt fort ſenſible; car les arcs de l'Ellipſe n'étant pas d'une courbure égale comme ceux du cercle, les cordes égales ne ſouſtendent pas des arcs égaux, celle qui eſt plus près du grand axe, répond à un plus grand arc, que celle qui eſt près du petit axe, où la courbe ſe redreſſe & approche plus de ſa corde, donc par la methode des Ouvriers, on trouve pluſieurs

joins de tête differemment inclinez à l'arc, & cependant il n'y en a qu'un ſeul de bon, qui eſt la perpendiculaire à la tangente au point de diviſion du joint, donc leur methode eſt mauvaiſe; *ce qu'il falloit démontrer.*

On auroit fait peu d'attention à la pratique des Ouvriers, ſi elle n'avoit été enſeigné par les Auteurs qui ont écrit de la coupe des Pierres, leſquels ont dû en ſentir l'irrégularité en ce qu'elle ne fait pas des angles égaux de part & d'autre du joint des Vouſſoirs; de ſorte que l'arête de l'un eſt aiguë, & l'autre obtuſe, ce que nous avons cru devoir faire remarquer, avant que d'établir la vraye maniere de tirer les joins ſur les arcs de toute autre ſection conique que le cercle.

PROBEME XXVII.

Par un Point donné à la circonference d'une Section Conique, tirer une perpendiculaire à ſon Arc.

Il faut premierement connoître les Foyers de la ſection ſoit Ellipſe, Parabole ou Hyperbole; & s'ils ne ſont pas donnez, il faut les chercher par les Problêmes II. X. & XI.

Fig. 164. 165. 167. Par les Foyers F & *f* des trois Figures 164. 165. 167. on tirera au point donné D les lignes droites FD & *f*D, qu'on prolongera en M & L, *Fig.* 164. & ſeulement en L, *Fig.* 165. parce que la Parabole n'ayant qu'un Foyer, on tirera par le point D la ligne DM parallele à l'axe OFH, & pour l'Hyperbole, *Fig.* 167. il ne ſera néceſſaire de prolonger que FD en L, parce que la ligne *f*D du Foyer oppoſé, donnera l'angle *f*DL, dont on a beſoin.

Du point D comme centre, & d'un intervale pris à volonté, on fera un arc LXM qu'on diviſera en deux également en X, par où & par le point donné D, on tirera XD, qui ſera la ligne qu'on cherche.

DEMONSTRATION.

Soit tirée par le point D, *t*DT perpendiculaire à DX: il eſt démontré dans tous les traitez * des ſections coniques, que les lignes droites menées des deux Foyers à un même point de la courbe, par lequel paſſe une tangente, font des angles égaux avec cette tangente *t*T; mais ces angles *f*DT & FD*t*, *Fig.* 164. ſont égaux à leurs oppoſez au ſommet *t*DL, TDM; ſi on leur ajoûte à chacun la moitié de l'angle LDM, les angles *t*DX & TDX, ſeront égaux entr'eux, donc ils ſeront droits; or [par la conſtruction] cet angle LDM eſt diviſé en deux également, donc la ligne XD qui le diviſe, ſera perpendiculaire à la tangente *t*T, & par conſéquent à l'arc, *ce qu'il falloit démontrer.*

* *Apollonius l.* 3. *pr.* 48 & pour la Par. *l.* 1. *p.* 31.

Digitized by Google

La même démonſtration eſt claire dans la Figure 167. avec cette difference qu'il n'eſt pas néceſſaire de prolonger *f*D, mais ſeulement F D en L, parce que l'angle *f*D T eſt au dehors de l'Hyperbole, & qu'il n'y a que ſon égal T D F, dont un côté eſt dedans.

A l'égard de la Figure 165. pour la Parabole qui n'a qu'un ſeul Foyer F que l'on puiſſe déterminer; on peut ſuivant le ſiſtéme de la Géometrie de l'infini la conſiderer comme un Ellipſe infiniment alongée; alors ſon ſecond Foyer étant infiniment loin, la ligne N D M qui en ſeroit tirée au point D, ſeroit parallele à l'axe O T: il en reſulte en effet la même égalité des angles N D*t*, F D T, comme il eſt prouvé par d'autres moyens; ainſi la même conſtruction pour tirer une perpendiculaire à l'arc d'une ſection conique, ou plûtôt à la tangente au point d'attouchement, eſt la même pour toutes; exceptez pour le cercle où les deux Foyers ſont reünis à ſon centre.

AUTREMENT.

On peut démontrer cette propoſition ſi l'on veut admettre l'axiome que M. de Roberval établit pour l'invention des tangentes que *la direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, eſt la touchante de la ligne courbe en chaque poſition de ce point là*: or la direction des lignes tirées à un point de l'Hyperbole de chacun des Foyers tend à l'éloigner également, donc la ligne qui diviſe également l'angle de ces lignes eſt la touchante, & dans l'Ellipſe l'une de ces lignes tend autant à s'éloigner, que l'autre à s'approcher du Foyer, donc la ligne qui diviſe leur angle eſt la tangente.

USAGE.

On auroit pû intituler ce Problême pour en exprimer l'application à à la pratique, *maniere de tracer les joins de tête des ceintres faits d'arcs de ſections coniques*, & on en auroit indiqué tout d'un coup l'uſage pour la coupe des Pierres; mais comme nous n'avons pas encore expliqué ce que c'eſt que *joint*, il convenoit d'énoncer la propoſition en termes généraux.

Je dirai en paſſant, que cē Problême eſt fondé ſur une verité qui a fourni de merveilleuſes inventions dans la Catoptrique pour refléchir la lumiere; parce que *l'angle d'incidence eſt égal à l'angle de reflexion*; c'eſt de-là que j'en avois tiré la pratique que je donne pour les joins, avant que j'euſſe ſçû que M. Blondel l'avoit déja fait dans ſes Problêmes d'Architecture, mais il n'a pas pourvû au cas ſuivant.

PROBLEME XXVII.

Par un Point donné hors de la circonference d'une Section Conique, lui mener une Perpendiculaire.

CE Problême n'eſt pas ſi ſimple que le précedent, & ſe reſout differemment pour la Parabole & pour les deux autres ſections coniques, l'Ellipſe & l'Hyperbole; c'eſt un Problême *de Minimis.*

1.° *Pour la Parabole* [*Fig.* 165.]

Fig. 165. SOIT le point donné P hors de la Parabole, on en abaiſſera une perpendiculaire PH ſur l'axe OS prolongé vers T, s'il le faut; on fera HK égale à la moitié du parametre, c'eſt-à-dire, à 2FS; on diviſera enſuite l'intervale KS en deux également au point *m*, où l'on fera *m*C perpendiculaire à l'axe OS, & égale au quart de HP: ſi du point C pour centre, & pour Rayon l'intervale CS; on décrit un arc de cercle, il coupera la Parabole ASB au point *x*, qui eſt celui que l'on cherche, par lequel & par le point donné P, tirant une ligne P*x*, elle ſera perpendiculaire à la Courbe, ou plûtôt à la tangente T*t* au point *x*.

Nous ne pouvons pas donner la démonſtration de cette conſtruction dans toute ſon étenduë; parce qu'elle ſuppoſe des propoſitions qu'il ſeroit trop long de rapeller ici & de démontrer; nous indiquerons ſeulement ſur quoi elle eſt fondée: du point *x* ayant mené la tangente *x*T juſqu'à l'axe OS prolongé; ce qui eſt facile à faire en portant la diſtance de l'Ordonnée K*x* au ſommet de l'axe S, au-delà du ſommet de S en T: on trouve par les proprietez de la Parabole & du cercle qu'elle coupe, que les triangles PE*x*, & *x*KT ſont ſemblables, & leurs angles K*x*T & P*x*E égaux, auſquels ajoûtant l'angle commun T*x*E, on reconnoitra que l'angle T*x*P eſt droit, *ce qu'il falloit faire.*

2.° *Pour l'Ellipſe.*

Fig. 166. SOIT [*Fig.* 166.] l'Ellipſe ADB, & le point P donné hors de la circonference, par lequel il faut tirer une perpendiculaire à l'arc AD à un point inconnu *x*, qu'il faut trouver ſur cet arc, lequel point ſoit celui d'attouchement d'une ligne *t*T, à laquelle P*x* ſoit perpendiculaire.

ON commencera par chercher le parametre de l'axe AB, comme nous l'avons dit au Problême II, où en portant le demi axe CD en C*d* ſur AB, on tirera AD, & par le point *d*, on lui menera une parallele *de*, qui donnera ſur CD le point *e*, par lequel on tirera AF, qui ſera coupée en F par une parallele BF menée à CD par l'extrémité B du diametre AB; la ligne BF ſera le parametre, lequel ſera porté de B en *f*, & de *f* en K

parallelement à DC prolongée, par le point K, on tirera l'indéfinie AG: enſuite on prendra la diſtance CH du centre C à la perpendiculaire PH abaiſſée ſur le diametre AB du point P donné, & on la portera de A en *g* ſur AB, on portera H*g* d'A en N ſur l'axe BA prolongé en N, par où on menera MNS parallele à DC; par le point N, on menera NL parallele à PC tirée du point donné P au centre de l'Ellipſe C, & terminée à la rencontre de PH prolongée en L, ce point L donnera la diſtance LH d'une ligne MQ, qu'il faut mener parallelement à l'axe AB, les deux lignes MS & MQ ſeront les Aſymptotes d'un arc d'Hyperbole PX*y* qui coupera l'arc AD au point *x*, que l'on cherche pour tirer la ligne demandée P*x*.

On peut encore trouver la diſtance de la ligne MQ, en portant PH ſur AC qui tombe ici en *g*, & tirer *g*G juſqu'à la rencontre menée par le point G parallelement au diametre AB de AG, la ligne MQ ſera l'Aſymptote.

Les Aſymptotes étant données, il eſt aiſé de trouver autant de points que l'on voudra de l'Hyperbole, qui doit donner le point *x* par ſon interſection avec l'Ellipſe AD (par le Problême XII.) il n'y a qu'à tirer à volonté par le point P une ligne quelconque qui coupe les Aſymptotes, par exemple, SPR en S & en R, ſi l'on porte PS en R*y*, le point *y* ſera un de ceux de l'Hyperbole, par lequel on tirera d'autres lignes à volonté, comme Y*y*V, qui donneront par la même conſtruction d'autres points de cette Courbe vers *x* & Z, en portant la diſtance *y*Y en V, *r* en deça & au delà de *x*, & par les points P*x*Z*r*, on tracera l'Hyperbole P*xry* qui coupera l'Ellipſe AD au point *x*, par où & par le point P donné, ſi l'on tire la droite P*x* qui eſt une corde de l'Hyperbole, cette ligne ſera celle que l'on cherche, laquelle ſera perpendiculaire à l'Ellipſe, ou plûtôt à ſa tangente *t*T au point *x*.

3.° *Pour l'Hyperbole.*

Soit [*Fig.* 167.] l'axe donné RS, le centre C, la moitié du ſecond axe CV, par le moyen duquel on trouvera CK moitié du parametre, comme on l'a dit au Problême XII. ou en faiſant VK perpendiculaire ſur VR: par le point K, on fera K*r* perpendiculaire à RS, & égale à CR, & on tirera la ligne R*r*: enſuite par le point donné P, ayant mené PE parallale à K*r*, on portera CE en R*e*, & on tirera *eb* parallele à K*r*; on portera auſſi la diſtance *eb* de C en H, par où on menera HG parallele à K*r*, & par H la ligne HI parallele à CP, laquelle coupera PE au point I, par lequel on menera GIN parallele à RS; les deux lignes G*g*, GN, ſont les Aſymptotes d'une ſeconde Hyperbole, laquelle paſſant par le point donné P, doit auſſi paſſer par le point *x* que l'on *Fig.* 167.

Digitized by Google

cherche ; la ligne droite menée de P par x ſatisfera à la propoſition, en ce quelle ſera perpendiculaire à l'arc de l'Hyperbole SB, ou plûtôt à ſa tangente tT, au point x, *ce qu'il falloit faire.*

Introduction à la Démonſtration.

La démonſtration de ce Problême dépend d'une autre propoſition, qui eſt que ſi l'on prend ſur un axe d'Ellipſe ou d'Hyperbole un point plus éloigné d'une de ſes extremitez que la longueur de ſon demi parametre, & que la diſtance du centre de cette Ellipſe ou Hyperbole à une Ordonnée au même axe, ſoit en même raiſon avec la diſtance de cette Ordonnée au point donné hors de la Courbe, que l'axe à ſon parametre; la ligne menée de ce point à celui de la courbe, où ſe termine l'Ordonnée eſt la plus petite de toutes celles qu'on y peut mener. Cela ſuppoſé, comme il eſt démontré au Livre VII. *prop.* 6. de ſections coniques de M. de la Hire, ſoit prolongé Px en p, où cette ligne rencontre l'axe AB, & tirée dx parallele à PH, il ne s'agit que de démontrer que l'axe eſt au parametre, comme Cd eſt a dp [*Fig.* 166.]

Par le point x ſoit mené dxX parallele à PH, qui coupera PC en X, & par le point p, ou Px prolongée, rencontre l'axe AB, ſoit menée pz auſſi parallele à PH: pour diminuer le nombre des ſignes, ſoit nommé l'axe AB (a) le parametre BF (b); par la conſtruction $a:b::$ PL, LH:: CN: NH; donc (par la 5.e du 6.e d'Eucl.) les triangles NHL, PHC ſont ſemblables, leſquels ſont encore ſemblables aux triangles Cpz, CdX, à cauſe des paralleles dX & pz; donc Cd: Cp:: dX: pz; & Cp: Cd:: pz: dX en diviſant Cd: Cd — Cp = dp:: dX: dX — pz = qX, & en compoſant Cd + dp = Cd + zq: zq:: dX + qX: qX:: CH + HN: HN:: $a:b$; donc Cd: pd:: $a:b$, donc px [par la propoſition citée ci-deſſus] eſt un *minimum*, par conſéquent auſſi Px, qui eſt par lamême raiſon perpendiculaire à la tangente Tt, pP étant une ligne droite; *ce qu'il falloit démontrer pour l'Elipſe.*

Nous omettons la démonſtration pour l'Hyperbole, elle eſt fondée ſur le même principe, & ſera facile à déduire de la précedente, en faiſant attention aux Aſymptotes, & à leurs proprietez; il faut ſeulement ajoûter, ou l'on retranche pour l'Ellipſe. Le peu d'uſage que nous avons à faire de cette Courbe, n'éxige pas que l'on s'y arrête plus long temps.

USAGE.

Ce Problême de mener une perpendiculaire à une courbe par un point donné au dehors, ne tombe guéres dans la pratique de l'Architecture pour la coupe des Pierres; parce qu'on fait ordinairement les diviſions de joins

zed by Google

par des points pris ſur les arcs des ceintres, comme il a été enſeigné au Problême précedent; cependant comme il peut arriver dans une décoration de vouſſoirs à Croſſettes, ou pour tirer quelques Rayons ſur une Ellipſe, qu'on auroit beſoin de ce Problême: nous avons crû devoir le joindre au précedent pour la perfection de la Doctrine, dans laquelle on ne doit pas négliger ce qui n'eſt pas d'un fréquent uſage, parce que les Livres ſont plus utiles pour les cas extraordinaires, que pour ce qui ſe pratique tous les jours, dont on peut s'inſtruire facilement; d'ailleurs c'eſt un contentement à l'eſprit de ſçavoir ce qu'on auroit à faire, ſi le cas arrivoit.

Je dois avertir d'une petite difficulté qui peut ſe preſenter, & embaraſſer un Lecteur peu verſé dans ces matieres; c'eſt que la perpendiculaire tirée par le point donné P hors de l'Ellipſe ſur l'axe A B, peut tomber hors de cette Ellipſe ſur la prolongation de l'axe; alors l'Hyperbole ne peut rencontrer l'Ellipſe. Pour y remedier, au lieu d'abaiſſer la perpendiculaire ſur un axe, il faut l'abaiſſer ſur ſon conjugue, & faire la méme operation.

De la diviſion des Spirales par des Perpendiculaires à leurs Arcs.

Probleme XXIX.

Par un Point donné au contour de la Spirale, tirer une perpendiculaire à ſon Arc.

Premierement il eſt évident que lorſque les ſpirales ne ſont qu'une imitation des vrayes Courbes méchaniques par une compoſition d'arcs de cercles, comme ſont les *Volutes* des Architectes; il n'y a pas plus de difficulté à mener des perpendiculaires à leurs arcs par des points donnez, qu'au cercle; puiſque chacun d'eux a ſon centre different, auquel cette perpendiculaire prolongée doit aboutir.

Secondement s'il s'agit de la ſpirale d'Archimede, ou des autres de Varignon, on ne peut donner la ſolution de ce Problême, qu'en ſupoſant la rectification de la circonference du cercle de revolution; car Archimede a démontré que la ſouſtangente de ſa ſpirale à la fin de la premiere revolution étoit égale à la circonference du cercle circonſcrit; & comme nous ne pouvons faire la diviſion propoſée, que par une perpendiculaire à la tangente de la Courbe au point donné; ce Problême eſt un de ceux dont la ſolution Géometrique ſera auſſi long-temps à trouver que la Quadrature du cercle.

Cependant ſupoſant le rapport du diametre du cercle à ſa circonferen-

re, comme 7. à 22. ou 100. à 314. ce qui eſt ſuffiſant pour la pratique des arcs; il ſera aiſé de trouver les tangentes à la ſpirale d'ARCHIMEDE en tel point que l'on voudra marquer à ſon contour.

Soit [*Fig.* 168.] la ſpirale ADBPC, qui fait deux revolutions completes, la premiere de C en B, la ſeconde de B en A: ſi le point donné pour mener une perpendiculaire à cette Courbe eſt en B, à la fin de la premiere revolution; ayant tiré BC au centre C, on lui fera une perpendiculaire BG égale à la circonference du cercle qui auroit BC pour Rayon, ou à la moitié, comme dans cette Figure, à laquelle menant GT parallele & égale à BC ou à ſa moitié, ſi l'on n'a pris que la moitié de la circonference; du point T on tirera TB, qui ſera la tangente, à laquelle ſi l'on tire par le point B donné, la perpendiculaire BX, cette ligne ſera celle qu'on demande.

Si le point donné eſt en A, à la fin de la ſeconde revolution; on fera de même une perpendiculaire ſur CA, que l'on fera égale à la circonference du cercle qui a CA pour Rayon, ou a ſon tiers comme dans cette Figure, ſur laquelle faiſant *tg* parallele & égale au premier Rayon BC, ou à ſon tiers, la ligne *t*A ſera la tangente au point A, & la perpendiculaire A*x*, celle qu'on demande.

Nous prenons ici des parties aliquotes ſemblables, pour que la Figure n'occupe pas trop de place; ce qui ne change rien à la poſition des tangentes, parce qu'on ſçait que les triangles ſemblables, ont les angles oppoſez aux côtez homologues égaux.

Si le point donné eſt en P dans l'intervale de la premiere revolution, ayant tiré, comme ci-devant, PC & ſa perpendiculaire PH, on portera ſur PH la longueur de la circonference du cercle P*bi*, qui a CP pour Rayon, & faiſant HI parallele à PC & égale à BC Rayon de la revolution complete, ou menera IPT, qui ſera tangente au point P, & la perpendiculaire P*x*, celle qu'on cherche.

Si le point donné étoit en *q*, entre la premiere & la ſeconde revolutio BE*q*A, on en agiroit encore de même, ne portant pour la perpendiculaire à la ſouſtangente que le premier Rayon BC.

La démonſtration de cette conſtruction qui eſt de M. PERSONIER de Roberval eſt fondée ſur un principe des mouvemens compoſez qu'on peut voir dans la premiere collection des Memoires de l'Accademie des ſciences, & ſur les 19. & 20.e prop. des ſpirales d'ARCHIMEDE.

Ou pour abreger, il faut multiplier l'arc de revolution (*x*) par ſon Rayon

Digitized by Google

Rayon (y), & le diviſer par le Rayon (a) du cercle de premiere revolution, ſuivant la formule de M. Varignon $\frac{xy}{a}$ pour trouver les ſoustangentes de cette ſpirale.

Presentement il faut voir comment on doit tirer les ſouſtangentes des autres ſpirales d'un degré plus élevé que celle d'Archimede, comme ſont les Paraboliques, Verticocentrales & les Hyperboliques Cocentrales, dont nous avons donné la conſtruction ci-devant.

Appellant (m) le degré de cette courbe M'. Varignon trouve pour expreſſion génerale des ſouſtangentes de ces premieres $\frac{mxy}{a}$, c'eſt-à-dire, qu'il faut rectifier l'arc de revolution EN (*Fig.* 140. Planche 12.) compris depuis l'axe AX, juſqu'au point donné N, le multiplier par ſon Rayon CN, & par le degré (m) de la courbe Generatrice qui eſt ici 2. puis diviſer ce produit par le Rayon de la premiere revolution complete, & l'on aura la longueur Cx de la ſouſtangente Cx; ainſi ayant tiré du centre C la droite CN au point donné N, on lui menera par le point C la perpendiculaire Cx égale à la longueur trouvée par le quotient de cette diviſion, qui ſera priſe ſur la même échelle qui aura ſervi à meſurer le contour de l'arc de revolution pour le rectifier, & les deux Rayons de l'arc de revolution incomplete, & de la revolution complete. Plan. 12. *Fig.* 140.

Ou bien ſi l'on veut trouver la longueur de la ſouſtangente ſans calcul, on le peut de la maniere qui ſuit, avec la régle & le compas.

On portera ſur le Rayon CN prolongé le double de ſa longueur en Cn; & ſur CH perpendiculaire à ce Rayon, la longueur CH égale à l'arc de revolution rectifié, puis ayant fait Hg parallele & égale à Cn, on portera ſur la même Hg prolongée la longueur CD du Rayon de la premiere revolution complete, de g en G, laquelle revolution ſe compte depuis le centre C; enfin par les points G & n, on tirera la ligne Gnx qui rencontrera HC prolongée en x; la ligne menée du point x par le point donné N, ſera la tangente que l'on cherche.

La raiſon de cette operation eſt facile à concevoir, ſupoſant que l'expreſſion Algebrique $\frac{mxy}{a}$ pour les ſpirales Paraboliques Verticocentrales a été démontrée par M. Varignon, comme elle l'eſt en effet dans les Memoires de l'Academie des Sciences; car il eſt clair que je conſtruis cette équation qui eſt dans ce cas $\frac{2xy}{a}$, c'eſt pourquoi je porte le double du Rayon CN$=y$ en Cn pour avoir un Parrallelograme C$g=2xy$; enſuite pour le diviſer par a, c'eſt-à-dire, par le Rayon de la premiere revolu-

Digitized by Google

tion complete qui eſt CD, parce que la ſpirale fait deux revolutions & demi de C en A, je porte CD (*a*) de *g* en G, pour tirer G*nx* qui ſeroit la Diagonale d'un rectangle fait de HG par H*x*, ſuivant laquelle les complemens ſont égaux (par la 43.e du I. Livre d'EUCLIDE,) ainſi le rectangle H*n* qui eſt un de ces complemens, ſera égal à celui qu'on peut ſuppoſer de l'autre côté de cette Diagonale, lequel ayant pour un de ſes côtez *g*G = CD = *a*, aura par conſéquent l'autre égal à C*x* qu'on cherche; puiſqu'en diviſant un rectangle par une de ſes Racines, le quotient donne l'autre.

ON ſera peut-être ſurpris que j'applique à l'exemple que je donne d'une ſpirale Circulaire, l'expreſſion des ſouſtangentes, des Paraboliques Verticocentrales: il ne faut pas prendre ici le nom de Parabole dans la ſignification ſeule de celle d'APOLLONIUS, mais auſſi pour les autres de differents degrez, qui ſont tous deſignez par la lettre *m*, ainſi il faut remarquer que le quart de cercle dans cette ſituation eſt une eſpece de demi-Parabole; en effet ſuivant la Géometrie de l'infini, cette courbe n'eſt qu'un demi cercle infiniment alongé; puiſque dans le cercle, les quarrez des Ordonnées ſont entr'eux comme les rectangles des Abſciſſes, & dans la Parabole, dont le diametre ou plûtôt l'axe eſt infini, les abſciſſes ne different que d'une longueur finie, elles ſont cenſées égales, meſurées depuis le point de rencontre de l'Ordonnée à la partie qui s'alonge infiniment; d'où il ſuit que les quarrez des Ordonnées de la Parabole ſont comme leurs abſciſſes, donc l'expreſſion des ſouſtangentes convient au quart de cercle Verticocentral; puiſqu'elle convient de plus à d'autres Courbes, dont les abſciſſes ſont entr'elles, comme les puiſſances quelconques de leurs Ordonnées, ainſi que le démontre M. VARIGNON.

ON a pû remarquer que j'ai pris le nombre *deux* pour la valeur de *m*, parce que la Parabole & le cercle ſont du ſecond degré, ſur quoi on pourroit me demander quelle eſt la Courbe parabolique du premier degré, puiſque celle-ci eſt du ſecond; à quoi je répondrai que c'eſt le triangle, s'il eſt permis de le mettre au rang des Sections coniques & des Courbes; car on peut lui trouver des abſciſſes & des ordonnées, comme je l'ay dit au I. Livre page 16. & ſous cette conſideration, on peut le regarder comme la Generatrice de la ſpirale d'ARCHIMEDE, dont les arcs de revolution ſont entr'eux comme leurs Rayons; c'eſt pourquoi l'expreſſion *m* s'évanoüit, de ſorte que celle des ſouſtangentes ſe réduit à $\frac{xx}{a}$ qui eſt plus ſimple que la précedente, dont nous avons donné la conſtruction $\frac{2xy}{a}$, où nous avons doublé la longueur de CN, qu'il ne faut pas doubler à la ſpirale d'ARCHIMEDE.

Digitized by Google

La même conſtruction que nous avons donné pour trouver les ſous-tangentes des Spirales paraboliques, Vertico-centrales, ſert pour trouver celles des Hyperboliques Cocentrales, dont nous avons donné un exemple à la Figure 141. avec cette difference que l'expreſſion Algebrique devenant negative, il faut operer en ſens contraire, c'eſt-à-dire, prendre les ſouſtangentes du côté oppoſé.

REMARQUE.

Il arrive aſſez ordinairement que les ſouſtangentes deviennent ſi longues, qu'elles ne peuvent être contenuës dans la ſurface, ſur laquelle on trace l'Epure, c'eſt-à-dire, le deſſein de grandeur naturelle à l'ouvrage qu'on ſe propoſe; pour remedier à cet inconvenient, il faut ne prendre que le tiers ou le quart, ou toute autre partie des longueurs données, & mettre la ſouſtangente ſur le Rayon perpendiculairement, & à une diſtance proportionelle du centre C.

USAGE.

Le principal uſage du Problême qui enſeigne la maniere de mener des tangentes aux ſpirales eſt, comme nous l'avons dit, pour la coupe des joins des Volutes, Conſoles, Colimaçons & autres ouvrages en ſpirale, qu'on peut faire de pierre de pluſieurs pieces; mais il faut remarquer que le liſtel de la Volute étant compoſé de deux ſpirales differentes, l'une qui forme l'arête exterieure, l'autre l'interieure, la perpendiculaire à la tangente de l'une des deux, ne l'eſt pas à l'autre; de ſorte que ſi le joint eſt en bonne coupe ſur une arête, il ſera en fauſſe coupe ſur l'autre; mais comme ce mal eſt ſans remede, à moins que de faire le joint courbe; il convient pour la plus grande régularité de tracer entre les ſpirales de ces deux arêtes une moyenne par les diviſions de la moitié de la largeur du liſtel, ou de celle du Limon, s'il s'agit du Colimaçon, & mener les perpendiculaires aux tangentes ſur les points de diviſion pris ſur cette ſpirale moyenne; ainſi la fauſſe coupe ſe diviſera partie ſur l'arête exterieure, partie ſur l'arête interieure.

Le ſecond uſage de ce Problême eſt pour faire un *Oeil* circulaire au milieu de la ſpirale qui puiſſe ſe racorder avec elle ſans aucun jarret à la jonction de ces deux Courbes; car ayant déterminé ſur la ſpirale un point, où l'on veut qu'elle ſe joigne à *l'œil* circulaire, il faut mener par ce point une tangente & une perpendiculaire à cette tangente par le même point, ſur laquelle on prendra le Rayon du cercle qui doit former *l'œil*, & par ce moyen les deux courbes ſe joindront par une tranſition inſenſible ſans aucun jarret.

D'ou il ſuit que le centre de *l'œil* ne tombera pas ſur le centre de la ſpirale, parce qu'il n'y a que le cercle dont la perpendiculaire à la tangente paſſe par le centre; cette proprieté ne lui étant pas commune avec la ſpirale.

Cette perfection de jonction des deux Courbes ſe trouve obſervée dans la Volute de Goldman, qui n'eſt pas pour cela une ſpirale Géometrique, quoiqu'en diſe Daviler, mais une compoſition d'arcs de cercles, dont la ſuite des Rayons n'eſt pas en raiſon exactement uniforme, comme je le dirai en ſon lieu; ainſi la cathete d'une volute en ſpirale Geometrique ou Mechanique paſſant par le centre de *l'œil*, ne doit pas paſſer par celui de la ſpirale, ou ſi l'on veut qu'elle paſſe par le centre de la ſpirale, elle ne paſſera pas par celui de *l'œil*; c'eſt à l'Architecte à choiſir l'un des deux, l'éloignement de ces deux centres peut être plus ou moins grand, ſuivant la grandeur ou la petiteſſe de *l'œil* de la volute, & la diſtance du point d'attouchement de la ſpirale (où ſe fait la jonction) de ſon centre, ſi le Rayon de l'œil eſt plus petit que cette diſtance, ſon centre tombera au dedans, s'il eſt plus grand, au dehors.

Des diviſions de quelqu'autres Courbes uſuelles par des Perpendiculaires à leurs Arcs.

Outre les Courbes des ſections coniques & les ſpirales; il s'en trouve encore d'autres à diviſer par des perpendiculaires à leurs arcs, dans quelques *Traits* de la coupe des Pierres; mais ſi rarement qu'il n'eſt pas fort néceſſaire de s'arrêter à en chercher les tangentes.

La premiere eſt celle d'une eſpece de Cicloide, qui eſt la courbe développente de la circonference de la face de la *Trompe érigée ſur une ligne droite*, ſuivant le Trait du P. Deran; ſur laquelle il faut tirer les joins de tête, ce qu'il fait en operant ſur cette Courbe, comme ſur un arc de cercle, en prenant de part & d'autre des ouvertures de compas égales, & faiſant des deux diſtances, comme centres des arcs de cercle qui ſe coupent, & donnent à peu près cette perpendiculaire, & ſuffiſamment pour qu'on n'en puiſſe appercevoir l'irregularité, ſi l'on prend de petites diſtances du point donné à diviſer; nous donnerons un autre trait de la même Trompe, où l'on n'a pas beſoin de cette operation.

La ſeconde eſt cette Courbe du quatriéme ordre, dont nous avons parlé, qui eſt la ſection d'un Anneau, ou d'une Helice: dans celle-ci on n'a pas beſoin de faire des joins de tête réguliers, parce qu'elle n'eſt pas

Digitized by Google

employée pour une face aparente, & quand elle le feroit, l'inclinaiſon des joins ſe trouveroit déterminée par celle de l'arc droit de la voute qui n'eſt qu'un demi cercle ou une demi-Ellipſe.

La troiſiéme ſeroit la chainette qu'on pourroit employer pour mettre l'équilibre entre les Vouſſoirs égaux; mais outre qu'au lieu de cette Courbe, on pourroit ſe ſervir de la Parabole, qui en eſt très peu differente; c'eſt que l'une & l'autre ne conviennent guére aux ceintres, ſi l'on a quelque égard à l'agrément de leur contour, & à celui de leur naiſſance à l'impoſte, lorſque les piedroits ſont à plomb: cependant les Curieux pourront ſe ſatisfaire ſur la maniere de trouver des tangentes à la chainette, en cherchant cette ſolution dans les Actes de Leipſic de l'année 1691. *page* 275. ils y trouveront celle qui a été donnée par le célebre M. Bernoulli Profeſſeur des Mathematiques à Baſle, un des plus grands Hommes de notre tems: ſi par un hazard extraordinaire il ſe preſentoit d'autres Courbes à diviſer, on pourra s'en tirer en operant, comme ſur un arc de cercle, & corrigeant à la vûë ce qui pourroit paroître défectueux.

SECONDE PARTIE

Du Second Livre.

CHAPITRE V.

De la deſcription des Sections des Corps qui ne doivent, ou ne peuvent être décrites que ſur des Surfaces Concaves ou Convexes.

LES Sections dont nous avons parlé dans la premiere Partie de ce Livre ont été conſiderées, comme devant être décrites ſur des ſurfaces planes, quoiqu'elles ſoient originaires des ſurfaces courbes: il s'agit à preſent de les tracer ſur les ſurfaces qui leur ſont naturelles, de même que celles qui ne peuvent être décrites ſur des plans, auſquels elles ne peuvent s'adapter. Cependant, parce que les points des contours de ces dernieres ne peuvent ſe trouver que par le ſecours des lignes droites qu'on ne peut chercher ſur des ſurfaces courbes, en ce qu'elles ne ſont pas à la ſurface du ſolide, mais au dedans, comme ſont les Rayons, les Ordonnées & les abſciſſes; il a fallu avoir recours à une repreſentation imparfaite & défigurée faite ſur une ſurface plane par des paralleles abaiſſées ſur cette ſurface de pluſieurs points de la Courbe: ce qu'on a appellé *la projection*, du mot latin *projicere*, qui veut dire jetter, comme ſi tenant un corps en l'air, on jettoit ou laiſſoit tomber de chacun de ſes points une goûte d'ancre ſur un plancher, la ſuite de ces goûtes liées par une ligne continuë, donneroit une Figure qui ſeroit la projection de ce corps.

De la Projection.

LE mot de Projection a pluſieurs ſignifications, il peut s'appliquer à l'action de jetter, mais nous la reſſerons ici à la deſcription d'un corps formée ſur un plan par des perpendiculaires à ce plan, ou ſi l'on veut l'étendre encore d'avantage, par des paralleles menées des angles de ce

Digitized by Google

corps ou de pluſieurs points de ſon contour ſur ce plan en quelque ſituation qu'il ſoit à ſon égard.

Il ſuffit cependant à l'uſage que nous en devons faire, de conſiderer les lignes Verticales & les Horiſontales; parce que c'eſt à ces deux genres de ſituations conſtantes, & que l'on peut toujours déterminer, qu'on doit rapporter les lignes inclinées à l'Horiſon: ſelon cette reſtriction nous pouvons dire, pour nous accommoder aux termes de l'Art, que la projection d'un corps eſt la trace de pluſieurs *a-plombs* abaiſſez de leurs angles ou de leurs contours pour en faire *le plan* ou Ichnographie, ou de pluſieurs lignes de niveau tirées de même de ſes angles, ou de ſon contour ſur une ſurface *a-plomb*, pour en faire les *Profils* ou les *Elevations*.

COROLLAIRE GENERAL.

D'où il ſuit que la Projection faite ſur un Plan Vertical ou Horiſontal, racourcit la repreſentation de toutes les Lignes & Surfaces qui ne ſont pas paralleles au Plan ſur lequel on la fait.

Pla. 16.

Car ſoit [*Fig.* 169.] la ligne AB, dont on fait la projection ſur le plan *gh*: il eſt évident que ſi cette ligne étoit dans la ſituation aB parallele à ce plan, les perpendiculaires aD, BF abaiſſées de ſes extremitez ſeroient auſſi paralleles & égales, & par conſéquent que la repreſentation DF ſeroit égale à aB; mais que ſi l'on tranſporte le point a en A ſans mouvoir le point B, on racourcira la repreſentation de cette ligne de la diſtance qu'il y aura de la perpendiculaire aD, à AE qui eſt égale au ſinus verſe aS de l'angle aBA de l'inclinaiſon de la ligne AB abaiſſée à ſon extremité A au deſſous de la ligne Horiſontale aB, ſi la projection ſe fait par des Verticales; donc la repreſentation EF ſera plus petite que la ligne AB. *Fig.* 169.

On peut démontrer cette verité d'une maniere plus ſimple en menant AC parallele à EF, parce qu'alors on reconnoîtra que la projection d'une ligne qui n'eſt pas parallele au plan de deſcription, eſt toûjours égale au côté d'un triangle rectangle, dont la ligne objective eſt l'hypotenuſe; d'où nous tirons la propoſition ſuivante, qui eſt fondamentale pour tracer les deſſeins qu'on appelle les *Epures* pour la coupe des Pierres.

THEOREME.

Les Projections des Lignes courbes qui ſont dans un Plan perpendiculaire à un ou pluſieurs autres Plans de deſcription, ſont des Lignes droites, dont les diviſions faites par des paralleles menées par pluſieurs Points de ces Courbes, ſont toûjours en même proportion avec les Abſciſſes co-ordonnées.

Premierement il eſt clair que la projection d'une ligne courbe qui eſt *Fig.* 170.

dans un plan perpendiculaire à celui de deſcription eſt une ligne droite; car puiſque toutes les lignes menées des points de la Courbe ſur le plan de deſcription, ſont dans le même plan; on ne doit plus conſiderer que la ſection des deux plans, laquelle ſuivant la Geometrie Elementaire eſt néceſſairement une ligne droite : ainſi la projection de l'Ellipſe ABDE [*Fig.* 170.] eſt la ligne *ad* dans le plan *gb*, & la ligne *be* dans le plan *gk*, l'une *ad* eſt Horiſontale ſur le plan Horiſontal, & l'autre *be* Verticale ſur le plan Vertical ; & les points c^1, & C^2 de ces deux lignes ſont la repreſentation de trois points raſſemblez en un, ſçavoir, *c* qui repreſente les points B, C, E & C^2 les points A, C, D, de ſorte que *ca* & *cd* ſont les repreſentations d'un quart ou d'une moitié d'Ellipſe ; ce qui eſt viſible, & à quoi il faut s'accoûtumer pour concevoir tout ce que nous dirons dans la ſuite ſur des Figures, où nous n'exprimeront ſouvent les lignes courbes, que par des droites.

Quant à la ſeconde partie de ce Théoreme touchant le rapport des diviſions faites par des paralleles menées de pluſieurs points des Courbes ; nous n'étendrons la démonſtration qu'aux ſections Coniques, qui ſont preſque les ſeules dont nous avons à faire, particulierement du cercle & de l'Ellipſe.

Fig. 171. Soit une ligne *k*L ou *be* [*Fig.* 171.] coupée par des paralleles *at*, Q*s*, P*r*, le rectangle de *a*T×T*d*: *k*T×TL : : Q*c*×*cq*: *kc*×*cl*, il en eſt de même des rectangles faits par les parties de la ligne *be* coupées par les Paralleles *at*, Q*s*, P*r*; donc les points T*c*z, ſections de lignes tirées des points *a*QP ſur la ligne *k*L donnent des diviſions ſur cette ligne qui ſont en même raport entr'elles, que celles que les mêmes points *a*QP donnent ſur la ligne *be*, quoique differemment ſitué à l'égard de l'arc *a*P de l'Ellipſe, au dedans de la Courbe.

Il ne ſera pas difficile de faire voir que le même raport ſubſiſtera à l'égard des lignes qui ſont hors de la Courbe, par exemple de *g*H, car ſi l'on mene par le point *g* une ligne *gf* parallele à *be*, il eſt évident que les diviſions *rs* & *st* ſont égales à *zn* & *nm*, mais à cauſe de paralleles *at*, Q*s*, P*r*, les triangles *gt*M, *gs*N, *gr*O ſont ſemblables; donc *rs*=*zn*: *st*=*nm* : : ON: NM:: *zc*: *c*T, donc la projection des points PQ*a*, ou *pqd*, faite par des lignes paralleles entr'elles, donne toûjours des diviſions qui ſont en même raport entr'elles, ſur les plans differemment ſituez à leur égard, ſoit au dedans, ſoit au dehors de la Courbe, & quelque angle que les lignes de projection faſſent avec ces plans; *ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire

Digitized by Google

Corollaire I.

D'ou il ſuit que la projection faite ſur des plans perpendiculaires aux paralleles de projection, n'eſt pas une repreſentation plus réguliere des objets, que celle qui eſt faite par des lignes obliques, & que cette maniere de repreſenter les corps eſt Géometrique; puiſqu'elle conſerve toûjours un certain rapport des parties des Courbes projettées.

Corollaire II.

De-la il ſuit que ſi l'on fait la projection d'un cercle par des lignes paralleles, perpendiculaires ou obliques au plan de deſcription; les diviſions correſpondantes des deux côtez de la ligne de projection qui paſſe par ſon centre, ſeront égales entr'elles, à cauſe de l'uniformité de cette Courbe: il en ſera de même à l'égard de l'Ellipſe, lorſque la projection ſe fera par des lignes perpendiculaires au plan de deſcription.

Ce que nous diſons du cercle & de l'Ellipſe eſt encore vrai à l'égard de la Parabole & de l'Hyperbole, lorſque les lignes de projection ſont paralleles à leurs axes.

On peut étendre ce Théoreme à d'autres courbes qu'aux Sections coniques, comme aux ſpirales, & aux Ovales faites par la ſection des corps Annulaires, dont nous avons parlé: en un mot la projection conſerve toûjours une certaine régularité de rapport, qui eſt le ſeul moyen d'adapter à une ligne droite quelques proprietez d'une ligne courbe, & d'appliquer ſur un plan les ſurfaces concaves ou convexes, ſans confuſion de leurs parties, quoiqu'elle transforme quelquefois une courbe en une autre.

THEOREME.

La Projection d'un Cercle qui n'eſt pas parallele à ſon plan de deſcription eſt une Ellipſe, & au contraire celle de l'Ellipſe peut être un Cercle; & celle des Ellipſes, Paraboles ou Hyperboles, eſt une Courbe d'une même eſpece plus ou moins alongée.

Soit [*Fig.* 172.] le quart de cercle AEFC dans le plan AEHC, ſur lequel on fait la projection de ce même quart de cercle ſuppoſé élevé ſur ce plan en D, de l'intervale de l'arc DE, meſure de ſon angle d'inclinaiſon DAE, le Rayon AC demeurant immobile ſur le plan. Des points D & G pris à volonté à la circonference du quart de cercle, ayant abaiſſé ſur le même plan les perpendiculaires D*d*, G*g* qu'il faut ſuppoſer telles, quoiqu'elles ne le ſoient pas dans la Figure, à cauſe de la perſpective; ſi par les points *d* & *g* on tire les droites A*d*E, B*g*F perpendiculaires *Fig.* 172.

Digitized by Google

au Rayon AC, on aura deux triangles ſemblables A*d*D, B*g*G rectangles en *d* & *g*, par la conſtruction, & dont les angles en A & B ſont égaux, puiſqu'ils ſont celui de l'inclinaiſon des deux plans des quarts de cercle DAC & EAC, donc A*d*: AD:: B*g*: BG; mais AD = AE & BG = BF; donc AE: A*d*:: BF: B*g*, c'eſt-à-dire, que les Ordonnées de la courbe ſont entr'elles comme celles du cercle; ce qui n'appartient qu'à l'Ellipſe,* *& qu'il falloit démontrer.*

L. 1. art. 41.

On auroit pû démontrer la même choſe tout d'un coup en conſiderant le cercle à la ſurface d'un Cylindre ſcalene, dont la ſection perpendiculaire à l'axe eſt une Ellipſe; car les lignes de projection étant multipliées à l'infini, & paſſant à la circonference d'un cercle formeroient la ſurface d'un Cylindre.

Par ce moyen on démontre tout d'un coup la ſeconde partie de ce Théoreme, qui dit que la projection d'une Ellipſe eſt ſouvent un cercle, & ordinairement une Ellipſe plus ou moins alongée; car l'Ellipſe conſiderée à la ſurface du Cylindre Droit ſe reduit à un cercle à ſa baſe, & ſi le Cylindre eſt coupé plus ou moins obliquement, ſoit qu'il ſoit droit ou ſcalene, la ſection eſt un Ellipſe plus alongée ou plus racourcie.

La même démonſtration ſert pour la troiſiéme partie, qui dit que la projection des Paraboles & Hyperboles ſont des courbes de même eſpece, comme il a été dit au Théoreme III. qui ne different de celle qu'on veut repreſenter par la projection, qu'en ce qu'elles ſont plus ou moins alongées ou racourcies, ſuivant le plus ou moins d'obliquité de la ſection; car les lignes de projection multipliées à l'infini forment un corps cylindrique qui a pour baſe une Parabole ou une Hyperbole, c'eſt l'inverſe du Théoreme III.

Corollaire.

D'ou il ſuit que plus les lignes de projection ſont les angles aigus, avec le plan de la Figure qu'on veut projecter, plus la Figure ſe reſſerre; de ſorte que ſi ces lignes ſont un angle infiniment aigu, elles tombent dans le plan de la Figure, & la reduiſent à une ligne droite, comme nous l'avons dit ci-devant.

Usage.

L'application de cette propoſition ſe preſente tous les jours à la pratique de la coupe des Pierres & des autres ouvrages d'Architecture; car la projection, c'eſt-à-dire, en termes de l'art le *Plan* d'une porte, ſoit en plein ceintre, ſoit ſurhauſſée, ſoit ſurbaiſſée, dans un mur en Talud,

Digitized by Google

comme ſont ordinairement ceux des revêtemens des Fortifications, eſt une Ellipſe fort reſſerrée, ſuivant le plus ou le moins d'inclinaiſon du Talud, & celui d'un joint de lit d'une Niche ſpherique en Coquille eſt de même une Ellipſe qui ſe reſſerre vers la Clef, où elle devient une ligne droite, & s'ouvre vers les Impoſtes, où elle devient un arc de cercle.

Ces deux propoſitions ſont encore néceſſaires pour l'intelligence des Figures ſuivantes, & des Traits en géneral, où l'on repreſente ſouvent les cercles & les Ellipſes par des lignes droites, qui en ſont la projection, ou par des Ellipſes extrêmement reſſerrées.

De la deſcription du Cercle ſur les Surfaces concaves ou convexes de la Sphère, du Cône & du Cylindre.

Probleme XXX.

Par deux ou trois Points donnez ſur la ſurface d'une Sphère, décrire un Cercle.

On doit conſiderer la ſurface de la ſphère comme compoſée de deux Figures, l'une concave, l'autre convexe; cette difference n'eſt pas un objet pour la Théorie, où l'on n'a pas égard à l'impénetrabilité des corps; mais bien pour la pratique qui ne peut operer ſur l'une comme ſur l'autre.

Premierement s'il s'agit de décrire un cercle Majeur dans la ſurface concave; il ſuffit qu'on ait deux points donnez, pourvû qu'on connoiſſe le diametre de la ſphère, & qu'ils ne ſoient pas diametralement oppoſez; car il eſt clair par la géneration de la ſphère (*Art.* 1.) que le diametre d'un cercle devient l'axe de la ſphère, lorſqu'on le fait mouvoir autour de ce diametre; par conſéquent qu'il eſt commun à tous les cercles qui paſſent par l'axe de la ſphère.

Si les deux points donnez ſont moins éloignez que de 180. degrez, on ne peut y faire paſſer qu'un cercle Majeur, mais une infinité de cercles Mineurs de differentes grandeurs; d'où il réſulte que, pour ceux-ci, ce n'eſt pas aſſez de deux points donnez, il en faut trois, pour en déterminer la poſition & la grandeur; parce qu'il en faut chercher le diametre comme il ſuit.

Soient les trois points donnez ABE [*Fig.* 173.] dans la ſurface concave de la ſphère; on en meſurera les diſtances pour en faire à part, ſur *Fig.* 173.

une muraille ou autre ſurface plane un triangle ABE, puis par les points B & E, on tirera aux lignes AE, AB des perpendiculaires B*d*, E*d* qui ſe rencontreront au point *d*, ſi par ce point *d* & l'oppoſé A, on tire une ligne A*d*, elle ſera le diametre qu'on cherche.

COROLLAIRE.

DE cette méthode on tire celle de trouver le diametre d'une ſphère; *Fig.* 175. car ſi avec un cordeau de longueur arbitraire, & d'un point P pris à volonté pour Pole, on décrit un cercle ſur la ſurface concave, en ayant trouvé le diametre par la pratique précedente, on ſera un triangle Iſoſcele de la longueur du diametre AE pour baſe, & des deux longueurs du cordeau AP, EP pour côtez, leſquels on ſera aux points A & E, deux perpendiculaires qui ſe rencontreront au point D: la ligne PD ſera le diametre de la ſphère qu'on cherche; cela ſuppoſé pour décrire un cercle Majeur par les deux points donnez A & B, [*Fig.* 173.] il faut tracer *Fig.* 174. à part ſur une ſurface plane un quart de cercle, [*Fig.* 174.] ou ce qui eſt la même choſe un triangle Rectangle Iſoſcele, dont les jambes a*c*, *pc* ſoient égales au Rayon de la ſphère, l'Hypotenuſe *ap* ſera la corde d'un arc de 90. degrez qui ſervira à trouver le Pole du cercle propoſé.

Fig. 173. DES points A & B comme centres, & la corde *ap* pour Rayon, on ſera une interſection de deux arcs de cercles qui ſe couperont en P, où ſera le Pole, duquel on décrira le cercle Majeur EABF, qui eſt répreſenté ici en Perſpective, c'eſt-à-dire, qu'on y fixera le cordeau, une perche ou un ſimbleau, pour tracer le cercle dans la ſurface concave de la ſphère à peu près comme on ſe ſert du centre ſur une ſurface plane.

J'AY dit dans la ſurface concave, parce qu'il eſt viſible qu'on ne peut pas operer de même ſur la Convexe, ſur laquelle au lieu de ſe ſervir de la corde *ap* pour Rayon des interſections qui donnent le Pole; il faut ſe ſervir de l'arc *a*L*p*; c'eſt pourquoi il faut un inſtrument pour y ſuppléer, ou un compas à pointes courbées, ſi la ſphère eſt petite comme ſont dans l'Artillerie les Boulets & les Bombes; mais ſi la ſphère eſt grande comme une voute, au lieu d'un cordeau, il faut ſe ſervir d'un aſſemblage de trois pieces de bois *p*H, H*g*, *ga* aſſemblées à angle droit, dont la grande H*g* ſoit égale à la corde *pa*, & les deux autres à la fleche *f*L; & pour les entretenir en cet état, il faut les lier par des liens ou écharpes IK, *ik*, qui les empêchent de s'ouvrir ou de ſe fermer.

POUR trouver le Pole d'un cercle mineur, dont on a trois points don- *Fig.* 175. nez [*Fig.* 175.] on décrira ſur une ſurface plane par le moyen du triangle ABE le cercle AE*d*, puis ayant diviſé l'arc BE en deux également en *m*, on tirera le diametre *mt* perpendiculairement à BE, ſur le milieu

s, duquel on menera la perpendiculaire X*cx*, puis du point *m* ou *t*, pour centre, & de l'intervale du demi diametre de la ſphère pour Rayon, on décrira des arcs de cercle qui couperont la perpendiculaire X*x*, aux points *x* & X, où ſeront les Poles du cercle mineur A B E *d* que l'on cherche; ainſi les diſtances X*m*, ou *x t* ſeront les Rayons des interſections des arcs de cercle qu'on fera des points B & E, comme centres pour avoir le point d'un des Poles, comme nous l'avons dit ſur la Figure 173.

au point G. qui represente le centre de la sphere, duquel et avec le même rayon on decrira des arcs, qui couperont la ligne X x.

Ou bien méchaniquement & avec une exactitude ſuffiſante pour la pratique, on enfilera trois cordeaux égaux dans un Anneau *Fig.* 173. en S pour la ſurface convexe, & en P pour la concave, qui ſeront d'une longueur proportionnée à peu près à celle qu'on juge à vûë d'œil, & un peu plus longue; on les noüra enſemble par un bout. & on attachera les autres aux points donnez, puis faiſant couler l'Anneau, en raprochant de la ſurface de la ſphère les trois cordeaux également tendus, on parviendra exactement au Pole, où on attachera un des cordeaux pour tracer le cercle demandé ſur la ſurface de la ſphère. Cette méthode a cela de commode qu'elle peut ſervir ſur la ſurface convexe, en éloignant l'Anneau au deſſus du Pole autant qu'on le voudra, pour éviter le frottement du cordeau qui ſert de ſimbleau, lequel doit être tangent à la ſphère, pour n'être point plié ſur la ſurface convexe, où ce pli, ou plûtôt cette courbure cauſeroit des ondulations par le frottement.

Mais ſi on avoit un cercle Majeur à décrire comme les ſocles ou les côtez d'une couverture de Dome, tels qu'on en voit à celui des Invalides; on ne pourroit aſſez élever le point S pour éviter le frottement, c'eſt pourquoi il faut ſe ſervir du niveau ou du plomb; ſi les Cherches doivent être de niveau comme les ſocles, ou à plomb comme les côtes, ou ſi de tels ornemens étoient inclinez, comme des entrelas de cercles, il faudroit avoir, au Pole, une perche perpendiculaire à la ſurface convexe par la pratique dont nous parlons, qui ſerviroit à aligner le cordeau, afin qu'en le courbant, il ne ſe detournât point de ſa direction; parce que pour peu qu'il ſe courbe à droite ou à gauche, il ſe racourcira & donnera de faux points du cercle propoſé.

Demonstration.

Premierement il eſt clair qu'ayant trouvé la corde de 90. degrez de la circonference de la ſphère, & l'ayant appliquée aux deux points donnez, la rencontre de deux de ces cordes égales eſt le Pole qui eſt toûjours éloigné de 90. degrez d'un grand cercle, par la 16.e propoſition des Sphériques de Theodose. *Fig.* 174.

Secondement pour trouver le diametre d'un cercle, dont on a trois points donnez, nous avons élevé des perpendiculaires ſur A B & A E pour avoir

Digitized by Google

la poſition de ce diametre ; parce que (par la 31.e Prop. d'Eucl. *l.* 3.) l'angle droit eſt toûjours dans le demi cercle, & puiſque les lignes B *d* & E *d* ſont bien poſées, leur rencontre ſe terminera au point de la circonference du cercle diametralement oppoſé au point A : la même conſtruction eſt encore plus intelligible dans le Corollaire pour trouver le diametre de la ſphère.

Troiſiémement il eſt démontré dans la 13.e propoſition des Sphériques de THEODOSE, que ſi dans la ſphère un cercle en coupe un autre en deux également & perpendiculairement, les Poles de celui qui eſt coupé, ſont dans la circonference de celui qui le coupe, & à diſtances égales ; or il eſt viſible que le cercle Mineur A B E *d* eſt coupé en deux également par ſon diametre *m t*, lequel eſt la corde d'un cercle Majeur, dont le diametre X *x* eſt élevé perpendiculairement ſur cette corde ; par conſéquent les points X & *x* ſont les Poles du cercle A B E *d*, & les lignes X *m*, X *t*, *x m* & *x t*, les diſtances ſont de ces Poles au cercle ; car quoique les deux cercles Majeur & Mineur ſoient dans cette Figure ſur un même plan, il faut les concevoir à angle droit l'un à l'autre ; de ſorte que ſuppoſant le Mineur dans le plan du papier, le Majeur ſeroit élevé en l'air perpendiculairement en tournant ſur la corde *m t*, qui doit être immobile.

USAGE.

CE Problême eſt néceſſaire aux Peintres, aux Sculpteurs en Stuc ou en Platre, & aux Marbriers qui ont des ornemens Circulaires à tracer dans la ſurface concave d'une voute Sphérique, ou ſur la ſurface convexe, comme par exemple des Socles, des côtes d'arcs doubleaux, des bordures de bas relief, ou des ouvertures feintes, ou des entrelas Circulaires.

A l'égard des ouvertures vrayes ou feintes faites après coup dans une voute Sphérique ; je dirai en paſſant que VIVIANI *a trouvé le moyen de percer une voute Hemiſphérique en quatre endroits pour des Fenêtres, en ſorte que le reſte de la voute ſoit géometriquement quarrable.*

QUOIQUE cette propoſition n'ait aucun rapport à notre ſujet qui n'a pour but que la diviſion des ſurfaces & non pas leur étenduë ; je crois qu'on ne ſera pas fâché de cette petite digreſſion : la conſtruction de ce Problême conſiſte à diviſer la baſe de l'Hémiſphère par deux diametres à angles droits, ſur leſquels ont fait quatre petits demi-cercles pour baſes de quatre moitiez de Cylindres droits, qui percent l'Hémiſphère ; le reſtant des quatre ouvertures qu'ils font, eſt quarrable, c'eſt-à-dire, qu'on en peut trouver la ſurface géometriquement ; on a vû par nos Principes au Théoreme VII. que la Courbe que font chacun de ces demi-Cylindres étoit une Ellipſimbre ; il ne s'agiroit plus que de quarrer l'eſpace enfermé

dans ces Ellipſimbres pour avoir la ſurface totale de l'Hémiſphère. Mais quoique la Géometrie ne ſoit pas parvenuë à ce degré de perfection, elle nous fournit pour la pratique des moyens ſuffiſamment exacts.

Probleme XXXI.

Par un Point donné ſur la Surface d'un Cylindre, tracer un Cercle.

Si le Cylindre eſt droit, & que la baſe ſoit donnée, il n'y a point de difficulté; il n'y a qu'à ſuivre le contour de la baſe à diſtance égale priſe toûjours parallelement à l'axe, ſoit avec une Régle ou un cordeau ou en petit, avec cet inſtrument de Menuſier qu'on appelle *Truſquin*; mais ſi l'on n'a pas la baſe, ou parce qu'elle eſt oblique ou rompuë, ou embarraſſée par quelque corps qui la couvre, comme ſi l'on vouloit tracer un ornement circulaire, tel qu'une baſe ou une aſtragale à un Pilier Gotique en place; il faut commencer par mener pluſieurs paralleles à l'axe, & tracer le cercle, s'il eſt queſtion d'un Cylindre Scalene, comme une Ellipſe ſur un Cylindre droit, ainſi que nous le dirons ci-après; nous parlerons ſeulement ici du Cylindre droit.

Premiere maniere de tracer des paralleles à l'axe du Cylindre, *la Baſe étant donnée.*

Soit une baſe droite ou oblique ABDE ayant aplani cette baſe, on y menera deux lignes *g*G, *f*F paralleles entr'elles, qu'on diviſera en deux également en M & *m*, par où ſi l'on tire la ligne BE, ſon milieu C ſera l'extremité de l'axe du Cylindre: on en fera autant ſur la baſe oppoſée pour trouver l'autre extremité du même axe; enſuite ayant poſé une Régle HI à volonté ſur cette baſe, pourvû qu'elle paſſe par le pied C de l'axe, on tracera la ligne AD: poſant auſſi une autre Régle KL ſur la baſe oppoſée, on la fera tourner ſur l'extremité de l'axe, juſqu'à ce que regardant l'une par l'autre, leur direction ſoit parallele; en ſorte que celle du côté où l'on regarde couvre ſi bien l'autre, que les deux lignes ſuperieures ou inferieures de ces Régles ſe confondent en une, ce qu'une perſonne ſeule peut faire en arrêtant une des Régles dans ſa poſition, & tenant l'autre pour la tourner, comme il convient; pour faire en ſorte que le Rayon viſuel raſe les deux Régles, de maniere qu'elles ne paroiſſent point ſe croiſer, ce qu'on appelle *bornoyer*; parce que l'on ferme ordinairement un œil, & que nous avons exprimé par des lignes qui partent d'un œil *e* à la Figure 177. en cette ſituation ſi on trace des diametres ſur les baſes, la ligne menée à la ſurface du Cylindre par l'extremité de ces diametres ainſi correſpondans, eſt une parallele à l'axe du Cylindre. *Fig.* 177.

Lorsque les baſes ſont embarraſſées comme à un Pilier en place, qui

Digitized by Google

eſt engagé par le haut & par le bas, on eſt obligé d'avoir recours à des manieres méchaniques pour tracer des paralleles à l'axe.

La premiere & la plus ſimple, eſt celle de ſe ſervir du plomb pour les Cylindres poſez bien verticalement comme des Piliers ronds, & s'ils ſont inclinez, c'eſt d'appliquer de *Champ* une Régle fort large OP, & dont les côtez oppoſez ſont bien paralleles, le long du Pilier, & la tourner de maniere qu'en regardant par deſſus cette Régle, elle ne croiſe point la ligne tangente du Pilier; en ſorte que les Rayons viſuels *o*O, *o*P raſent l'un & l'autre, la ſurface du Pilier; la ligne tracée ſur la méme ſurface cylindrique au long du côté de la Régle qui appuye ſur le Cylindre, eſt une parallele à l'axe.

Fig. 176. La ſeconde maniere qui eſt encore méchanique, eſt de tracer avec un compas d'un point C pour centre, & d'une ouverture priſe à volonté une ligne courbe *d*E*e*, ſur la ſurface du Cylindre, comme l'on décrit un cercle ſur une ſurface plane; enſuite d'une ouverture de compas un peu plus grande que la premiere, mais moindre que la longueur de l'arc de Cylindre, dont elle eſt la corde developé, c'eſt-à-dire rectifié, on décrira ſur du Carton un demi cercle, ou ſeulement un ſecteur de cercle qui en approche, dont on poſera le centre en C, & l'ayant appliqué & plié ſur la ſurface du Cylindre, on y en tracera le contour qui coupera celui de la Courbe précedente en deux points X & *x*, par leſquels ſi l'on tire une ligne droite, on aura la parallele à l'axe qu'on cherche; à laquelle il ſera facile d'en tirer d'autres par des points donnez, s'il le faut. On peut faire la méme choſe avec un cordeau, mais moins exactement; cela ſuppoſé comme une preparation néceſſaire pour tracer les cercles & les Ellipſes à la ſurface du Cylindre.

Fig. 176. Si le Cylindre eſt Droit, il ne s'agit que de faire des ſections perpendiculaires aux lignes paralleles à l'axe: ainſi on prendra à volonté les points *x* & X pour centres, & de tel intervale qu'on voudra pour Rayon, on fera des interſections d'arc en H & en K, & plus loin en *b* & en *k*, ou plus près en *l* & *i*, & l'on appliquera ſur ces points *k*K, *li*, H*b* une Régle pliante, avec laquelle on tracera le cercle autour du Cylindre, s'il eſt droit; car s'il eſt ſcalene, la ſection perpendiculaire à l'axe ſera une Ellipſe, auquel cas, pour décrire un cercle par le point donné, il faut mener par ce point un contour parallele à la baſe, ou faiſant une angle ſous contraire.

Pour tracer des lignes paralleles à l'axe dans la ſurface concave d'une
Fig. 180. portion de Cylindre, comme dans une voute [*Fig.* 180.] au lieu de prendre deux paralleles des deux côtez du centre, on les prendra toutes deux du méme côté, comme *af*, *be*; on les diviſera chacune par le milieu en M & *m*,

Digitized by Google

M & *m*, & on menera par ces milieux la ligne *d*C qui ſera un diametre; mais parce que le Cylindre n'eſt pas complet, ce diametre ne ſera terminé que d'un côté en *d*, & ne l'étant pas au delà de C, on ne pourra en avoir le milieu C, qu'en répetant la même operation par deux autres lignes *i b*, *k g* qui donneront un ſecond diametre E*c* qui coupera le premier en C, centre de la baſe, où paſſera l'axe du Cylindre. On en fera autant à la baſe oppoſée, & l'on aura l'autre extremité de cet axe, auquel il ne ſera pas difficile de mener des paralleles, en tendant un cordeau d'un bout de l'axe à l'autre, & bornoyant par cette ligne deux points dans la ſurface concave; de ſorte que cet axe ſoit dans le même plan, & que le cordeau les couvre à l'œil qui doit être un peu éloigné du cordeau, du côté oppoſé aux points que l'on veut marquer ſur la ſurface concave, pour y tracer une parallele à l'axe du Cylindre.

Demonstration.

La premiere maniere de tracer une parallele à l'axe du Cylindre eſt fondée ſur ce que les Ordonnées à un diametre ſont coupées en deux également par ce diametre; lequel étant auſſi diviſé en deux également, donne le centre de la baſe du Cylindre, ſoit qu'elle ſoit Circulaire ou Elliptique; or quelle qu'elle ſoit, l'axe paſſe par ſon centre, & les deux Régles HI, KL que l'on dirige par le Rayon viſuel dans le même plan paſſant par l'axe, donnent auſſi les côtez du Parallelograme par l'axe, dont les côtez oppoſez ſont paralleles; donc D*d* eſt une ligne parallele à l'axe, *ce qu'il falloit faire.* *Fig.* 177.

La ſeconde maniere de tracer une parallele à l'axe du Cylindre par le moyen d'une Régle d'une certaine largeur, quoique méchanique, eſt exacte dans ſon principe; car puiſqu'elle eſt dirigée par les Rayons viſuels dans un plan tangent au Cylindre, ce plan ne le touchera que ſuivant une ligne parallele à l'axe, & le plan de la Régle étant de largeur égale d'un bout à l'autre, fera un Parallelograme, dont un côté ſera ſur le plan tangent, & l'autre ſur le Cylindre, toûjours également éloigné de la ligne d'attouchement; donc il lui ſera parallele, & par conſéquent à l'axe.

La troiſiéme maniere, quoique méchanique eſt auſſi exacte dans ſon principe; on trace ſur le Cylindre deux Courbes à double courbure *d*E*e*, *m*MB de differente nature, qui ne peuvent ſe rencontrer qu'en quatre points, ſçavoir deux de chaque côté en X*x* d'une ſection par l'axe AFG, celle de ces courbes qui eſt tracée avec le compas, a tous ſes diametres paſſans par le centre C, courbes de courbures inégales, à la reſerve de *de* qui eſt droit, & de contour inégalement long, qui ont cependant des *Fig.* 176.

Digitized by Google

ſouſtendantes toûjours égales, leſquelles ſont les lignes droites, qu'on imagine paſſer par les deux points du compas; & au contraire celle qui eſt tracée avec un cercle plié, a tous ſes diametres de contour également long, & toutes les ſouſtendantes inégales. Chacune de ces courbes a un diametre droit qui leur eſt commun ſur le côté AB, & un circulaire qui lui eſt perpendiculaire, ſçavoir CE dans la premiere, & CM pour la ſeconde; tous les autres ſont Elliptiques, dont la courbure ſe redreſſe à meſure qu'ils approchent de AB; de ſorte qu'étant tous inégaux de chaque côté, ils ne peuvent aboutir au même point, que lorſqu'ils approchent également de ce diametre droit, qui eſt le côté du Cylindre, comme en X & *x*, donc la ligne X*x* eſt parallele au côté, & par conſéquent à l'axe, *ce qu'il falloit faire.*

QUANT à la maniere de tracer le cercle ſur la ſurface du Cylindre, il eſt clair que l'on ſuppoſe que le Cylindre ſoit droit; parce que les points K*i*, *g*H étant chacun également éloignez des points *x*X, ſont dans un même plan perpendiculaire au côté *x*X du Cylindre, par conſéquent à ſon axe, auquel ce côté eſt eſſentiellement parallele.

D'ou il réſulte une ſection parallele à la baſe, c'eſt-à-dire, un cercle.

MAIS auſſi il eſt clair que ſi le Cylindre étoit ſcalene, cette ſection perpendiculaire au côté ſeroit une Ellipſe qui ne ſeroit point parallele à la baſe; ainſi pour décrire un cercle à la ſurface d'un Cylindre ſcalene, il faut en avoir la baſe, tirer des paralleles à l'axe ſur la ſurface, c'eſt-à-dire pluſieurs côtez, & porter ſur chacun de ces côtez la même diſtance du point donné au contour de la baſe, pour avoir autant de points que l'on a de côtez: mais alors on ne peut plus ſe ſervir de la Régle pliante poſée de plat pour tracer le cercle, parce que la direction de ſon pli ſe tourne perpendiculairement au côté du Cylindre, au lieu que celle du contour du cercle le coupe obliquement d'un angle égal à celui que l'axe fait avec le plan de la baſe: mais on peut s'en ſervir en la poſant de *Cant*, c'eſt-à-dire, ſur ſon épaiſſeur appliquée ſur ces points trouvez; parce que l'Ellipſe eſt une courbe plane, & qu'une Régle d'une largeur beaucoup plus grande que ſon épaiſſeur étant pliée, ſe dirige facilement ſur un plan; il n'en ſeroit pas de même s'il s'agiſſoit d'une courbe à double courbure, il faudroit alors que l'épaiſſeur fût égale à la largeur, afin qu'elle ne fit pas plus de reſiſtance à ſe plier d'un côté que de l'autre.

ENFIN la derniere operation pour tirer des paralleles à l'axe dans une ſurface concave de portion de Cylindre, eſt la même que la premiere redoublée; parce que le centre de la ſection étant dans chaque diametre, il ſera dans le point de concours des deux, où ils ſe croiſent.

Digitized by Google

USAGE.

Ce Problême eſt un des fondamentaux de la conſtruction des voutes Cylindriques, parce qu'il ſert à trouver l'Arc-droit des Berceaux circulaires ou Elliptiques, ou pour le ceintre entier, ou pour une petite portion, telle qu'eſt un Vouſſoir, pour y poſer la *Cerche*, c'eſt-à-dire, le modele de la Courbe, lequel doit être preſenté perpendiculairement à une ligne parallele à l'axe; car pour peu que cette ligne lui fût inclinée, le modele de la Courbe circulaire ou Elliptique marqueroit une concavité ou une convexité; laquelle étant continuée, ſuivant la direction d'une ligne qui croiſeroit la direction de l'axe, donneroit une ſurface differente de celle qu'on ſe propoſe, comme on peut l'appercevoir par la difference de la ſection du plan qui paſſeroit par cette Courbe.

Ce Problême peut encore ſervir à tracer ſur une doele de Berceau des ornemens de Peinture ou de Stuc, comme des Arcs-doubleaux.

La maniere de faire des paralleles à l'axe, peut être employée au même uſage, par exemple à diriger une corniche dans un Berceau Rampant, dont la régularité de l'impoſte ſeroit douteuſe; ce qu'on a ſouvent lieu d'examiner à cauſe du peu d'exactitude des Ouvriers dans les voutes, même les plus ſimples.

Enfin ce Problême eſt néceſſaire pour la conſtruction de ceux qui ſuivent.

Probleme XXXII.

Par un Point donné à la Surface d'un Cône, faire paſſer un Cercle.

Premier cas, Lorſque le Cône eſt droit, & que le ſommet eſt donné; il ne s'agit que de fixer un cordeau ou une Régle au ſommet, & de ce point comme Pole décrire un cercle, en tournant ſur la ſurface concave ou convexe, cela eſt très ſimple.

2.° Mais ſi le ſommet n'eſt pas donné comme dans un Cône tronqué, il faut tirer ſur la ſurface du Cône deux lignes droites, c'eſt-à-dire, deux côtez, leſquels étant prolongez, ſe rencontreront au ſommet du Cône.

Pour tirer ces côtez, il ſuffit d'appliquer une Régle bien droite ſur la ſurface du Cône, en ſorte qu'elle ne laiſſe point de jour entr'elle & cette ſurface: ſi cependant le Cône tronqué étoit d'une grande circonference, on pourroit s'y tromper; parce que la ſurface étant d'une convexité peu ſenſible vers la baſe ſur-tout, on pourroit biaiſer la Régle ſans s'en appercevoir; c'eſt pourquoi ſi l'on veut operer exactement, il faut tirer des paralleles ſur les plans des baſes oppoſées, que nous ſuppoſons premierement paralleles entr'elles, & faire pour cette eſpece de

Cône tronqué la même operation que nous avons faite à la Figure 177. pour trouver le côté du Cylindre; alors on ſera ſûr que la rencontre des côtez du Cône trouvez par ce moyen, en donnera exactement le ſommet, ſi l'on veut s'en ſervir, mais on peut s'en paſſer; car ayant trouvé deux côtez du triangle par l'axe du Cône qui diviſe les deux baſes en deux parties égales; on ſubdiviſera chacune de ces parties en un même nombre de parties égales, & l'on tirera des lignes droites des unes aux autres, à la baſe ſuperieure & inferieure, comme l'on voit à la Figure 186. & la diſtance du point donné à la ſurface du Cône priſe de l'une des baſes, & portée ſur chacune de ces lignes ou côtez du Cône donnera des points, par leſquels on menera à la main une ligne courbe, qui ſera le cercle demandé.

Il faut remarquer ici qu'on ne peut pas ſe ſervir pour le tracer d'une Régle pliante poſée de plat, parce que la ſurface de la largeur s'appliquant perpendiculairement au côté du Cône, la direction de ſon pli donneroit une Courbe qui s'écarteroit des points marquez, pouvant être une Ellipſe, une Parabole ou une Hyperbole, ſuivant l'ouverture de l'angle du ſommet du triangle par l'axe; ce qui eſt clair, mais on peut s'en ſervir en la poſant de *cant* ou de champ; on ſe ſert encore de la Régle d'une autre maniere, on bornoye par ſon côté deux ou trois points, ſuivant leſquels on la tient appuyée d'un côté, & en l'air par l'autre, puis fermant un œil, on ſuit avec le crayon l'alignement de cette Régle, ſans changer l'œil de place.

Si les baſes oppoſées du Cône tronqué ne ſont pas paralleles, il eſt clair que l'une étant circulaire, l'autre ſera Elliptique, & que c'eſt de la circulaire qu'il faut prendre les meſures de la diſtance du point donné.

Mais ſuppoſant que la baſe circulaire eſt ſeule plane, & que la partie tronquée n'eſt pas aplanie, on peut encore tracer les côtez ſur la ſurface du Cône en prenant des points à ſon contour équidiſtans d'un 3.e, au milieu des deux, & de ces points comme centres, faire des interſections d'arcs, comme ſi on elevoit une perpendiculaire ſur une ſurface plane, & ſur les côtez ainſi trouvez, tracer le cercle par le point demandé, comme nous venons de le dire.

Troiſiéme cas, Lorſque le Cône eſt ſcalene, quand même ſon ſommet ſeroit donné, on ne peut plus s'en ſervir comme d'un Pole pour tracer le cercle par le point donné, ni de la diſtance du point donné à la ſurface meſurée ſur un côté juſqu'à la circonference de la baſe; parce que le contour du cercle parallele à la baſe, eſt inégalement diſtant de celui de la baſe, quoique les plans de l'un & de l'autre ſoient ſuppoſez paralleles, & par conſéquent équidiſtans.

Digitized by Google

Il faut alors [*Fig.* 179.] abaiſſer une perpendiculaire S P du ſommet S du Cône ſcalene donné A S B ſur le plan de ſa baſe A B prolongé ; ce qui eſt une operation familiere à ceux qui ſçavent bien faire des Cadrans pour trouver le pied du ſtile, & qui eſt un Probléme du XI. Livre d'Euclide, Prop. XI. Ceux qui ne ſont pas Geometres, le font par le moyen d'un Equerre qu'ils poſent d'un côté ſur le plan, & appuyent l'autre au ſommet S, & en la tournant ſur le côté S P marquent le point P, par lequel ſi l'on tire une ligne par le centre C, on aura le triangle rectangle A P S, & par conſéquent l'obliquangle A B S, qui eſt la plus oblique de toutes les ſections par l'axe du Cône, c'eſt-à-dire, qui en marque le plus long côté A S, & le plus petit B S. *Fig.* 179.

Ayant décrit ce triangle ſur une ſurface plane, & le demi cercle A 2 B moitié de la baſe du Cône, on le diviſera en autant de parties qu'on voudra avoir de points du cercle demandé, comme ici en quatre, aux points 1, 2, 3, d'où l'on tirera des perpendiculaires ſur le diametre A B, qui le couperont aux points E C G, deſquels on tirera des lignes au ſommet S; puis par le point donné D ou *d*, s'il eſt dans ce triangle A S B, on tirera une ligne D *d* parallele à A B, & s'il n'y eſt pas, nous verrons par la ſuite de l'operation ce qu'il faut faire pour tirer cette parallele.

Du point E pour centre & pour Rayon E S, on fera un arc S *b* qui coupera A B prolongée en *b*, d'où l'on tirera au point 1. la ligne 1 *b* qui ſera le côté du Cône paſſant par le point 1. on trouvera de même les côtez 2 K, & 3 L qui aboutiront en *b k l*, à differens points donnez ſur A B prolongée par la tranſpoſition des lignes C S & G S.

Ensuite du point E pour centre & pour Rayon E *e*, où E S coupe D *d*, on fera un arc *e f*, qui donnera ſur A B le point *f*; la ligne *f x* menée parallelement à E 1. donnera ſur le côté 1 *b* le point *x* que l'on cherche, qui eſt un de ceux de la circonference du cercle demandé, pris ſur le côté 1 *b*, dont la projection eſt E S dans le triangle par l'axe A S B; le Rayon C *m* donnera un point auprès de G, d'où tirant G *y* parallele à C 2, on aura le point *y*, ainſi des autres.

Si le point donné D n'eſt pas ſur les côtez du triangle par l'axe A S B, mais qu'il ſoit par exemple en *g*; ayant tiré par le ſommet du Cône le côté S *g*, il coupera la baſe au point 3. d'où ayant trouvé le côté 3 *l*, on portera ſur ce côté la diſtance donnée 3 *z* égale à 3 *g* pris ſur la ſurface du Cône; puis de *z* tirant *z b* perpendiculaire ſur A B prolongé, la diſtance G *b* donnera ſur G S le point *g* par où doit paſſer la parallele D *d*, pour trouver les points de la circonference du cercle demandé, comme nous venons de le dire.

Digitized by Google

Il n'eſt pas néceſſaire de parler ici du cercle de la ſection ſous-contraire, parce qu'il eſt aiſé d'y ſupléer, en faiſant attention qu'au lieu d'operer ſur la ligne D*d* parallele à la ligne AB, il faut tracer une autre ligne NB, ou ſur une de ſes paralleles qui faſſe avec SA un angle égal à l'angle SBA.

DEMONSTRATION.

Il eſt clair par la nature du Cône que l'on ne peut trouver de lignes droite à la ſurface, que celles qui ſont menées du ſommet à la circonference de ſa baſe, que toutes ces lignes ſont égales dans le Cône Droit, & inégales dans le Scalene; que lorſqu'elles ſont égales, qui en a une, les a toutes; mais que lorſqu'elles ſont inégales, on ne peut les trouver par la projection ſur le triangle par l'axe ASB, comme on a trouvé ci-devant les côtez du Cylindre ſur le Parallelograme par l'axe, parce que les lignes ES, CS, GS, ſont les côtez d'un triangle rectangle, dont le côté du Cône qui leur répond, eſt l'hypotenuſe : or il eſt clair qu'en tranſportant, par exemple, ES en E*b*, le côté E1 reſtant immobile à angle droit ſur AB, la ligne 1*b* repreſente exactement le côté du Cône, & 1*x* la diſtance de la baſe à une ſection parallele faite par un plan perpendiculaire au triangle par l'axe ASB, & parallele à la baſe.

Que les angles SE1, SC2, SG3 ſoient droits, c'eſt une ſuite de la conſtruction; parce que le plan du triangle par l'axe ASB paſſe par la ligne SP qui a été faite perpendiculaire au plan de la baſe AB; c'eſt-à-dire, du demi cercle A2B; par conſéquent toutes les lignes E1, C2, G3 perpendiculaires à la commune ſection AP de ces deux plans ſont perpendiculaires à toutes celles qui ſont tirées dans le plan ASP, comme SE, SC, SG, &c.

Nous avons ſuppoſé dans ce Problême que le Cône étoit Droit, ou incliné ſur une baſe circulaire; mais ſi l'on n'avoit qu'une baſe Elliptique, & qu'on voulût tracer un cercle ſur le Cône, il faudroit chercher l'angle de l'inclinaiſon d'un plan coupant celui de la baſe, dont la ſection fût un cercle, pour avoir le Profil du triangle par l'axe du Cône Elliptique. Comme cette propoſition n'a été donnée par aucun des Auteurs des Traitez des Sections coniques que je connoiſſe, & que j'y ai trouvé de grandes difficultez; j'ai eu recours au Celebre M. Bernoulli un des premiers Mathematiciens de notre Siecle, qui a bien voulu m'en donner la ſolu-
„ tion; il eſt convenu que ce Problême étoit du nombre de ceux qui,
„ quand on ne s'y prend pas bien, engagent dans un calcul penible, &
„ conduiſent à des équations de quatre dimentions, & que la ſolution
„ étoit une choſe nouvelle.

Ce grand Homme qui a le bonheur d'avoir un Fils qui marche à grand

pas ſur ſes traces dans les hautes Sciences, comme il a paru depuis peu par la piece de ſa façon, qui a remporté le prix de l'Academie des Sciences de Paris, lui ayant parlé de ma Queſtion; le digne Fils la réſolu d'une autre maniere, dont il a bien voulu me faire part. On la verra à la ſuite de celle de M. ſon Pere, que je mets ici mot à mot, perſuadé que ce qui vient des grands Hommes doit être conſervé ſans alteration; dans cette idée j'aurois copié en entier la Lettre qu'il m'a fait l'honneur de m'écrire, s'il n'y avoit répandu des expreſſions ſi obligantes ſur mon Ouvrage, que je ne pourrois les répeter ſans pecher contre la modeſtie: il n'en falloit pas moins pour me faire ſuprimer les marques de ſa politeſſe, & celles de la bienveüillance, dont il m'honore, à laquelle je ſuis extrêmement ſenſible.

Probleme XXXIII.

Etant donné un Cône ASB, Droit ſur une Baſe Elliptique ADB, dont AB eſt le petit Axe, dont le Plan doit être conçû perpendiculaire au Plan du triangle Iſoſcele ASB; on demande la poſition d'un Plan incliné ſur l'Ellipſe, dont la ſection dans le Cône ſoit un Cercle. Figur. † près de 182

1.° J'apellerai le *grand côté* du Cône Elliptique la droite SD, (ou S*d*) tirée du ſommet S à l'extremité D du grand demi axe de l'Ellipſe, dont le plan doit être conſideré comme perpendiculaire au plan du triangle Iſoſcele ASB.

DEFINITIONS.

2.° *Le petit côté* du Cône ſera SA tirée du ſommet S à l'extremité A du petit axe de l'Ellipſe.

Soient nommées

La hauteur ou l'axe du Cône SC $= a$
Le petit demi axe de l'Ellipſe CA ou CB $= b$
Le grand demi axe de l'Ellipſe CD $= c$

Le grand côté du Cône SD $= \sqrt{cc + aa} = n$, la difference du quarré de CD, & du quarré de CA, c'eſt-à-dire, $cc - bb = hh$, & partant $\sqrt{cc - bb} = h$, pour faire une ligne droite égale à b on a $\sqrt{cc - bb}$, il n'y a qu'à décrire un demi cercle ſur CD, & y inſcrire la corde C*a* égale à CA, tirant enſuite l'autre corde D*a*, on aura D*a* $= \sqrt{cc - bb} = b$: ou bien dans l'angle droit ACD, tirez une hypotenuſe AF égale à CD, on aura CF $= \sqrt{cc - bb} = b$: notez que le point F ſera un des Foyers de l'Ellipſe.

Solution, le plan de l'Ellipſe ADB étant perpendiculaire au plan du triangle ASB, je cherche la poſition d'une ligne droite *y* Y dans le trian-

gle Iſoſcele ASB, laquelle paſſe par le centre C de l'Ellipſe, & ſur laquelle ſi on dreſſe un plan auſſi perpendiculaire au plan ASB, je veux que ce plan dreſſé faſſe dans le Cône par ſa ſection un cercle, dont le diametre ſera yY, & CD une Ordonnée commune à l'Ellipſe & au cercle; parce que le plan de l'Ellipſe & le plan du cercle ſe coupent dans la droite CD: il faudra donc par la proprieté du cercle que CD ſoit la moyenne proportionelle entre les deux ſegmens du diametre Cy & CY, & partant que le rectangle $Cy \times CY$ de ces deux ſegmens ſoit égal au quarré de l'Ordonnée CD, & c'eſt ce qu'il faut exécuter.

AYANT prolongé Yy juſqu'à SE perpendiculaire à SC, ſoit $SE = x$: on aura à cauſe des triangles ſemblables SyE, & AyC, SE: AC:: Ey: yC, & componendo $SE + AC : AC :: Ey + yC$ ou $EC : yC$, c'eſt-à-dire, $x + b : b :: \sqrt{xx + aa} : yC = \frac{b\sqrt{xx+aa}}{x+b}$. Pareillement à cauſe des triangles ſemblables SYE, BYC, on aura SE: BC:: EY: CY, & dividendo $SE - BC : BC :: EY - CY$ ou $EC : CY$, c'eſt-à-dire, $x - b : b :: \sqrt{xx+aa} : CY = \frac{b\sqrt{xx+aa}}{x-b}$; or le rectangle $yC \times CY$ devant être égal au quarré de CD, j'aurai d'abord cette égalité $\frac{b\sqrt{xx+aa}}{x+b} \times \frac{b\sqrt{xx+aa}}{x-b}$ ou $\frac{bb\,xx + bb\,aa}{xx - bb} = cc$, d'où on trouve par la réduction $xx = \frac{bb\,cc + bb\,aa}{cc - bb} = \frac{bb\,mm}{bb}$ par conſéquent $x = \frac{b\,m}{b}$; *ce qu'il falloit trouver.*

Conſtruction Geometrique.

FAITES cette analogie *comme b ou* $V\overline{CD^2 - AC^2}$ *ou CF eſt à b ou AC, ainſi m ou SD eſt à une quatriéme*; je dis que ſi vous prenez SE égale à cette quatriéme, & que vous tiriez par le centre C la droite EY, la partie yY interceptée entre les deux petits côtez SA & SB prolongée, ſera la poſition & la grandeur du diametre cherché; ſur lequel ſi on dreſſe un plan perpendiculaire au triangle ASB, la ſection de ce plan fera dans le Cône un cercle, dont auſſi tous les autres plans paralleles à celui-ci feront par leurs ſections tout autant d'autres cercles.

SCOLIE.

QUE ſi vous aimez mieux trouver trigonometriquement l'angle de l'inclinaiſon de la ſection, ſçavoir l'angle ACy qui eſt égal à l'angle E, vous n'avez qu'à faire cette analogie, comme ES eſt à SC, ainſi le ſinus total eſt à la tangente de l'angle cherché ACy.

COROL-

Digitized by Google

Corollaire.

On en trouve maintenant tout ce que l'on veut, par exemple, Cx, ou la distance du centre de l'Ellipse au centre du cercle ; car $yY = yC + CY = \frac{b\sqrt{xx+aa}}{x+b} + \frac{b\sqrt{xx+aa}}{x-b} =$ [en substituant la valeur de x] $\frac{cn}{m+b} + \frac{cn}{m-b} = \frac{2mcn}{mm-bb} =$ [en substituant la valeur de $mm - bb$ qui est $= aa + bb = nn$] $\frac{2mcn}{nn} = \frac{2mc}{n}$, donc la moitié $\frac{mc}{n} = Yx$ ou yx, & en retranchant Cy, où $\frac{cn}{m+b}$ il reste $Cx = \frac{mc}{n} - \frac{cn}{m+b} = \frac{mmc - nnc + bmc}{mn - bn} =$ [en substituant pour $mm - nn$ sa valeur $cc - bb$ ou bb] $\frac{bbc + bmc}{mn+bn} = \frac{bc}{n}$: ainsi Cx sera la quatriéme proportionelle de n, b & c, c'est-à-dire, de $SA \sqrt{CD^2 - AC^2}$ & CD, ou de SA, CF & CD.

Ce que vous trouvez, (c'est toûjours M. Bernoulli qui parle en réponse) que *le quarré de la moitié du diametre* yY *qu'on cherche, est égal au quarré de la moitié du grand axe* CD, *de la base plus au quarré de* Cx ; n'est autre chose qu'une application d'une proposition du II. Livre d'Euclide, qui est qu'une ligne droite comme yY étant coupée également en x, & inégalement en C, le quarré de la moitié yx est égal au rectangle des segmens inégaux $yC \times CY$ plus au quarré de l'interceptée Cx ; car comme j'ai remarqué ci-dessus le rectangle $yC \times CY$ doit être égal au quarré de CD ; donc on aura aussi Yx^2 ou $yx^2 = CD^2 + cx^2$, comme vous avez trouvé ; ceci est encore confirmé par ce que je viens de démontrer en dernier lieu, où j'ai trouvé $Yx = \frac{mc}{n}$, $Cx = \frac{bc}{n}$ & $CD = c$; il faut donc faire voir qu'effectivement $\frac{mmcc}{nn}$ sera $= cc + \frac{bbcc}{nn} = \frac{nncc + bbcc}{nn}$; or il est clair que $mm - nn$ étant égal $cc - bb = bb$, on aura $nn + bb = mm$ donc $\frac{nncc + bbcc}{nn}$ devient $= \frac{mmcc}{nn}$; ainsi on a $Yx^2 = \frac{mmcc}{nn}$ & aussi $CD^2 + Cx^2 = \frac{mmcc}{nn}$ par conséquent $Yx^2 = CD^2 + Cx^2$.

Vous dites, Monsieur, que vous ne connoissez pas CX, parce que l'angle ASX vous est inconnu : voilà CX trouvé, puisqu'il est égal $\frac{bc}{n}$ indépendamment de l'angle ASX, si pourtant par curiosité on veut trouver cet angle, je m'y prendrai en telle maniere.

Dans le triangle ACy, on a trouvé l'angle ACy, l'angle CAy est donné,

le côté A C eſt auſſi donné : de ces trois choſes données, on trouve C y A, & le côté A y, donc dans le triangle xyS, on aura l'angle xyS, & les deux côtez xy & yS, ce qui ſert à trouver l'angle xyS que l'on cherche.

Quant au côté A y on le trouve immediatement par la premiere ſi-le militu de des deux triangles S yE, C yA en faiſant comme S E + A C eſt à A C, ainſi S y + yA ou S A eſt à A y, c'eſt-à-dire, $x + b : b :: n \frac{nb}{x+b} =$ A y, & mettant pour x ſa valeur $\frac{bm}{b}$ on aura $\frac{nb}{x+b}$ ou A $y = \frac{bn}{m+b}$ faiſant donc comme $m + b$ ou S D + C d eſt à b ou C d, ainſi n ou S A eſt à une quatriéme : cette quatriéme ſera celle à laquelle il faut prendre A y égale, & tirant enſuite par le centre de l'Ellipſe C la droite y C Y, cette droite ſera encore le diametre du cercle cherché ; ce que j'ai voulu remarquer par occaſion.

En ſuppoſant au lieu d'un Cône droit, un Cône ſcalene ou oblique ſur une baſe Elliptique ; on reſoudra le Problême par la même méthode, & avec la même facilité.

Autre Solution du même Problême par M. Jean BERNOULLI le Fils.

Suppose' que le point y ſoit le point cherché dans la ligne A S, par lequel le plan dont eſt queſtion doit paſſer.

Ayant tiré de ce point la ligne yH perpendiculaire à la baſe A B du triangle A S B, & la ligne yK parallele à la même baſe qui joigne les deux côtez S A & S B de ce triangle, je nommerai

S A = S B (le petit côté du Cône) = d
S D [le grand côté du Cône = e
C D] le demi grand axe de l'Ellipſe = a
A C = C B le demi petit axe = b
F C [la diſtance du Foyer F au centre C de l'Ellipſe] = f
A y] la diſtance de l'extremité A du petit axe au point cherché $y = x$

Ces Dénominations étant faites j'aurai

S C [l'axe du Cône] = $V\overline{dd - bb}$ & S A [d] : S C ($V\overline{dd-bb}$) :: A y (x) : I C, ainſi I C = yH = $x\,V\overline{aa-bb}$ pareillement S A [d] : A C [b] :: S y [$d - x$] : yI on aura yI = I K = H C = $\frac{bd - bx}{d}$; or $\overline{y\,C}^2 = \overline{y\,H}^2 + \overline{HC}^2$, donc yC $V\overline{\frac{xx - 2bbx + bb}{d}}$. Pour trouver C Y, je fais cette analogie yK = 2 yI : C B :: yY : C y, & *dividendo* yK — C B ($\frac{2d-2bx}{d}$) : C B [b] :: yY — C Y = yC ($V\frac{xx-2bbx+bb}{d}$) : C Y, on trouvera C Y = $\frac{d\,V\frac{xx-2bbx+bb}{d}}{d-2x}$

Maintenant puiſque le cercle cherché & la baſe du Cône ſe coupent dans la ligne CD, celle-ci ſera une corde du cercle; la ligne yY en ſera une auſſi, & même elle en ſera un diametre ayant pour appliquée le demi grand axe CD, par conſéquent le rectangle des ſegmens de ce diametre où yC × CY ſera égal à $\overline{CD}^2$, c'eſt-à-dire $\frac{4ax - 2bbx + bb4}{4 - 2a} = aa$, & en retranchant bb de part & d'autre $\frac{4xx}{4-2} = aa - bb =$ [par la proprieté de l'Ellipſe] $\overline{CF}^2 = ff$, donc $xx = -\frac{2ffx}{4} + ff$ & $x = -\frac{ff}{4} + \frac{f}{4}\sqrt{ff + 4e}$ ou [en ſubſtituant pour $\sqrt{ff+4e}$ ſa valeur e] $x = \frac{fe - ff}{4}$

faiſant donc comme d ou SA eſt à f ou FC, ainſi $e - f$, ou SD — FC, eſt à une quatriéme, cette quatriéme ſera la cherchée.

Les Corollaires qu'on pourroit tirer de cette ſolution, ſont les mêmes que ceux de la précedente.

Pour réduire ces deux ſolutions à la pratique de la Régle & du compas, qui eſt la plus commode pour les Artiſtes, on operera ainſi à la premiere.

Du centre C & CD moitié du grand axe pour Rayon, on ſera l'arc Dd qui rencontrera BA prolongé en d: ſi l'on tire dS, cette ligne repreſentera le grand côté du Cône.

Par le Foyer F & le point A, extremité du petit axe ayant tiré l'indéfinie FAe, on portera ſur cette ligne la longueur du grand côté du Cône Sd, de F en e par où on menera eg parallele à AB, qui coupera CS en g: par le ſommet S on menera la ligne SE parallele & égale à eg; & enfin par les points E & C on tirera EY qui coupera les côtez SA & SB prolongé en y & Y, la partie yY ſera le diametre du cercle que l'on cherche; laquelle étant diviſée en deux également en x, le point x en ſera le centre.

Si de ce même point x par S on tire xS, cette ligne ſera l'axe du Cône.

Pour la ſeconde ſolution ayant tiré une ligne Ae faiſant un angle quelconque avec AS, on portera la longueur CF, diſtance du centre au Foyer de l'ellipſe, de A en o ſur Ae, & de d en n ſur dS, puis faiſant SV égal à Sn ſur oS, on tirera par les points V & C ligne VY, qui coupera AS en y, où eſt le point cherché; ainſi la ligne yY ſera le diametre du cercle demandé, qu'on tracera ſur la ſurface du Cône El-

liptique ; de la même maniere que l'Ellipſe ſur le Cône droit circulaire, dont nous parlerons après celle de décrire l'Ellipſe ſur le Cylindre.

USAGE.

Cette propoſition ſert pour les *Traits* des voutes coniques appellées Trompes, tant droites que biaiſes, c'eſt-à-dire, dont les baſes [qui ſont leurs faces] ſont perpendiculaires ou obliques à leurs axes ; parce que les joins de Doele & les faces des Trompillons ſont toûjours des cercles ou portions de cercles paralleles à cette baſe : d'ailleurs quand même les faces ne ſeroient pas planes, comme ſont celles des Trompes ſur le coin qui ſont angulaires, les convexes & concaves des Tours rondes & creuſes, & les Ondées comme celle d'Anet ; il faut toûjours pour la facilité de l'execution ſuppoſer une baſe circulaire du Cône droit ou oblique, de laquelle comme d'un terme, on porte les alongemens au dehors, ou les reculemens en dedans des parties excedentes ou défaillantes des concavitez ou des convexitez des faces.

De la deſcription de l'Ellipſe ſur les Surfaces concaves ou convexes du Cylindre & du Cône.

Probleme XXXIV.

étant donnés

Le grand Axe d'une Ellipſe avec un point à la Surface du Cylindre, dont la diſtance à un des Axes eſt connuë, y tracer l'Ellipſe.

On peut trouver les points néceſſaires pour décrire une Ellipſe ſur la ſurface du Cylindre de deux manieres, ou ſur des cercles paralleles à la baſe, ou ſur des lignes droites paralleles à l'axe ; comme la premiere eſt la plus longue, & plus compoſée dans l'operation, parce qu'outre pluſieurs cercles qu'il faut décrire ſur des ſurfaces courbes, il faut encore au moins une parallele à l'axe du Cylindre, nous lui preferons la ſeconde.

Fig. 176. *Fig.* 178. Si le point donné eſt à une des extremitez du grand axe, par exemple en L, on fera ſur une ſurface plane à part [*Fig.* 178.] un angle *lga* égal à celui de l'axe du Cylindre ſur la baſe, droit, ſi le Cylindre eſt droit & aigu ou obtus, s'il eſt ſcalene, ſur un des côtez de cet angle comme *ag*, on portera le diametre du Cylindre, puis du point *g* comme centre, & de la longueur de l'axe de l'Ellipſe pour Rayon, on tracera un arc de cercle qui coupera le côté *al* en *l*, la ligne *gl* ſera la poſition de l'axe de l'Ellipſe dans le Parallelograme par l'axe du Cylindre ;

zed by Google

puis on décrira ſur *ag* comme diametre le demi cercle *anopg* qu'on diviſera en autant de parties égales qu'on voudra avoir de points de l'Ellipſe comme ici en quatre aux points *nop*, par leſquels on menera des perpendiculaires ſur *ag* qu'on prolongera juſqu'au diametre *gl*; les lignes compriſes entre les diametres *ag* & *gl*, ſeront les diſtances du contour du cercle de la baſe à l'Ellipſe demandée; on tranſportera ſur le contour de la baſe du Cylindre *Fig.* 176. les diviſions *a*, *n*, *o*, *p*, *g* de la Figure 178. & par ces points on tirera des paralleles à l'axe, ſur leſquelles on portera les diſtances QR, CS, *qu* de la Figure 178. & l'on aura ſur la ſurface du Cylindre les points LNOPG, par leſquels on tracera à la main l'Ellipſe demandée.

Si le point donné eſt ailleurs qu'aux extremitez du grand axe, la même conſtruction ſubſiſtera, mais elle demande une preparation pour la poſition du cercle qui doit repreſenter la baſe du Cylindre: on décrira ſur le grand axe *gl* de l'Ellipſe une demi-Ellipſe, ou ſeulement le quart d'Ellipſe où le point donné P ſe trouve, dont on connoit, par la ſuppoſition, l'arc P*g*; puis ayant mené ſur la ſurface du Cylindre par ce point une ligne $\overline{rP^1}$ parallele à l'axe, on y portera la diſtance *qu* iſſuë de l'Ordonnée P*u*, & par le point P^1 on tracera un cercle ſur la ſurface du Cylindre, qui repreſentera celui ne la baſe, & on continuera comme au cas précedent.

Demonstration.

Le grand axe de l'Ellipſe doit toûjours être dans le plan du Parrallelograme par l'axe du Cylindre, parce qu'il partage l'Ellipſe en deux parties égales, comme ce Parallelograme partage le Cylindre; or le triangle *lag* repreſente une partie du plan de ce Parallelograme, & le plan de l'Ellipſe eſt auſſi perpendiculaire à celui de la ſection par l'axe du Cylindre, donc les diſtances des points du contour de la baſe à ceux de l'Ellipſe priſe ſur des paralleles à l'axe, ſont égales à celles des points coreſpondans des diametres de l'un & de l'autre, comme ſont *uq*, *c*S, QR, puiſqu'on peut ſuppoſer à chaque point *p*, *o*, *n* une ſection perpendiculaire au plan *gal*, ſuivant les lignes *pq*, O*c*, RQ qui feront auſſi des Parallelogrames, où les Ordonnées de l'Ellipſe *u*P & SO, RN ſeront des côtez paralleles, parce que les deux plans de la baſe & de l'Ellipſe ſont perpendiculaires au troiſiéme *gal*, par conſéquent (par la 9.e du XI. Liv. d'Eucl.) les lignes *pq* & *u*P ſeront égales entr'elles, de même que les diſtances *qu* & P*p*, non dans cette Figure 178. mais à la ſurface du Cylindre *Fig.* 176. ainſi des autres *c*S & *o*O, QPL & *ln*N, quoiqu'elles ne le ſoient pas dans la Figure, où ces deux plans ne peuvent

être repreſentez dans leur vraie ſituation l'un à l'égard de l'autre, parce qu'ils doivent être en l'air perpendiculairement au plan *g a l*; donc l'operation eſt exacte.

USAGE.

Ce Problême eſt d'un très fréquent uſage dans la coupe des Pierres; car la plus grande partie des voutes ſont des Berceaux ſouvent biais par tête, ou parce qu'ils ne ſont pas Horiſontaux, comme les deſcentes, ou parce que le mur de face eſt en Talud, ou parce que leur direction eſt oblique à ce mur par la contrainte des lieux; dans tous ces cas, on ſuppoſe une ſection perpendiculaire au Berceau que l'on appelle *l'arc Droit*, d'où on avance ſur des paralleles à l'axe du Berceau les diſtances qui excedent l'arc Droit pour former une face Elliptique; ce que l'on verra pluſieurs fois au IV. Livre.

Probleme XXXV.

Un Point étant donné à la ſurface du Cône, qui ſoit à l'extremité du grand Axe de l'Ellipſe donné, où d'une Ordonnée connuë, tracer l'Ellipſe ſur la ſurface courbe du Cône.

Lorsqu'on a le grand axe d'une Ellipſe, on a toûjours ſa poſition dans le Cylindre, en quelques points qu'on place ſes deux extremitez, elle ſera toûjours égale; il n'en eſt pas de même dans le Cône, ſi le point de poſition n'eſt pas déterminé, l'Ellipſe que l'on peut trouver avec un grand axe donné peut varier, en ce que ſon petit axe peut être plus ou moins grand, & ſelon qu'il ſera incliné à la baſe, l'Ellipſe ſera plus ou moins differente du cercle de cette baſe; de ſorte qu'à moins qu'on n'ait le point de poſition de l'extremité du grand axe, il faut encore connoître le petit, ou une Ordonnée, auquel cas on trouvera la ſituation du grand axe de l'Ellipſe dans le triangle par l'axe du Cône.

Fig. 181. On commencera [*Fig.* 181.] par chercher le parametre de l'axe donné EL & de l'Ordonnée connuë, comme nous l'avons dit au Probléme * *Pa.* 160. XIV. * ce qui eſt facile; on inſcrira enſuite le triangle par l'axe du Cône *b* S *a* dans un cercle S *a b*, puis on cherchera une quatriéme proportionelle à l'axe donné, à ſon parametre & au côté S *a*, qui donnera ſur S *a*, la longueur *a* P; par le point P on menera P D parallele à *b a*, qui coupera le cercle au point D, par où & par le point S on tirera l'indéfinie S D F, ſur laquelle portant la longueur de l'axe donné de S en K F; on menera par le point K la ligne K L parallele à S *b*, & par le point L la ligne L E parallele à S K; cette ligne E L ſera l'axe donné dans la poſition, où il doit être pour que l'Ellipſe ſoit telle qu'on la demande

igitized by Google

à la ſurface du Cône, dont bSa eſt la ſection du triangle par l'axe, auquel le plan coupant le Cône doit être perpendiculaire, cette preparation étant faite.

Soit [*Fig.* 183.] le triangle par l'axe du Cône BSA, l'axe de l'Ellipſe EL & l'axe du Cône SC, du point C milieu de la baſe BA on décrira le demi cercle BMA, & des points E & L extremitez de l'axe de l'Ellipſe ayant abaiſſé des lignes Ee, Ll perpendiculaires à BA, ou paralleles à l'axe SC; on diviſera l'intervale el en deux également en c, & on décrira de ce point comme centre, & pour Rayon ce le demi cercle $erstl$, qui ſera la projection de la moitié de l'Ellipſe propoſée. *Fig.* 183.

On prendra enſuite ſur le côté BE autant de parties égales que l'on voudra avoir de points à la circonference de l'Ellipſe, par leſquelles on menera des paralleles à BA, comme 4f, 3i, 2d, 1b, oL juſqu'à la rencontre de l'axe EL, & par les points fi, db on abaiſſera des perpendiculaires à la baſe BA prolongées juſqu'au cercle esl, comme bu, dt, is, fr qui couperont ſa circonference aux points r, s, t, u, par leſquels & par le centre C on tirera les lignes Cr 4^b, Cs 3^b, Ct 2^b, Cu 1^b, qui donneront ſur la baſe du Cône les points 4^b, 3^b, 2^b, 1^b, par leſquels & par le ſommet S on tirera des lignes droites ſur la ſurface qu'on n'a pas marqué dans la Figure 183. mais bien dans la Figure 185. qui auroit dû être de grandeur égale à l'autre, ſi la place l'avoit permis; ces lignes ſerviront à trouver les points de la circonference de l'Ellipſe, en portant les diviſions correſpondantes à leur origine, par exemple B4 ſur 4S en 4r, B3 ſur 3S en 3s, B2 ſur 2S en 2t, B1 ſur 1S en 1u, & l'on aura ainſi des points à la ſurface du Cône, par leſquels menant une ligne courbe à la main, on aura l'Ellipſe propoſée.

Demonstration.

Premierement pour la poſition de l'axe EL, il faut démontrer qu'il doit être à ſon parametre comme aS, aP.

Si l'on ſuppoſe un plan qui coupe le Cône parallelement à la baſe, comme en mn, le cercle qu'il fera par cette ſection aura une Ordonnée GI commune avec l'Ellipſe EIL, à l'interſection des deux plans du cercle & de l'Ellipſe; donc $\overline{GI}^2 = nG \times Gm$ & $LG \times GE$: $\overline{GI}^2$:: EL eſt à ſon parametre; or à cauſe des paralleles LE & SF, qui font les triangles ſemblables LGn, SFa, on aura LG: Gn:: SF: Fa, & EG: Gm:: SF: Fb, donc $\overline{SF}^2$: Fa × Fb:: EL à ſon parametre; or à cauſe du cercle SDab, FD × DS = Fa × Fb, donc l'axe EL eſt à ſon parametre:: $\overline{SF}^2$: FD × FS:: aS: SP, *ce qu'il falloit démontrer.* Fig. 181.

SECONDEMENT pour rendre raiſon de la maniere dont on a trouvé les points à la circonference de l'Ellipſe.

Fig. 183. IL eſt clair par ce que nous avons dit de la projection au Theoreme que celle de l'Ellipſe E L eſt un cercle, ou ſa moitié un demi cercle *e s l*, & que ſi l'on ſuppoſe des plans perpendiculaires à celui du triangle par l'axe B S A, & paralleles à cet axe S C du Cône, leurs interſections avec le plan de l'Ellipſe ſe fera ſuivant les Ordonnées qui ſont égales dans l'Ellipſe, & dans le cercle qui eſt ſa projection, puiſqu'elles ſont communes aux deux ſections, dont les points *r*, *s*, *t*, *u* ſont dans leur poſition Horiſontale, à l'égard du point C qui repreſente l'axe.

IL ne reſte plus qu'à déterminer leur hauteur au deſſus de la baſe B A du Cône, laquelle doit être trouvée ſur des lignes à la ſurface qui paſſent par les points *r*, *s*, *t*, *u*, & par le ſommet S, leſquelles ſont repreſentées par la projection C *r* 4', C *s* 3', C *t* 2', C *u* 1', & parce qu'on ne peut pas avoir ces hauteurs verticalement, mais ſur la ſurface inclinée du cône; il faut concevoir pluſieurs plans paralleles à la baſe, & paſſants par les points *f o i d b*, dont les ſections ſeront des cercles qui couperont les lignes tirées par les points de la baſe 4', M 3', 2', 1', en des points qui ſeront à la circonference de l'Ellipſe, puiſqu'ils coupent tous l'Ellipſe en deux points, & que les lignes 4' S, 3' S, 2' S, 1' S, la coupent auſſi aux points des Ordonnées marquées, donc chaque interſection des cercles & des lignes coreſpondantes, qui tirent, de même que les cercles, leurs origines des points *f o i d b*, ſera un des points de l'Ellipſe, *ce qu'il falloit trouver.*

Si le Cône eſt Droit, les diviſions E 4, 3 4, 4 2 ſont égales ſur tous les côtez tirez de la baſe du cône à ſon ſommet S; ainſi l'on peut ſans tracer les cercles porter ces intervales ſur chaque côté du cône tiré des points coreſpondans 4' M 3', 2', 1', de la baſe au ſommet; puiſque les cercles paralleles les coupent tous en parties égales.

Si le Cône eſt ſcalene les diviſions ne ſeront plus égales, mais ſeulement proportionelles, & alors on ne peut ſe diſpenſer de tracer les cercles pour avoir les points de leur interſection avec les differens côtez plus ou moins inclinez, ſuivant l'obliquité du cône.

U S A G E.

CE Problême eſt une introduction à la conſtruction des Trompes coniques en talud, ou en ſurplomb, ou biaiſes, dont les faces ſont Elliptiques.

PROBLEME

Probleme XXXVI.

Un Point étant donné à la ſurface d'un Cône pour ſommet d'une Parabole, décrire cette Courbe ſur la Surface concave ou convexe.

Soit [*Fig.* 184.] le triangle ASB, la ſection du Cône donné, par ſon axe SC, & par le point donné P tracé ſur une ſurface plane; on menera par ce point P une ligne P*a* parallele au côté SB, qui coupera la baſe du triangle en *a*. Du point C, milieu de cette baſe pour centre & pour Rayon CA, on décrira un demi cercle B*y*A qui repreſentera la moitié de la baſe du Cône; enſuite ayant diviſé la ligne P*a* qui repreſente l'axe de la Parabole demandée, en autant de partie ségales ou inégales qu'on voudra avoir de points à ſa circonference, comme auſſi aux points *q*, *r*, *s*, on menera par ces points des paralleles à AB, qui couperont l'axe du Cône SC aux points *o*, 1, 2, *s*, & le côté SA aux points P*t u* V, deſquels on abaiſſera ſur BA des perpendiculaires qui la couperont aux points P T *u* V; & des points *q r s*, d'autres perpendiculaires ou paralleles à l'axe prolongées au deſſous de BA. Enfin du point C comme centre & pour Rayons les longueurs CT, C*u*, CV, on décrira des arcs de cercles concentriques TQ, *u*R, CV qui couperont les paralleles à l'axe SCS aux points Q, R, S, la ligne courbe menée par ces points PQRS*a* dans le demi cercle de la baſe du Cône B*y*A ſera la projection de la Parabole demandée, par le moyen de laquelle on la tracera ſur la ſurface concave ou convexe du Cône, comme on va le dire. *Fig.* 184.

Soit [*Fig.* 182.] le Cône *b*S*a* égal à celui de la Figure 184. ce qu'on n'a pû obſerver dans cette Planche faute de place, mais que l'on peut ſuppoſer; on menera du ſommet S, par le point P donné à la ſurface, une ligne droite SA, ſur laquelle ayant porté les diſtances S*t*, S*u*, S*v*, SA de la Figure 184. aux points 1, 2, 3, 4, on tracera par chacun de ces points un cercle par le Problême XXXII. ſur lequel on portera de part & d'autre de la ligne SA l'arc de la projection qui eſt correſpondant à cette diviſion, par exemple, l'arc TQ qui eſt le premier au deſſous du ſommet P de 1 en Q, l'arc *u*R de 2 en R, & enfin l'arc VS de la Fig. 184. en 3 S de la Fig. 182. & par les points PQRS*x*, ainſi trouvez d'un côté, & les équidiſtans de l'autre côté de la droite SA, on tracera à la main ou avec une Régle pliante, mince & large poſée de cant la Parabole demandée, j'ai dit avec une Régle mince & large, parce que cette courbe, quoique décrite ſur une ſurface convexe ou concave eſt plane dans ſon contours. *Fig.* 182.

DEMONSTRATION.

LA raiſon de cette conſtruction eſt facile à trouver pour peu qu'on faſſe attention à la Figure 184. car premierement on coupe le Cône en pluſieurs tranches paralleles à la baſe, qui ſont autant de ſections circulaires de Rayons inégaux, qui ſont tranſportez ſur celui de la baſe CA par les perpendiculaires P*p*, *t*T, *uu*, VV; de ſorte que le centre C qui repreſente en un ſeul point de projection tout l'axe SC, repreſente auſſi tous les centres de ces ſections répandus ſur cet axe *o* 1 *c*, 2 *c s* & toutes les paralleles à l'axe *q* 1 Q, *r* 2 R, *s* CS, *a* a repreſentent des ſections verticales des plans, qui coupent ces cercles perpendiculairement au triangle par l'axe BSA, & par les points d'interſection, où les diametres des cercles coupent l'axe de la Parabole; par conſéquent ils donnent les cordes de ces arcs circulaires par l'interſection des deux plans perpendiculaires entr'eux, & du troiſiéme P*a* qui forme la Parabole par ſa ſection dans le Cône, où ſe terminent les arcs des ſections circulaires.

LES longueurs des cordes des demi-arcs TQ, *u*R, VS, A a étant ainſi trouvées, il eſt clair qu'elles ont été bien tranſportées ſur le cône à la Figure 182. & dans leurs juſtes places; & par conſéquent que les points à la circonference de la Parabole ont été trouvez ſur la ſurface concave ou convexe du Cône, *ce qu'il failloit faire.*

IL eſt auſſi clair par ce que nous avons dit ci-devant de la projection des ſections coniques, & par le Theoreme III. du I. Livre, que la courbe PQRa tracée dans le plan de la baſe B*y*A, eſt encore une Parabole, quoique differente de celle de la ſection propoſée P*a*.

Nous avons dit au Problême X. à quoi ſert la deſcription de la Parabole.

PROBLEME XXXVII.

Le premier axe d'une Hyperbole, & un Point qui ſoit une de ſes extremitez étant donné à la ſurface du Cône, tracer cette courbe ſur la Surface concave ou convexe.

Fig. 184. SOIT [*Fig.* 184.] le triangle BSA la ſection par l'axe du Cône, & par le point donné H on prolongera indéfiniment le côté AS vers K, puis du point H pour centre & pour Rayon la longueur du premier axe donné HK, on fera un arc qui coupera AS prolongé en K, ſi de ce point K par H on mene une ligne droite KY, on aura la poſition de l'axe de l'Hyperbole dans le Cône; laquelle étant donné il n'y a qu'à faire ſa projection de la même maniere qu'on a fait celle de la Parabole, ce que

Digitized by Google

la Figure fait ſuffiſamment voir, ſans qu'il ſoit néceſſaire d'en répeter la conſtruction: on obſervera ſeulement, 1.° qu'elle eſt beaucoup abregée, lorſque l'axe KH eſt parallele à l'axe du Cône SC; parce que la projection *by* eſt une ligne droite, qui termine tout d'un coup tous les arcs 1E, 2D, 3I. 2.° Que ſi l'axe HY panche vers S, la projection du contour aura ſa concavité tournée vers B, & au contraire ſi cet axe panche en dehors.

Nous avons dit au Problême XII. à quoi ſert la deſcription de l'Hyperbole.

Corollaire General ſur la Projection des Sections Coniques.

Il ſuit de la méthode dont nous venons de faire uſage pour décrire les ſections coniques ſur le Cône, qu'on peut auſſi très commodément l'employer pour *décrire ſur un plan toute ſorte de Section conique, le triangle par l'axe du Cône, & un axe de la ſection étant donné dans ce triangle.*

Car ſi au lieu de prendre les arcs de la projection des tranches paralleles, qui donnent des cercles concentriques, terminez par la projection du plan qui forme la ſection; on prend les cordes de ces arcs rangées ſucceſſivement ſur un axe à angle droit, ce ſeront autant d'Ordonnées, par l'extremité deſquelles on fera paſſer la courbe que l'on cherche.

Premier Exemple pour l'Ellipſe.

Soit le triangle par l'axe du Cône BSA [*Fig.* 183.] dans lequel l'axe EL de l'Ellipſe eſt donné; ayant diviſé cet axe en autant de points que l'on voudra *bdif*, on abaiſſera par ces points & par les extremitez EL des perpendiculaires à la baſe BA, au delà de laquelle on les prolongera en *rstu*; enſuite ſur *el* comme diametre, ſi l'on fait un demi cercle *erstul*, il coupera toutes ces paralleles aux points *rstu*, qui déterminent la longueur des Ordonnées qui conviennent à l'Ellipſe aux points *bdif*; ainſi ayant elevé des perpendiculaires à cet axe ſur ces diviſions, on portera les longueurs des Ordonnées au cercle qui eſt la projection de l'Ellipſe ſur ces perpendiculaires, ſçavoir R*r* ſur *fg*, D*s* ſur *ih*, F*t* ſur *di*, G*u* ſur *b*K, & l'on aura les points E*gbikl*, par leſquels on tracera la demi-Ellipſe à la main, ou avec une Régle pliante. *Fig.* 183.

by Google

Second Exemple pour la Parabole.

Fig. 184. Soit le triangle par l'axe du Cône BSA [*Fig.* 184.] & l'axe de la Parabole P*a* donné dans ce triangle; ayant diviſé cet axe par pluſieurs plans paralleles à la baſe BA, & paſſans par les points pris à volonté *q r ſ*, on fera la projection des cercles qu'ils font dans le Cône, & la projection de la Parabole aRQP, comme nous l'avons dit ci-devant, par les paralleles *a* a, *ſ*S, R*r*, Q*q*, P*p*, on fera des perpendiculaires ſur P*a* aux points *q r ſ*, ou pour éviter la confuſion des lignes ſur une parallele P²A, & l'on portera ſur ces perpendiculaires les ſinus des arcs QT, R*u*, SV, ſçavoir *a* a, S3, R2, Q1, leſquels ſeront rangez ſucceſſivement aux points correſpondans de l'axe de la Parabole, comme 1Q en *q*Q², 3R en *r*R², 3S en *ſ*S², & C*a* en A*a*², & l'on aura les points Q², R², S², *a*², par leſquels on tracera la Parabole à la main ou avec une Régle pliante.

Troiſiéme Exemple pour l'Hyperbole.

Soit *Fig.* 184. le triangle par l'axe du Cône BSA, & l'axe de l'Hyperbole donné HY, dans ce triangle; ayant diviſé cet axe en autant de parties qu'on voudra par des plans qui coupent le Cône parallelement à ſa baſe, en *f g i*, & ayant fait la projection des arcs de cercle qui paſſent par les points *e d i*, par le moyen des paralleles à l'axe SC; on tirera autant de perpendiculaires à l'axe HY donné ou à quelque autre égal, & également diviſé comme *h*B, ſur leſquelles on portera les ſinus de demi-arcs de la projection, 1E, 2D, 3I, B*y* correſpondans à chaque diviſion; c'eſt-à-dire, les perpendiculaires ſur B*h* tirées des points FGIB qu'on tranſportera en F, *f*², G, *g*², I, *i*², B, *y*², & par les points *h*, *f*², *g*², *i*², ²*y*, on tracera à la main une courbe qui ſera l'Hyperbole que l'on cherche.

La démonſtration de ces pratiques eſt la même que celle que nous avons donnée de la deſcription de ces courbes, ſur des ſurfaces concaves ou convexes; en effet il n'y a rien de changé, excepté qu'au lieu de prendre les arcs de la projection pour les porter de part & d'autre d'un côté du Cône, ſur des cercles paralleles à la baſe, ici l'on prend les demi-cordes de ces mêmes arcs ſur des lignes paralleles à cette baſe ſur un plan.

Remarque ſur cet Uſage.

On peut toûjours ſe ſervir de la méthode de la projection dans l'Architecture pour la coupe des Pierres; parce que les Cônes ſont or-

Digitized by Google

dinairement donnez, de même que les axes des ſections dans ces Cônes, & parce qu'on eſt toûjours obligé de faire des *Plans* & des Profils, on a auſſi la projection des diviſions de ces Cônes par les tranches qui ſont ordinairement les rangs des Pierres; il ne s'agit que d'y reconnoître les cordes qui ſont les Ordonnées & abſciſſes, leſquelles ſont toûjours égales ſur le côté du Cône, & ſur l'axe de la Parabole, & dans les autres ſections où elles ſont inégales ſur le côté du Cône, & ſur l'axe, elles ſont toûjours en même raiſon avec celles de l'axe, parce que l'un & l'autre ſont diviſez par des paralleles à la baſe du Cône; comme cette pratique de projection eſt d'une très grande importance pour former ce deſſein, que les Architectes appellent *l'Epure*, nous l'expliquerons plus au long au Livre ſuivant.

Si l'on a bien compris la maniere de tracer les ſections coniques par ce moyen, il ne ſera pas difficile de concevoir qu'il eſt applicable à toutes les autres Courbes, qui peuvent ſe former ſur des corps Réguliers, & même Irréguliers, comme on va l'expliquer ci-après.

TROISIE'ME PARTIE

Du Second Livre.

CHAPITRE VII.

Des Sections qui ne peuvent être décrites que ſur des Surfaces courbes, & par le moyen de la Projection ſur des Surfaces planes.

PROBLEME GENERAL.

Trouver tant de Points que l'on voudra du contour des Courbes faites à la Surface des Sphères, Cônes & Cylindres qui ſe pénetrent mutuellement.

LORSQU'IL s'agit de décrire des courbes qui ſont dans une ſurface plane, on trouve les points de leur contour par le rapport des Ordonnées aux abſciſſes de leurs axes, ou de leurs Co-ordonnées; mais pour celles qui ne ſont pas dans un plan, ce rapport ne ſuffit pas, parce que leurs axes ou diametres, n'étant pas des lignes droites, les abſciſſes ne ſont pas droites; ce ſont des courbes auſquelles il faut mener d'autres Ordonnées à une ligne droite, qui eſt comme leur ſouſtendante, pour en trouver la courbure par differentes diſtances de la corde à l'arc; de ſorte que le rapport de deux lignes connuës ne peut ſuffire, puiſque de quelque façon qu'un plan coupe la Sphère, le Cône ou le Cylindre, il ne produira qu'une ſection conique ou un Parallelograme; & ſi l'on ſuppoſe un ſecond plan perpendiculaire ou incliné à ce premier, leur commune ſection ſera bien une droite, dans laquelle il doit ſe trouver un point de la ſection ſolide; mais cette ligne n'en détermine pas la poſition, il faut avoir recours à un troiſiéme plan qui coupe les deux premiers dans certaines circonſtances, pour déterminer ce point ſur la ligne où l'on ſçait qu'il doit être; tels ſont les points du contour de ces courbes à double courbure, que j'appelle ici des ſections *ſolides*, parce qu'elles proviennent de la ſection d'un ſolide coupé ou pénetré par un autre ſolide, & non pas par un plan, comme les ſections coniques.

DANS le nombre des trois plans qu'il faut ſuppoſer pour trouver les

Digitized by Google

points de ces courbes, il y en a toûjours un donné, qui fait une ſection conique, dont l'axe eſt la ſouſtendante de la courbe à double courbure, que nous pouvons appeller *Imbriquée*, parce qu'elle eſt faite en contour de tuile creuſe, ou qui eſt tangent à un des ſommets de cette courbe, pour les diſtinguer des autres courbes à double courbure, qui ont plus d'une inflexion.

Le ſecond plan doit être parallele au premier, pour y trouver les Ordonnées à l'axe courbe de la ſection ſolide, & les comparer à celles de la ſection conique, qui leur correſpondent.

Enfin le troiſiéme plan doit couper les deux précedens par les Ordonnées de la ſection conique & de la ſolide *Imbriquée*, pour en trouver les diſtances, ou par des perpendiculaires, ou par des lignes inclinées d'une inclinaiſon connuë.

Si l'on entend bien ce principe, on verra que tous les Problêmes propoſez à réſoudre, n'en ſont qu'une application, ſuivant la difference des cas.

On reconnoîtra auſſi que cette méthode toute ſimple qu'elle eſt, eſt très Geometrique, & la clef de tous les Traits des Enfourchemens des voutes, qui ſont preſque toute la difficulté de l'Art de la coupe des Pierres.

Il ne s'agit donc, 1.° que de couper les ſolides qui ſe pénetrent par des plans paralleles entr'eux, comme par tranches, qui ſont toûjours des ſections ſemblables dans chaque corps, mais differentes de l'un à l'autre.

Secondement, de reconnoître dans chacune de ſes tranches la partie commune aux deux corps; car ſi l'on trace ſur un plan les deux ſections differentes, dans leur diſtance reſpective, on verra qu'elles ſe coupent en deux points de leur contour, qui ſont communs aux deux ſurfaces de ces corps.

Troiſiémement, de ſuivre, je vieux dire lier par des traits les points communs aux deux ſurfaces, paſſant de l'un à l'autre ſur les ſurfaces courbes mêmes, pour avoir la courbe naturelle, ou ſur une ſurface plane, pour en avoir l'imitation produite par la projection, comme nous l'avons expliqué ci-devant.

Or puiſque ſuivant la Geometrie de l'infini, on peut conſiderer les ſolides comme compoſez d'une infinité de tranches paralleles infiniment minces, dans leſquelles les Ordonnées & les abſciſſes des ſections planes,

augmentent ou diminuent dans un rapport connu ; on peut déterminer une infinité de points au contours des Courbes à double courbure, qui ne ſont pas applicables ſur une ſurface plane, ou les aplatir, pour ainſi dire, en les réduiſant par la projection à des courbes planes, ſans y faire d'autre changement, que d'en ſuprimer la troiſiéme dimention ; ce qui eſt néceſſaire pour y parvenir par gradation, comme l'on fera dans tous les Problêmes ſuivans.

On peut rendre la méthode de trouver pluſieurs points des courbes à double courbure plus ou moins aiſée, ſuivant la ſituation que l'on donne aux plans qui coupent les corps en tranches paralleles ; lorſque les axes des Cônes & des Cylindres qui ſe pénetrent, ſont paralleles entr'eux, la ſituation la plus commode des tranches, eſt d'être perpendiculaires à ces axes, perce qu'alors les points communs ne ſont que les interſections de differens cercles : ſi les axes de ces corps ſe coupent à angle Droit, la ſituation des tranches doit être parallele à l'un des deux pour avoir un cercle, & un Parallelograme ou une Hyperbole & un cercle, ou obliquement pour avoir deux Ellipſes qui ſe coupent ; tout cela deviendra plus ſenſible par les exemples des Problêmes ſuivans.

Du Cicloïmbre.

PROBLEME XXXVIII.

Tracer un Cicloïmbre ſur deux Cylindres inégaux, qui ſe pénetrent à angle Droit.

PLA. 17. *Fig.* 187. SOIT [*Fig.* 187.] le Cylindre O L a *b* pénetré par un plus petit T *t*, *u* V, c'eſt-à-dire, d'un plus petit diametre, dont l'axe *x* X tombe perpendiculairement ſur celui du grand C *c* : il faut tracer la courbe qui ſe fait à l'interſection des deux ſurfaces ſur l'un ou l'autre de ces deux Cylindres. Pour y parvenir, il faut commencer par faire la préparation ſuivante.

AYANT fait à part ſur un plan un quart de cercle C A B, dont le Rayon C A ſoit égal à celui du gros Cylindre ; ſur le Rayon C B prolongé, & du point B pour centre, on décrira un autre quart de cercle D E B, dont le Rayon D B ſera égal à celui du petit Cylindre, & parallele à A C : on diviſera l'arc D E en autant de parties égales qu'on voudra, par exemple, en 4 aux points 1, 2, 3, par leſquels on menera hors du quart de cercle D E, des paralleles à A C, & d'autres paralleles à C E comme 1 *i*, 2 *b*, 3 *g*, D *d*, juſqu'à la rencontre de l'arc A *d* B en *d*, *g*, *b*, *i*, par où on menera d'autres paralleles à A C indéfinies. Sur D B prolongée, on prendra *o b* pour une partie du côté du gros Cylindre, & plus grande que le diametre du petit, on la diviſera en deux également au point *m*, duquel on portera

portera de part & d'autre les diſtances DI, DH, DG, DF en *mt*, *m* 1, *m* 2, *m* 3, & par tous ces points *m*, 3, 2, 1, *t*, on tirera des perpendiculaires à *o b*, ſur chacune deſquelles on portera ſucceſſivement & dans l'ordre des diviſions correſpondantes de part & d'autre du point *m*, les diviſions du Rayon CB, ou leurs égales, qui ſont les diſtances de la tangente DB à l'arc A *d* B, ſçavoir D *d* en *m* F, 6 *g* en 3 *q*, 5 *h* en 2 *r*, 4 *i* en 1 *s*, & de même de l'autre côté de *m* tirant vers le point *u*, & l'on aura la projection d'une moitié de la courbe ſolide, qui ſe fait par l'interſection des ſurfaces des deux cylindres, laquelle projection n'eſt pas abſolument néceſſaire, mais très utile pour ſe conduire dans la deſcription de la courbe ſur les ſurfaces convexes ou concaves des cylindres, comme on le verra au IV. Livre.

Cette préparation étant faite, ſi l'on veut décrire le Cicloïmbre, 1.° *ſur le grand Cylindre.*

Ayant tracé une parallele à ſon axe, comme *o b*, on portera les diſtances *m* 3, *m* 2, *m* 1, *mt* d'un côté d'un point *m* pris à volonté, & autant de l'autre vers *u*, & par les points *m*, 3, 2, 1, *t*, &c. on tracera autant de cercles paralleles entr'eux, & perpendiculaires au côté *o b*, ſur leſquels on portera, ſuivant l'ordre des diviſions correſpondantes de l'arc A B de part & d'autre du point *m*, les arcs de cercle, B *d* ſur le cercle repreſenté ici par la ligne droite *m* F, B *g* ſur l'arc 3 *q*, B *h* ſur 2 *r* & B *i* ſur 1 *s*; ce que l'on voit plus diſtinctement dans la Figure 188. où ces arcs ſont deſſinez en perſpective avec des lettres ſemblables à celles de la Figure 187. ſur l'arc A *d* B repreſenté par l'arc a KB, B *g* par *b* G, B *h* par *b* H & B *i* par l'arc *b* I; ce qui donnera ſur les arcs de cercles paralleles, tracez ſur le gros cylindre, les points K, G, H, I, *t*, par leſquels on tracera à la main une courbe qui ſera le cicloïmbre propoſé; on en fera de même pour les autres quarts de cette courbe qui ſont tous égaux entr'eux, & au quart qui en paroit dans la Figure 188.

Ou il faut remarquer que la courbe *t* F *u*, qu'on a tracée dans la Figure 187. eſt celle de l'axe courbe du Cicloïmbre, repreſenté dans la Figure 188. par la ligne courbe *t* Y, qui paſſe par le milieu des cordes de tous les arcs retranchez du gros cylindre.

Secondement, ſi l'on veut tracer le cicloïmbre *ſur le petit Cylindre*, on décrira ſur la ſurface un cercle, dont la projection [*Fig.* 187.] eſt la ligne droite *t m u*, & ayant diviſé ſa circonference en parties égales à celles de l'arc DE, du quart de cercle DEB; on menera par les points de cette diviſion autant de paralleles à ſon axe, leſquelles ſeront perpendiculaires au cercle, ſi le cylindre eſt Droit, comme nous le ſuppoſons, & ſur chacune de ces paralleles repreſentées [*Fig.* 188.] par les lignes *k* K, *g* G,

bH, $1i$, Tt, on portera les longueurs Dd, $6g$, $5b$, $4i$, de la Figure 187. ſuivant leur ordre, & depuis le cercle tracé tmu, qui eſt leur terme commun, leſquelles longueurs raportées quatre fois de ſuite, donneront les points par où paſſe le Cicloïmbre ſur le petit cylindre, par leſquels on tracera la courbe à la main, *ce qu'il falloit faire.*

DEMONSTRATION.

LA raiſon de cette operation ſe déduit facilement de notre Problême general; car ſi l'on ſuppoſe le grand cylindre coupé par pluſieurs tranches paralleles entr'elles, & perpendiculaires à ſon axe, ces tranches ſeront toutes renfermées entre deux cercles; mais le même plan qui coupe chaque tranche du grand, étant auſſi ſuppoſé couper le petit cylindre parallelement à ſon axe, ſera des tranches compriſes entre deux Parallelogrames inégaux, dont l'un ſera plus large que l'autre; de ſorte qu'on a une ſuite de cercles égaux coupez par des Parallelogrames inégaux, dont les rapports des côtez ſont exprimez par les lignes tangentes BD, B6, B5, B4, par leſquelles les autres côtez qui traverſent ceux-ci à angle Droit, ſont exprimez par les lignes Dd, $6g$, $5b$, $4i$, dont les plus éloignez du point B, qui eſt ſur l'axe du petit cylindre, ſont coupez plus loin de la tangente DB par l'arc AdB, ſuivant l'ordre des ſinus verſes des arcs Bd, Bg, Bb, Bi, comme nous l'avons dit au Theoreme XVIII. *ce qu'il falloit faire.*

USAGE

CE Problême eſt la baſe de la pratique des Traits de la coupe des Pierres, où il s'agit de trouver les arêtes des enfourchemens des Berceaux inégaux qui ſe croiſent à angle Droit, dont nous avons fait un petit détail à l'application du Theoreme cité.

ON peut même y comprendre ceux qui ſe croiſent obliquement, dont la difference du Trait n'eſt qu'une modification de cette pratique, comme on le va voir au Problême ſuivant.

PROBLEME XXXIX.

Tracer une Elipſimbre formée par la ſection d'une Sphère pénetrée par un Cylindre, dont l'Axe ne paſſe pas par le centre de la Sphère.

Fig. 189. SOIT [*Fig.* 189.] une ſphère ou une portion de ſphère ARBt, dont le centre eſt C, pénetrée par un cylindre DEFG, qui entre dans la ſphère de tout ſon contour; on la diviſera ſuivant le Probléme general par tranches paralleles entr'elles, & perpendiculaires à l'axe du cylindre, par des lignes droites $1r$, $2i$, $3t$, qui repreſenteront les plans coupans

Digitized by Google

ces deux corps, leſquels feront toûjours pour ſections deux cercles, dont on aura les Rayons ſur ces lignes; ſi on les conſidere comme les interſections d'un plan paſſant par l'axe du cylindre, & de ces plans qui lui ſont perpendiculaires; on prendra donc le Rayon du cylindre D X, & des points *f*, *e*, *d*, interſections de l'axe X*x* du cylindre, & des perpendiculaires à cet axe 1*f*, 2*e*, 3*d* priſes à volonté, & en auſſi grands nombres que l'on voudra avoir de points pour centres, on décrira des arcs ou des demi-cercles 1, 4, *o*; 2, 5, *p*; 3, 6, *q*, & des points X, *b*, *g*, *i* pour centres pris au milieu des cordes de la ſphère R*r*, S*s*, T*t*, on décrira d'autres demi-cercles, qui couperont les précedens aux points 4, 5, 6, par leſquels on abaiſſera des perpendiculaires ſur les lignes 1*r*, 2*s*, 3*t*, qui les couperont aux points *n*, *m*, *l*, leſquels donneront la projection des points de la Courbe à double courbure, que j'appelle Ellipſimbre, par leſquels on tracera la ligne A, *l*, *m*, *n*, B, qui ſera ſon axe courbe.

Cette préparation étant faite, 1.° ſi l'on veut tracer l'Ellipſimbre ſur le cylindre; après avoir tracé une parallele à ſon axe, par exemple A D, on portera ſur cette ligne les intervales des diviſions qui ont été priſes à volonté A 3, A 2, A 1, par leſquelles on tracera autant de cercles paralleles entr'eux, & perpendiculaires à l'axe du cylindre, que nous ſuppoſons Droit; enſuite on portera de part & d'autre de la ligne A D tracée à la ſurface du cylindre, les arcs des cercles déterminez par l'interſection de ceux de la ſphère; ſçavoir l'arc 1, 4 ſur le premier cercle, l'arc 2, 5 ſur le ſecond, & 3, 6 ſur le troiſiéme, & par les points A, 6, 5, 4, B, on tracera à la main une moitié de l'Ellipſimbre, & l'autre de l'autre côté également, ce que la Figure 189. ne peut exprimer, parce que les demi-cercles 1, 4, *o*; 2, 5, *p*; 3, 6, *q* doivent être relevez par l'imagination en l'air, perpendiculairement au plan de la ſection par l'axe du cylindre, & qu'ils ne repreſentent encore qu'une moitié de la courbe, l'autre étant de l'autre côté de la ligne A D ſur le cylindre.

Secondement, ſi l'on veut tracer l'Ellipſimbre ſur la ſurface de la ſphère; au lieu de la ligne A D que nous avons priſe pour milieu des arcs, dont la Figure nous donne les moitiez, on tracera ſur la ſphère un cercle majeur * paſſant par les points A & B, ſur lequel on portera les intervales des diviſions faites par les paralleles 1*r*, 2*s*, 3*t* qui ſont les arcs A T, A S, A R, A B, par leſquels on décrira autant de cercles paralleles entr'eux, & perpendiculaires au majeur, & l'on portera de part & d'autre de ce cercle majeur les arcs des cercles mineurs déterminez par l'interſection des demi-cercles du cylindre, qui ſont dans les plans correſpondans, ainſi l'on portera ſur le premier l'arc R 4, ſur le ſecond l'arc S 5, ſur le troiſiéme l'arc T 6, & l'on aura ſur la ſurface de la ſphère les points A, 6, 5, 4, B, par leſquels

* Prob. XXX.

on tracera à la main une courbe qui ſera l'Ellipſimbre propoſée: on en fera autant de l'autre côté de l'arc ARB, ſur la ſurface de la ſphère, pour l'autre moitié de l'Ellipſimbre.

On peut encore tracer cette courbe ſur le cylindre & ſur la ſphère d'une autre maniere.

Premierement, ſur le cylindre on peut tracer une Ellipſe par les points A & B [par le Probl. XXXVI.] & ayant pris ſur cette Ellipſe les arcs correſpondans aux parties de l'axe Az, AY, de la projection on fera paſſer par les points z & Y des paralleles à l'axe du cylindre, ſur leſquelles on portera les longueurs Z*l*, Y*m* de la projection, leſquelles donneront les points *l*, *m* & *n* qui ſeront à la circonférence de l'Ellipſimbre, mais cette maniere eſt plus longue. On traceroit de même ſur la ſphère un cercle majeur AB, d'où, comme terme, on porteroit les arcs correſpondans aux longueurs *l*Z, *m*Y, pour avoir les points *l*, *m* & *n*; mais cette maniere qui ſeroit plus longue, ſeroit moins correcte dans l'exécution: on ne la propoſe ici que comme une idée des differens moyens qu'on peut employer pour parvenir à la même fin.

Demonstration.

La raiſon de la premiere conſtruction eſt toûjours fondée ſur le Theoreme general de la diviſion des corps en tranches paralleles, par le moyen deſquelles on a pluſieurs interſections des cercles inégaux de la ſphère & du cylindre, dans leſquelles ſont les points de la rencontre des deux ſurfaces, & par conſéquent de l'Ellipſimbre, car quoique l'on ait tracé ces differens cercles ſur le plan de la Figure, qui eſt celui qui paſſe par l'axe du cylindre, il faut les redreſſer par l'imagination perpendiculairement à ce plan; ce qui ne change rien à leur diſtance rélative au plan tangent ſuppoſé ſur la ligne AD du cylindre, puiſque les lignes 4*n*, 5*m*, 6*l* lui ſont paralleles, comme elles le ſont auſſi à l'axe de la ſphère CP: & puiſque la courbe doit toûjours avoir des points communs aux deux ſurfaces, il ſuit qu'elle paſſera par les interſections des courbes formées par le plan qui coupe les deux corps, *ce qu'il falloit trouver.*

On parviendra auſſi à la même deſcription, ſi au lieu de faire les tranches perpendiculaires à l'axe du cylindre, on les lui fait paralleles, alors les points de la courbe ſe trouveront à l'intention de cercles de la ſphère, & des Parallelogrames du cylindre, c'eſt toûjours le même principe differemment appliqué.

Si le cylindre n'étoit pas Droit, mais ſcalene, il arriveroit du changement pour les Figures des ſections, car ſuppoſant les tranches perpendiculaires à ſon axe, elles ſeroient circulaires dans la ſphère, & Elliptiques

Digitized by Google

dans le Cylindre, & elles n'y ſeroient circulaires, que lorſque les tranches ſeroient obliques à l'axe, & paralleles à la baſe, ou bien faiſant une ſection ſous-contraire ; ce qu'il eſt aiſé de ſe repreſenter & de concevoir ſans le ſecours d'une Figure : cependant pour aider l'imagination, on peut s'exercer ſur une boule & un cylindre en relief coupé, c'eſt-à-dire, taillé avec de la craye, ou autre matiere tendre.

L'usage de ce Problême eſt indiqué au Theoreme X. pour les enfourchemens des Lunettes pratiquées dans une Voute ſphérique.

Probleme XL.

Les diametres des deux Cylindres inégaux qui ſe pénetrent, & l'inclinaiſon de leurs Axes qui ſe rencontrent étant donnez, tracer l'Ellipſimbre formée par la rencontre de leurs Surfaces.

La conſtruction de ce Problême eſt ſi ſemblable à celle du penultiéme, que la ſeule inſpection de la Figure 190. en fera voir la difference, qui ne conſiſte que dans la préparation, ou au lieu de deux quarts de cercles, il faut faire deux quarts d'Ellipſes, au lieu de les placer à angle droit ſur le côté du grand cylindre, il faut donner à leurs axes l'inclinaiſon qu'ils doivent avoir ſur ce côté.

Soit cependant pour une plus ample explication [*Fig.* 190.] la moitié du grand cylindre QB pénetré par un plus petit T *m*, dont l'axe X *x* fait avec l'axe *c* C du grand, l'angle X *x c* ; on prendra la ligne B C pour moitié du grand axe d'une Ellipſe, & le Rayon *e* C du demi diametre du grand cylindre pour moitié du petit axe, on décrira ſur un plan à part le quart d'Ellipſe N D E, dont le centre ſera C ; enſuite ayant prolongé la moitié du grand axe C N juſqu'en M, en ſorte que N M ſoit égale à *b m*, priſe pour moitié du grand axe d'un autre quart d'Ellipſe ; on prendra pour moitié du petit axe la ligne N H égale au demi diametre de la baſe T V du petit Cylindre, & l'on décrira le quart d'Ellipſe H 2 1 M ; enſuite ayant tiré par H la ligne D L parallele à C M, on diviſera le quart d'Ellipſe H M en autant de parties égales qu'on voudra ; par exemple, ici en trois, aux points 2. & 1. par leſquelles on menera 1 G, 2 F, paralleles à C M, & M L, 1 K, 2 I, paralleles à H N : cette préparation étant faite, on diviſera la circonference du petit cylindre T *m* en quatre, & le quart en autant de parties égales que celui de l'Ellipſe H M, par exemple, ici en douze, puiſque le quart H M eſt diviſé en trois : 1.° Si l'on veut avoir la projection de cette diviſion ſur la ligne A *m*, on fera *b i* = H I, *b k* = H K, & *b m* = H L, ou N M : enſuite on menera par ces points *b*, *i*, *k*, des paralleles à l'axe X *x* du petit cylindre, prolongées au delà des points *b*, *i*, *k*, ſur leſquelles on portera les diſtances de la tangente *Fig.* 190.

Digitized by Google

HN au quart d'Ellipſe EDN, ſçavoir, HD en *bd*, PF en *pf*, & *if*; OG en *og*, & K*g*, & par les points A, *g*, *f*, *d*, *f*, *g*, *m*, on tracera la Courbe qui repreſente l'axe courbé de l'Ellipſimbre, ou la projection de ſon contour.

2.° Presentement ſi l'on veut tracer l'Ellipſimbre ſur le petit cylindre *t* & *m*, on tracera une Ellipſe ſur la ſurface, dont la circonference coupera les paralleles R*g*, S*f*, L*d*, &c. aux points *o*, *p*, *b*, *i*, K, de chacun deſquels comme d'un terme, on portera les diſtances H*d* en *bd*, *p*F en *if* & *pf*, OG en *og* & en K*g*, & ainſi de même de l'autre côté du cylindre, & par les points trouvez ſur les paralleles à l'axe du cylindre, on tracera à la main la courbe qui ſera l'Ellipſimbre propoſée.

3.° Si l'on veut tracer cette courbe ſur le grand cylindre QB, ayant tracé une ligne AB parallele à ſon axe C*c*, on prendra à volonté un point *b* pour celui du milieu, de la ſection duquel on portera de part & d'autre les diſtances HI, HK, HL, pour avoir ſur cette ligne A*m* les points *o*, *p*, *b*, *i*, K, par leſquels on tracera par le Problême XXXVI. autant d'Ellipſes paralleles entr'elles, ſuivant l'inclinaiſon donnée A*bd*; enſuite on portera de part & d'autre de la ligne A*m* ſur chacune de ces Ellipſes, les arcs correſpondans du quart d'Ellipſe EDN, ſçavoir, ND ſur *bd*, NF ſur *pf* & *if*, NG ſur *og* & K*g*, & par les points *g*, *f*, *d*, *f*, *g*, qui terminent les arcs des Ellipſes tracées ſur le cylindre, on fera paſſer une ligne courbe de chaque côté de la ligne A*m*, qui ſera l'Ellipſimbre propoſée.

Demonstration.

La raiſon de cette conſtruction eſt toûjours déduite du même Problême general que les précedentes. On coupe les deux corps par tranches paralleles qui ſont dans le petit Cylindre des Parallelogrames, parce que les plans coupans, ſont paralleles à ſon axe, & dans le grand cylindre les ſections des mêmes plans ſont des Ellipſes; or parce que toutes ces Ellipſes ſont égales, elles ſont repreſentées par le quart d'Ellipſe EDN, qui a été fait dans la préparation; & parce que tous les Parallelogrames ſont inégaux, on a exprimé la moitié de leurs côtez par les lignes HI, HK, HL qui ſont les diſtances des points 1, 2, H, par leſquels paſſent es plans qui coupent le petit cylindre; car ſi l'on releve par la penſée le quart d'Ellipſe H2 1M à angle aigu ſur le plan de l'Ellipſe EDN, en ſorte que les demi-axes CN & NM faſſent un angle égal à l'angle *x*, *b*, *m*, c'eſt-à-dire, dans la Figure, que NM ſoit poſée ſur NA; il eſt clair que la projection de la ligne HN ſe réduira à un point N, placé au milieu du petit cylindre, comme eſt le point *b*, la projection du point 2. ſe fera ſur NA à une diſtance égale à HI qui eſt, par la con-

ſtruction, *bi* pour un côté, & *bp* pour l'autre, & tout le quart d'Ellipſe M 1 2 H ſera dans un plan tangent au grand Cylindre QB, ſuivant la ligne *b m*, partie de ſon côté A*m*, & les intervales des diviſions H, 2, 1, M à l'Ellipſe qui eſt la ſection du même plan dans le Cylindre, ſeront exprimez par les lignes H D, *p* F, *o* G, qui ſont perpendiculaires à la tangente H N, & paſalleles à l'axe N C, leſquelles diſtances ſont entr'elles comme les ſinus verſes, ou les fleches du double des arcs D N, F N, G N, leſquelles ſont encore entr'elles comme les ſinus verſes des arcs de cercle correſpondans à la baſe du Cylindre, comme nous l'avons démontré ailleurs; ce que nous avons repreſenté à la Figure 191. qui eſt la vûë de la précedente par le bout du gros Cylindre, comme il ſera facile de reconnoître par les mêmes Lettres placées aux points correſpondans, mais doubles, parce qu'elle fait voir les deux côtez, & par conſéquent les Parallelogrames des ſections du petit Cylindre; mais par la conſtruction les longueurs de ces fleches, ou ce qui eſt la même choſe, des longueurs qui leur ſont égales, ont été portées de *b* en *d*, de *i* en *f*, &c. donc la courbe *t d m* eſt l'axe courbe de l'Ellipſimbre, & marque ſa profondeur dans le Cylindre QB, & parce que l'on a porté les intervales des arcs de l'Ellipſe D E, qui eſt égale à toutes les autres ſections, paralleles ſur chacune des ſections correſpondantes; on aura la rencontre des Parallelogrames du petit Cylindre avec les Ellipſes du grand, où ſont les points communs à leurs deux ſurfaces; donc ils ſont à la circonference de l'Ellipſimbre, & cette Courbe paſſera par tous ceux qui ont été ainſi déterminez, *ce qu'il falloit faire.*

L'usage de ce Problême a été indiqué au Theoreme XIX. il ſert pour les enfourchemens des Berceaux, ou parties de Berceaux ſurhauſſez ou ſurbaiſſez, ou qui ſont biais, c'eſt-à-dire, inclinez entr'eux, ſuppoſant que leurs axes ſe rencontrent.

Probleme XLI.

Les Diametres de deux Cylindres qui ſe pénetrent de toute leur circonference ſans que leurs Axes ſe rencontrent, & l'inclinaiſon de leurs côtez entr'eux, étant donnée, tracer l'Ellipſimbre formée par la rencontre de leurs Surfaces.

La Figure 192. eſt faite pour mettre ſous les yeux la difference de ce Problême avec le précedent, qui ne conſiſte qu'en ce que les axes des Cylindres ne ſe rencontrent pas, & la Figure 193. pour la conſtruction. Fig. 192. 193.

On peut diſtinguer deux cas dans cette propoſition; le premier, lorſque le petit Cylindre tombe perpendiculairement ſur le côté du grand, c'eſt-à-dire, ſur des lignes paralleles à ſon axe; le ſecond, lorſque les lignes paralleles à l'axe du petit Cylindre, tombent obliquement ſur cel-

Digitized by Google

les qui ſont auſſi paralleles à l'axe du grand Cylindre. Si leurs côtez ſont perpendiculaires entr'eux, on fera pour la préparation des quarts de cercles ou demi-cercles égaux à leurs baſes, comme on a fait au Problême XXXVIII. pour le Cicloïmbre, & ſi leurs côtez ſont obliques, on fera pour la préparation des demi-Ellipſes & quarts d'Ellipſes, comme à la Figure 193.

Soit E a *b* D un quart d'Ellipſe de la ſection oblique d'un plan coupant le Cylindre D E G F, parallelement à l'axe du petit Cylindre qui pénetrent le grand, comme on voit à la Figure 192. ſoit auſſi K H *b* la moitié de l'Ellipſe faite dans le petit Cylindre par la ſection d'un plan tangent au grand; on diviſera à volonté ſa circonference aux points 1, 2, 3, 4, & par ces diviſions on menera des paralleles à l'axe H *x*, qui coupe le quart d'Ellipſe du grand Cylindre en *m* & *x*, plus ou moins loin du centre C, par où paſſe l'axe du grand Cylindre: ſuppoſant que la poſition du petit dans le grand Cylindre eſt donnée en a *b* G F, ces lignes 1 O, 2 N, *m* M, 3 *n*, 4 *o*, étant prolongées vers le quart d'Ellipſe E *a b* D, le rencontreront aux points 1, 2, *m*, 3, 4; on menera auſſi par le point H la ligne H *d*, parallele au diametre K *b*, de même que 3 *e* & 4 *f*, qui rencontrent le côté du Cylindre G *b* prolongé en *d* aux points *e* & *f*, cette préparation étant faite.

Fig. 194. Pour décrire l'Ellipſimbre ſur la ſurface du grand Cylindre D E G F, on commencera par tirer une ligne *d d* parallele à ſon axe par le Problême XXXI. ſur laquelle ayant pris le point M pour le milieu de la ſection, on prendra de part & d'autre de ce point, ſur la ligne *d d*, les diſtances *b f* de la Figure 193. de la préparation que l'on portera en M *f*, *b e* que l'on portera en M *e*, & *b d* que l'on portera en M *d*, auſſi de part & d'autre du point M: enſuite on fera paſſer par tous ces points des Ellipſes qu'on tracera ſur la ſurface du grand Cylindre, ſuivant l'angle de l'inclinaiſon du côté du petit Cylindre ſur le grand, par exemple, I K L [*Fig.* 192.] ou des cercles, ſi le petit Cylindre tombe à angle Droit ſur les côtez du grand.

Sur chacun de ces cercles ou Ellipſes, on portera de part & d'autre de la ligne *d d*, les arcs de cercles ou d'Ellipſe déterminez par les paralleles à l'axe du petit Cylindre, qui paſſent par les diviſions de la ſection Elliptique, ſçavoir *m* a de la Fig. de la préparation ſur M A, & *m b* ſur M B, l'arc *m* 1 en *f* 1 d'un côté & de l'autre du milieu M, & l'arc *m* 4 ſur *f* 4 auſſi de part & d'autre; enfin l'arc *m* 2 ſur *e* 2, & *m* 3 ſur *e* 3, & par les points *d*, 3, 4, B, 4, 3, *d*, 2, 1, A, 1, 2, on fera paſſer une courbe qui ſera l'Ellipſimbre propoſée ſur la ſurface du gros Cylindre.

Pour tracer cette courbe ſur le petit Cylindre, on fera la même choſe qu'au

qu'au Problême précedent; ce qu'il eſt inutile de répeter, la ſeule difficulté qu'il y aura, c'eſt qu'ici les deux côtez de la Courbe n'étant pas égaux, le quart du petit Cylindre ne ſuffit pas pour donner les points des quatre parts, comme aux Figures 187. & 190. il faut avoir toutes les diſtances d'une moitié de la courbe à la tangente K*b*: ainſi ayant décrit une Ellipſe autour du petit Cylindre, telle que la feroit la ſection d'un plan tangent au grand, on la diviſera en deux depuis le point d'attouchement repreſenté dans la préparation par le point *b*, & ayant diviſé ſa demi-circonference en parties égales à celles de la demi-Ellipſe *b*HK, ſçavoir *b*4, 43, 3H, &c. on menera par chacune de ſes diviſions des paralleles à l'axe du petit Cylindre, ſur leſquelles on portera ſucceſſivement d'un côté & d'autre les diſtances de la tangente K*b* à l'arc de l'Ellipſe *ab*; ſçavoir, *o*4, *n*3, M*m*, *n*2, *o*1, Ka, leſquelles donneront des points par leſquels on tracera l'Ellipſimbre propoſée.

Si l'on vouloit avoir la projection de cette courbe ſur un plan, au lieu des arcs que l'on a tracé dans la Figure 194. en maniere de perſpective ſur le grand Cylindre, il faudroit en prendre les cordes ou demi-cordes & la conſtruction, à cela près, ſeroit toûjours la même.

Demonstration.

Cette conſtruction émane du même principe que les précedentes. On ſuppoſe les deux Cylindres coupez en tranches par des plans paralleles entr'eux, & à l'axe du petit Cylindre, dans lequel ils font pour ſection des Parallelogrames, dont les intervales ſont marquez par ceux des lignes 4*f*, 3*e*, H*d* qui dépendent de la diviſion qu'on a voulu faire du contour du petit Cylindre, pris ſur un cercle, s'il eſt perpendiculaire au côté du grand, ou ſur une Ellipſe, s'il eſt oblique, comme dans le cas preſent, parce qu'on ſuppoſe ce petit Cylindre coupé par un plan tangent au grand, afin d'avoir un terme d'où l'on puiſſe compter de combien chaque ligne parallele à l'axe s'avance au deſſous de ce plan, pour atteindre à la ſurface du grand Cylindre; c'eſt-à-dire, à la Courbe que ce plan fait dans ce grand Cylindre; or cette courbe eſt un cercle, lorſque le petit Cylindre eſt perpendiculaire au côté du grand, & une Ellipſe, lorſqu'il lui eſt oblique, & parce que tous les plans des tranches ſont paralleles, toutes les Ellipſes qu'ils font ſont auſſi égales entr'elles, de ſorte que dans la préparation, on fait ſervir une Ellipſe pour toutes, ainſi l'Ellipſe E*a b* repreſente celle qui eſt faite par le plan paſſant par les points 2 3*e*, par 1 4*f* & K*b*; or dans chaque interſection des Parallelogrames du petit Cylindre & des Ellipſes du grand, il n'y a que deux points communs, ſçavoir, *ab* pour celle du milieu, 1, 4, pour l'interſection de la tranche ſuivante, & 2, 3, pour la troiſiéme, leſquelles étant eſpacées

de part & d'autre de la ligne AB, donnent les points du contour de l'Ellipſimbre, *qu'il falloit trouver.*

L'usage de ce Problême a été indiqué au Theoreme XX.

Probleme XLII.

La poſition d'un Cylindre dans un Cône qu'il pénetre, étant donnée, décrire l'Ellipſimbre formée par la rencontre de leurs Surfaces.

Fig. 195. Ce Problême comprend pluſieurs cas qui peuvent tous ſe réſoudre de la même maniere; car 1.° ou les axes du Cylindre & du Cône ſont paralleles entr'eux, 2.° ou ils ſe coupent, 3.° ou perpendiculairement ou obliquement, 4.° ou ils ne ſont pas paralleles, & ne ſe coupent pas, 5.° & alors l'axe du Cylindre eſt perpendiculaire au plan paſſant par l'axe du Cône, 6.° ou il lui eſt incliné, 7.° ou il n'entre pas totalement dans ce plan, lorſqu'il lui eſt perpendiculaire, 8.° ou il n'y entre pas auſſi, lorſqu'il lui eſt incliné.

Tous ces differens cas ſe peuvent réſoudre par la même pratique qui a été expliquée au Problême general, en coupant le Cône & le Cylindre en pluſieurs tranches par des plans paralleles entr'eux, dont la ſituation à l'égard des axes du Cône & du Cylindre eſt arbitraire: il y a cependant en cela du choix pour la commodité de l'exécution; car il convient de les ſituer de maniere qu'ils donnent toûjours les ſections les plus ſimples, nous les avons mis dans la Figure 195. perpendiculairement à l'axe du Cône, pour avoir l'interſection de deux cercles, l'un dans le Cône, l'autre dans le Cylindre, lorſque les axes SC & Xx ſont paralleles entr'eux; ſi l'on avoit diſpoſé les tranches parallelement aux axes, on auroit eu pour interſection celle d'un Parallelograme, & d'une Hyperbole qui eſt moins facile à tracer que le cercle.

Si les axes ſont inclinez entr'eux comme SC & Q*q*, le plan *y*G coupant les deux corps, donnera dans le Cône un cercle, & dans le Cylindre une Ellipſe, dont *y*K ſera la moitié du grand axe, & le diametre de la baſe du Cylindre le petit axe; ainſi il ne s'agit que de décrire cette Ellipſe, & la couper par un cercle qui ait pour Rayon 1*i*, & parce que toutes les Ellipſes qui ſeront faites par les ſections des autres plans paralleles à *yy* ſont égales; on peut ne décrire qu'une Ellipſe, & la couper par les cercles inégaux, qui ſeront les ſections des plans paralleles dans le Cône, en mettant leurs centres dans la diſtance où ils doivent être de celui de l'Ellipſe; par ce moyen on aura une ſuite d'arcs de cercles & d'Ellipſes, leſquels étant tranſportez ſur les ſurfaces du Cône & du Cylindre, comme nous l'avons dit aux Problémes précedens, donneront autant de points à la circonference de l'Ellipſimbre, qu'on voudra mul-

Digitized by Google

tiplier le nombre des tranches par des ſections paralleles, cela eſt clair après les exemples des Problémes précedens; cependant pour ne pas devenir obſcur en voulant être concis, nous en feront l'application à la pratique.

Soient, pour le premier cas où les axes ſont paralleles, les plans *y* G, Y *n* paralleles entr'eux, & perpendiculaires aux axes SC du Cône, & X *x* du Cylindre; du point I pour centre & pour Rayon 1 *i*, on décrira un quart de cercle 1 *di*, & du point H pour centre, & pour Rayon le demi diametre HG du Cylindre, on décrira un autre quart de cercle qui coupera le précedent au point Z, duquel ſi on abaiſſe une perpendiculaire ſur *y* G, on aura le point ς pour projection du point Z, & un de ceux de l'axe courbe *b* ς *a* de l'Ellipſimbre; on trouvera de même un autre point *f* de cet axe par l'interſection des deux cercles *oem* du Cône, & N *zn* du Cylindre; cette préparation étant faite. *Fig.* 195.

Pour tracer l'Ellipſimbre ſur le Cône, ayant tiré du ſommet S une ligne à ſa baſe, qu'on prendra pour le milieu de l'Ellipſimbre, on placera ſur cette ligne les points *b a* de ſes deux extremitez dans leur diſtance du ſommet S, & enſuite les points *i* & *m*, par leſquels on fera paſſer deux cercles, ſur leſquels on portera de part & d'autre de la ligne droite les arcs *i* Z & *mz*, qui donneront les points *z* & Z, par leſquels on fera paſſer à la main la courbe qui ſera l'Ellipſimbre demandée; on n'a pas fait de Figure pour cette tranſpoſition des arcs trouvez, parce qu'elle eſt à peu près la même qu'à la Figure 182. ou 185. de la Planche 16.

Pour le ſecond cas où l'axe du Cylindre tombe obliquement ſur celui du Cône, on agira de même qu'au précedent, excepté que ſur le Cylindre AVTB, où il ſe fait des Ellipſes par la ſection oblique des plans *y* G, Y *n*, on tracera des Ellipſes égales qui auront pour grand axe la ligne *yy* ou YY, & pour petit axe le demi diametre de la baſe VT du Cylindre; ainſi le point P, qui eſt à la rencontre des deux ſurfaces ſe trouvera par l'interſection du cercle du Cône, dont 1 I ſera le Rayon, & de l'Ellipſe *y* P *y*; de même que le point O par l'interſection du cercle du Cône qui a pour Rayon 2 L, & de l'Ellipſe YOY.

Si des points O & P, on abaiſſe les perpendiculaires O *o* & P *p* ſur les lignes *y* G, Y *n*, on aura les points *p* & *o*, qui ſeront la projection des rencontres des ſurfaces O & P, & ſur l'axe courbe de l'Ellipſimbre, qui ſera courbe B *po* A; cette préparation étant faite.

Si l'on veut tracer l'Ellipſimbre ſur le Cône, on tirera par ſon ſommet une ligne droite, ſur laquelle ayant placé les points B & A ſommets de la courbe, on y marquera auſſi les points I & L, par où on fera paſſer

Digitized by Google

des cercles, ſur leſquels on prendra de part & d'autre de la droite du milieu les arcs IP, LO, & l'on aura les points P & O, par leſquels & par le point A & B on tracera à la main l'Ellipſimbre demandée, comme au cas précedent.

Pour tracer la même courbe ſur le Cylindre, on commencera par tracer IN parallele à ſon axe, ſur laquelle on portera les points *b* & *a* pour les extremitez de la courbe, & les points *g* & N dans leur diſtance à ces points; on fera paſſer par les points *g*, N & *a* des cercles paralleles à ſa baſe pour le premier cas, & des Ellipſes pour le ſecond cas, & l'on portera ſur ces cercles les arcs *gz*, NZ pour le premier, & *y*P & YO pour le ſecond, pour les points a ou A on prendra la demi-circonference pour avoir les points *bz*, Za d'un côté de la parallele à l'axe, & autant de l'autre, ou B*p*OA d'un côté, & de même de l'autre de la ligne qui paſſe par le ſommet du Cône & le milieu de la ſection; par ces points ainſi trouvez on tracera l'Ellipſimbre demandée.

Mais ſi le Cylindre étoit perpendiculaire au plan du triangle par l'axe du Cône, on ne pourroit plus faire uſage de la même conſtruction, parce que les plans coupans le Cône perpendiculairement à ſon axe, couperoient le Cylindre parallelement à ſon axe, & y feroient pour ſection des Parallelogrames, dont les côtez ne détermineroient point la rencontre des deux ſurfaces, alors il faut avoir recours aux tangentes des ſections du Cône.

Fig. 196. Soit donc [*Fig.* 196.] le Cylindre DO*p d* qui eſt perpendiculaire à l'axe SC du Cône, lequel eſt coupé par un plan paſſant par l'axe X*m* du Cylindre, & SC du Cône; on coupera l'un & l'autre de ces corps par des lignes H*n*, F*m*, IN qui donneront ſur l'axe S*c* les points *n*, *m*, N, deſquels comme centres & pour Rayons *ng*, *m*M, N*k*, on décrira des arcs de cercle *gy*, M*z*, K*x*, auſquels on tirera les tangentes *gh*, M*f*, *ki* égales aux Ordonnées de la baſe du Cylindre GH, XF, KI, & par les points *h*, *f*, *i*, on menera des paralleles à l'axe du Cylindre, juſqu'à la rencontre des arcs comme *hy*, *fz*, *ix*, leſquelles ſerviront à tracer la courbe, comme nous le dirons ci-après.

Ayant tracé ſur le Cylindre une Ellipſe par les points donnez E & L
Fig. 199. par le Problême XXXIV. comme *e*, *h*, *f*, *il*, *Fig.* 199. on menera par les points *h f i* donnez à la circonference de cette Ellipſe des paralleles à ſon axe G*y*, F*z*, I*x*, ſur leſquelles on portera les longueurs trouvées *hy*, *fz*, *ix*, qui donneront ſur ces paralleles les points *y*, *z* & *x*, par leſquels & par les points *e* & *l* on tracera à la main une courbe, qui ſera celle qu'on demande.

Si l'on veut tracer la même Ellipſimbre ſur le Cône, dont le triangle

Digitized by Google

SBA de la Figure 196. eſt la ſection par l'axe, on operera comme aux cas précedens; ainſi ſuppoſant celui de la Figure 197. qui eſt plus petit faute de place dans la Planche, égal à celui de la Figure 196. on commencera par tirer du ſommet S à la baſe une ligne droite quelconque SB, ſur laquelle on portera les diſtances SE, S*g*, SM, S*k*, SL de la Figure 196. & ayant tracé ſur la ſurface de ce Cône des cercles paſſans par les points *g*, *m*, *k*, on prendra de part & d'autre de ces points, les arcs *gy*, M*z*, *kx*, de la Figure 196. qu'on portera de part & d'autre de la ligne SB, & l'on aura des points *eyzxlxzye*, par leſquels on tracera à la main la courbe propoſée, ſuppoſant comme je viens de le dire, un rapport entre les Figures 196. & 197. qu'on n'a pû obſerver faute de place; mais comme il ne s'agit ici que d'une explication, on peut ſuppoſer égales des Figures inégales. *Fig.* 197.

Lorsque le Cylindre qui pénetre le Cône eſt perpendiculaire à ſon triangle par l'axe, & que les axes ne ſe rencontrent pas, les tangentes aux arcs de cercle des ſections faites par les plans coupans les Cônes par tranches paralleles, ne ſont pas égales de part & d'autre des côtez du Cylindre prolongez comme dans le cas précedent; c'eſt pourquoi il faut diſpoſer la Figure comme à celle de 200. *Fig.* 200.

Ayant placé le centre C de la baſe du Cylindre, par lequel paſſe l'axe qui tombe perpendiculairement au triangle BSA par l'axe du Cône; on décrira de ce centre un cercle *or*DRO que l'on coupera auſſi bien que le Cône par des plans paralleles entr'eux, & à l'axe du Cylindre & perpendiculaires à celui du Cône, leſquels plans ſont repreſentez par les lignes 1, 4, 2, 5, 3, 6, qui coupent le cercle de la baſe du Cylindre aux points *o r*, *d*D, OR, par leſquels on tirera à ces lignes des perpendiculaires indéfinies *o*T, RG, *d*E, DF; enſuite ayant décrit des demi-cercles 1*b*4, 2F5, 3G6, on leur menera des tangentes L*b*, EF, TG paralleles à leurs diametres 14, 25, 36, leſquelles détermineront les longueurs des côtez du Cylindre hors du Cône, pour les paralleles à l'axe qui paſſent par les points *o d* O, *r*DR; ainſi le côté du Cylindre qui paſſe par le point *d* ſort du Cône de la longueur *y*E, celui qui paſſe par le point O ſort du Cône de l'intervale *x*T, & ainſi des autres; & parce que les points G & F ſont très près du point d'attouchement des tangentes, ils ſortent très peu du Cône.

Presentement pour tracer cette courbe ſur le Cylindre, on operera de même qu'à la Figure 199. excepté qu'en celle-là nous avons ſuppoſé les diſtances de l'Ellipſe qui coupe le Cylindre égales, de part & d'autre de ſon axe, & qu'ici elles ſont inégales.

Pour tracer la même courbe ſur le Cône, on ſuivra auſſi la même mé-

thode qu'à la Figure 197. excepté que l'on ne portera pas les meſures des arcs paralleles ſur les deux côtez de la ligne SB, mais tous d'un côté.

Ou bien on tracera ſur le Cône une Hyperbole HY tangente au cercle de la baſe du Cylindre, pour ſervir de terme, d'où on meſurera les arcs qui coupent les côtez du Cylindre; car les points de la courbe ſeront toûjours dans l'interſection des cercles des tranches du Cône paralleles à la baſe, & des côtez du Cylindre paralleles à ſon axe.

La même operation ſert pour les cas où le Cylindre n'entre dans le Cône que d'une partie de la circonferance, comme on le voit dans la
Fig. 200. même Figure 200. au cercle D*g* 6.

Secondement, ſi au lieu de faire les tranches paralleles par des plans perpendiculaires à l'axe du Cône, on veut les faire paralleles à l'axe du Cylindre, la ſolution du Problême ſera également Geometrique, mais un peu plus difficile; parce qu'au lieu de cercles dans le Cône, on aura pour ſection des Ellipſes, des Paraboles ou des Hyperboles, ſuivant l'inclinaiſon de l'axe du Cylindre à celui du Cône; mais auſſi on n'aura dans le Cylindre que des Parallelogrames.

Afin qu'on puiſſe choiſir la maniere qui convient le mieux, nous allons donner un exemple de la courbe formée par la pénetration d'un Cylindre à l'axe du Cône.

Fig. 201. Soit [*Fig.* 201.] le triangle par l'axe du Cône *b* S *a*, l'axe de ce Cône SC, celui du cylindre X *c* qui le rencontre, ou qui ne le rencontre pas, ſuppoſons premierement qu'il le rencontre; la ſection plane de ce Cylindre par un plan perpendiculaire à celui qui paſſe par ſon axe, & ſuivant la rencontre avec l'axe SC, ſera une Ellipſe, dont EL ſera le grand axe, & le petit axe ſera le diametre DF de la baſe du cylindre. Soit la moitié de cette Ellipſe E *d* L que l'on traverſera par autant de lignes droites paralleles que l'on voudra avoir de doubles points de la courbe comme 4: 1, 5, 2, 6, 3, qui couperont l'axe aux points *o*, *c*, O, par leſquels on menera des paralleles à l'axe du Cylindre juſqu'à la rencontre du côté S *b* du Cône, comme O *g*, *c* I, *o* H; chacune de ces lignes ſera une partie de l'axe de la courbe qui ſera faite dans le Cône par la ſection d'un plan parallele à l'axe du Cylindre, & les points *g*, I, H en ſeront les ſommets; dans l'exemple preſent ces courbes ſeront des Ellipſes, parce que les lignes *g* O, I C, H *o* prolongées, rencontreront en dedans les deux côtez du Cône S *b* & S *a* prolongez, mais ſi le Cylindre avoit été incliné ſuivant la ligne E *e* parallele à S A, ces courbes ſeroient des Paraboles. Quelles que puiſſent être ces ſections, elles ſeront toûjours ſemblables entr'elles, quoique inégales; on a donc l'axe & le ſommet de ces ſections, & l'on a

Digitized by Google

auſſi deux points à leur contour que donne une double Ordonnée 4, 1, 5, 2, 6, 3, car à cauſe de l'uniformité du Cône on peut concevoir le côté SO du Cône en l'air ſur le côté SC dans un plan perpendiculaire au plan SC*a*, comme on le voit repreſenté en perſpective dans la Figure 198. mais parce qu'on ne peut pas faire cette préparation ſur le ſolide, on décrira ces courbes ſur le plan du triangle *b*S*a*, en portant les longueurs des axes O*g*, *c*I, *o*H ſur l'axe SC en OG, *c*C & *o*K, & par les points 4GI, 5C2, 6K3, on décrira les Ellipſes ou les Paraboles, ou Hyperboles que les plans des tranches ſont dans le Cône, & par les points R*d r* des Ordonnées de la demi-Ellipſe E*d*L, on menera des paralleles à l'axe SG juſqu'à la rencontre des courbes 4G*i*, 5C2, 6K3, aux points *p*, *q*, *v*.

Cette préparation étant faite, on pourra tracer l'Ellipſimbre ſur le Cône, en traçant une ligne SB [*Fig.* 198.] de ſon ſommet S à la baſe pour ſervir de milieu à la courbe, ſur laquelle ayant porté les longueurs S*e*, S*g*, SI, SH, S*l* de la Figure 201. & ſur les côtez S*b*, S*a* de la Figure 198. des longueurs égales à S4, S1, S5, S2, S6, S3: on tracera ſur la ſurface du Cône les Ellipſes, Paraboles ou Hyperboles qui doivent paſſer par ces trois points, ſur leſquelles on portera de part & d'autre de la ligne SB, les arcs K*u*, C*q*, G*p*, leſquels donneront les points par leſquels & les deux ſommets *e* & L, on tracera à la main l'Ellipſimbre demandée. *Fig.* 198.

Pour tracer la même courbe ſur le Cylindre, il faut ajoûter à la préparation des tangentes à ces arcs, comme KT pour avoir la diſtance de ces tangentes aux arcs des courbes formées par les plans des tranches ſur les côtez du Cône, & alors on s'en ſervira pour décrire l'Ellipſimbre ſur le Cylindre, comme on a fait à la Figure 197. il faut encore remarquer ici que les Figures 201. 198. n'ont pas été faites d'une grandeur rélative, quoiqu'on les ſuppoſe telles, faute de place dans la Planche.

Si l'axe du Cylindre ne rencontroit pas celui du Cône, comme à la Figure 200. mais que l'Ellipſe faite par le plan du triangle par l'axe coupant le Cylindre fut à côté, il faut en prolonger les Ordonnées juſqu'à l'axe & chercher les ſommets des ſections, & tranſporter la ligne du milieu à côté de celle qui paſſe par les ſommets des ſections coniques de la quantité dont elle doit être éloignée du plan paſſant par l'axe de l'Ellipſe, qui fera dans le Cône une Hyperbole, prenant cet intervale ſur l'arc de la ſection conique qui coupe cette Hyperbole; ce qui n'eſt pas difficile à concevoir par les exemples que nous avons donnez pour trouver les points des Ellipſimbres ſur les arcs des ſections coniques formées par les tranches paralleles à l'axe du Cylindre: de ſorte que la préparation peut ſer-

vir à tracer les ſections ſolides, où le Cylindre n'entre pas dans le Cône de toute ſa circonference.

DEMONSTRATION.

LE même principe qui a ſervi de baſe aux démonſtrations des Problêmes précedens, s'applique ſi naturellement à celui-ci qu'il ne demande qu'une médiocre attention.

PREMIEREMENT pour la Figure 196. il faut ſe repreſenter que les lignes *gh*, M*f*, *ki* qui ſont dans le plan du triangle BSA lui doivent être perpendiculaires, de même que les lignes GH, XF, KI qui ſont les Ordonnées au diametre D*d* de la baſe du Cylindre, & les correſpondantes que l'on a fait égales, doivent auſſi être cenſées paralleles, & dans le même plan que les arcs de cercle *gy*, M*z*, *kx*; de ſorte que ſi l'on imagine des lignes paralleles à l'axe X*m* du Cylindre paſſant par les points *hfi* qui ſont à la ſurface, ces lignes qui en ſeront des côtez, rencontreront les arcs en certains points, comme *y*, *z*, *x*, qui ſeront ceux de l'immerſion du côté du Cylindre dans le Cône, par conſéquent communs aux deux ſurfaces, & à la circonference de la courbe formée par leur interſection, donc les arcs *gy*, M*z*, *kx* ſont la meſure de la diſtance des points de l'Ellipſimbre à ſon axe droit EL, ſur la ſurface du Cône.

MAIS parce qu'on ne peut pas prendre les mêmes meſures dans le cylindre, lorſqu'on veut tracer la même courbe à la ſurface, on a recours à la ſuppoſition d'un plan tangent au Cône, & perpendiculaire à celui qui paſſe par l'axe du cylindre, & le côté EL du Cône, lequel plan tangent fait dans le cylindre une Ellipſe, parce qu'il le coupe obliquement ſuivant la ligne EL, qui eſt inclinée à l'axe X*m*: or cette Ellipſe eſt toute hors du Cône, & les lignes *gh*, M*f*, K*i* ſont des Ordonnées à ſon axe EL, puiſqu'elles lui ſont ſuppoſées perpendiculaires, & qu'elles ont été faites égales à celle du cercle de la baſe du cylindre; donc la diſtance des extremitez de ces Ordonnées aux arcs de cercle du Cône, priſes ſur des paralleles à l'axe du cylindre, donne exactement les points d'immerſion des côtez paſſant par les points *hfi* de la circonference de l'Ellipſe plane, tangente au Cône; donc ces diſtances ont dû être portées, comme il a été dit à la Figure 199. pour avoir les points de l'Ellipſimbre *qu'il falloit décrire.*

CE que nous pouvons ajouter touchant les pratiques indiquées par les Figures 200. & 201. ne ſera qu'une plus ample explication de la premiere: il faut toûjours ſe repreſenter que par le moyen des plans paralleles coupant la baſe du cylindre & le Cône en même tems, on s'eſt donné des points à la ſurface du cylindre, comme *o*, *r*, D, &c. *Figure* 200. &

200. & R*dr* Figure 201. par leſquels on doit faire paſſer des paralleles à l'axe du cylindre pour avoir des côtez marquez à la ſurface; & parce que ces côtez dans la ſuppoſition de la Figure 200. ſont perpendiculaires au plan du triangle par l'axe, ils n'y ſont exprimez ſuivant les Régles de la projection que par un point; il faut donc les coucher ſur le même plan de ce triangle, auſſi bien que les arcs des ſections circulaires du cône, qui n'y ſont exprimées ſuivant les mêmes Régles de la projection 1 : 4, 2 : 5, 3 : 6, & par ce moyen on trouve les interſections de ces arcs avec les côtez du cylindre, leſquelles donnent des points communs aux deux ſurfaces; c'eſt-à-dire, des points de la Courbe que l'on doit tracer; & par conſéquent on eſt obligé de ſuppoſer des plans tangens au cône, comme nous venons de le dire, il faut tirer des tangentes à chacun des arcs des ſections du cône, leſquelles ſeront toutes dans le même plan qui eſt ſuppoſé couper le cylindre & faire une Ellipſe.

La derniere pratique a été ſuffiſamment expliquée par la conſtruction, & par ce qui a été dit ci-devant.

L'uſage de ce Problême a été indiqué au Theoreme XXVI. il ſe préſente aſſez ſouvent dans les Fortifications où les murs ſont preſque toûjours en Talud, & où il y a des arondiſſemens, qui ſont par conſéquent des portions de cônes tronquez, dont les ſommets ſont quelquefois en bas, comme aux arondiſſemens des Contreſcarpes, & des flancs concaves, & quelquefois en haut, comme aux Tours en Talud, & arondiſſemens des Oriſſons; dans l'Architecture civile, il eſt plus rare.

Des Ellipſimbres compoſées.

Probleme XLIII.

Tracer une Ellipſimbre compoſée, formée par la pénetration d'une Sphère & d'un Cylindre, dont la circonference n'entre qu'en partie dans la Sphère.

Ce Problême ſe réſoudra comme tous les précedens par notre méthode generale, en traçant des perpendiculaires à l'axe du cylindre [*Fig.* 202.] qui traverſent auſſi la ſphère, par leſquelles on ſuppoſe autant de plans paralleles entr'eux, & perpendiculaires au plan paſſant par l'axe du cylindre, & le centre de la ſphère, dont les ſections ſeront des cercles dans l'un & l'autre de ces corps. Pla. 18. *Fig.* 202.

Soit donc la ſphère A'B*k b* A pénetrée par le cylindre DEGF, dont l'axe eſt XX. par lequel, & par le centre C de la ſphère, ces deux corps ſont coupez par un même plan: on menera par le centre C un diametre PC*p*

parallele à cet axe, & ayant tiré à ces deux lignes autant de perpendiculaires qu'on voudra $a1$, $b2$, $d3$, $e4$, &c. des points $abde$, &c. pour centres & pour Rayons ab, bi, dk, &c. on décrira autant d'arcs de cercles (les quarts ſuffiſent) & des points o, p, q, r, &c. pris ſur l'axe du cylindre pour centres, & pour Rayons les demi-diametres de la baſe $o1$, $p2$; on tracera autant d'autres arcs de cercle juſqu'à la rencontre des précedens faits dans la ſphère ſur les mêmes diametres prolongez. Les points de leurs interſections x & x ſeront communs aux deux ſurfaces, & ſi de ces points on abaiſſe des perpendiculaires aux mêmes diametres, on aura leur projection ſur le plan paſſant par l'axe du cylindre & le centre de la ſphère, ſur lequel ils donneront autant de points de l'axe courbe de la ſection $Pyyyp$.

Cette préparation étant faite, on s'en ſervira pour tracer l'Ellipſimbre compoſée, comme on a fait pour les Ellipſimbres ſimples, en traçant autant de cercles ſur la ſphère & ſur le cylindre, commençant à compter la meſure des arcs bx, ix, Kx, depuis un cercle majeur, dans lequel ſeront les deux Poles P & p de tous ces arcs; & ſur le cylindre par tracer un côté EG ou DF, d'où l'on meſurera à droite & à gauche les arcs $1x$, $2x$, $3x$, $4x$, ou leur ſupplement, comme il conviendra le mieux, parce qu'il eſt toûjours plus commode de prendre & de porter les meſures des arcs qui ſont au deſſous de 90. degrez, que ceux qui ſont plus grands, à cauſe de la rondeur du cylindre.

La démonſtration de ce Problême eſt trop ſemblable à celle des précedens pour s'y arrêter; chaque arc de cercle qu'on a fait ici, dans le plan du Papier, qui eſt celui qui paſſe par l'axe du cylindre, & le centre de la ſphère, peut être relevé à angle Droit ſur ce plan ſur les lignes qui en ſont les diametres ou les Rayons, ſans qu'il arrive aucun changement à leur interſection x, & à leur projection y, qui eſt dans le même plan, & dans celui de l'arc.

L'usage de ce Problême a auſſi été indiqué au Theoreme XI. il eſt inutile d'en répeter l'explication.

Probleme XLIV.

Tracer une Ellipſimbre compoſée, formée par la pénetration de deux Cylindres, dont la circonference de l'un n'entre qu'en partie dans l'autre.

Il y a deux cas dans ce Problême, qui n'en changent point la conſtruction; car les cylindres ſe coupent à angles Droits, ou obliquement, de quelque façon qu'ils ſe croiſent, il faut toujours ſuppoſer qu'ils ſont coupez par des plans tangens à chacun des cylindres qui les coupent ré-

ciproquement, & perpendiculairement aux plans paſſans par chacun de leurs axes; de ſorte que ſi les cylindres ſe croiſent à angle Droit, les ſections de ces plans tangens à un des cylindres ſeront dans l'autre des cercles, & s'ils ſe traverſent obliquement, les ſections faites par les mêmes plans ſeront des Ellipſes dans l'un & l'autre cylindre; cela ſuppoſé, nous choiſiſſons à la Figure 203. le cas où ils ſont perpendiculaires pour plus grande facilité. Fig. 203

Soit le cylindre YLNI vû par la baſe repreſenté par le cercle AE*a*B, lequel eſt pénetré par un autre cylindre *d*A*a*D, qui n'entre pas dans le premier de toute la circonference; en ſorte qu'il reſte une partie FB de ſon diametre au dehors, laquelle répond au double de l'arc D*g* de la baſe D*ga*, étenduë ici par ſuppoſition ſur le plan du Parallelograme DA paſſant par ſon axe *ll*.

Ayant tiré un diametre A*a* ſur la baſe du premier cylindre BAE*a*, lequel eſt ici confondu avec le côté du ſecond, quoiqu'il puiſſe paſſer entre C & B, ou entre C & E; on tirera ſur une des extremitez de ce diametre la perpendiculaire *d*A, ou *a*D qui repreſentera le plan tangent au grand cylindre, & le diametre de la baſe du petit, ſur lequel on tracera le demi cercle D*ma* qui repreſentera la moitié de cette baſe, laquelle doit cependant être à angle Droit ſur le plan du Parallelograme *d*A*a*D, mais dont le changement de ſituation n'en fait aucun aux interſections des lignes qu'on en doit tirer.

On diviſera enſuite l'une des deux baſes des cylindres, en parties égales ou inégales; nous diviſerons, par exemple ici, l'arc du demi cercle *a*BA, ou ſeulement le quart du cercle BA en parties égales, ou inégales B*r*, *rq*, *qp*, *pn*, *n*A, & par ces points *npqr*, on tirera des paralleles à l'axe *ll* du cylindre DA prolongées juſqu'à l'arc de la baſe *dm*A, ou D*ma*, qu'elles rencontreront aux points *g*K*mo*.

Cette préparation étant faite, ſi l'on veut tracer l'Ellipſimbre ſur le grand cylindre YN, on commencera par faire à ſa ſurface un cercle parallele à ſa baſe, n'importe où, ſi les cylindres ſe coupent à angle Droit, ou une Ellipſe, ſuivant l'obliquité de la direction des côtez du ſecond cylindre qui le pénetre. On tranſportera ſur ce cercle les diviſions B*r*, B*q*, B*p*, B*n*, en *b*R, *b*Q, *b*P, *b*N de part & d'autre du point *b*, qui a été pris à volonté à la ſurface du cylindre, ſi la ſection eſt un cercle, ou un point correſpondant au point B, s'il eſt une Ellipſe; & par les points *b*RQPN*a* on menera autant de paralleles à l'axe du grand cylindre; puis ayant tracé un cercle pour le milieu de la ſection, ſi on ne l'a pas fait du premier coup, on portera ſur ces paralleles à l'axe toutes les Ordonnées de la baſe du petit cylindre de part & d'autre du cercle pris pour

Digitized by Google

le milieu, comme ici a*a* ſuivant l'ordre de leur poſition à l'égard du point B milieu de la diviſion; ainſi on portera l'Ordonnée *cf* provenant du point B en *cf* ſur le gros cylindre de part & d'autre du point *c*, *gh* quatre fois en *gh*, ſur les deux paralleles R*h*, R*h*; on continuera de même en portant *i*K deux fois ſur chaque parallele QK de part & d'autre des points *i* & *i*, & ainſi de ſuite; & l'on aura les points *o*, *m*, K, *h*, *f*, *h*, K, &c. par leſquels on tracera à la main l'Ellipſimbre demandée.

Si l'on veut tracer la même courbe ſur le cylindre D A; on tracera un cercle à la ſurface par un point pris à volonté, ou une Ellipſe, ſi les deux cylindres ſe coupent obliquement, on diviſera la circonference de ce cercle en parties égales à celles de la baſe *dm* A, au haut de la Figure, en portant de ſuite les arcs *df*, *fh*, *h*K, K*m*, *mo*, & recommençant à l'autre demi cercle; & par tous ces points de diviſions ayant tracé autant de paralleles à l'axe du cylindre, on portera de part & d'autre du cercle pris pour le milieu les longueurs des demi-cordes 1*r*, 2*q*, 3*p*, 4*n*, qui donneront des points *r*, *q*, *p*, *n*, par leſquels on tracera la courbe qui eſt l'Ellipſimbre demandée, laquelle ſera égale à la précedente, quoique ſur un cylindre different.

DEMONSTRATION.

POUR démontrer ce Problême, il ſuffit de repreſenter les differens effets des ſections des plans qui coupent les deux cylindres par tranches, ſuivant notre principe general; car ſi l'on imagine les deux cylindres coupez par des plans paralleles entr'eux, & à un des deux axes, il eſt évident qu'ils feront des Parallelogrames dans celui où les tranches ſont paralleles à ſon axe, & des cercles dans l'autre, ſi les cylindres ſe pénetrent à angle Droit, ou des Ellipſes égales s'ils ſe coupent obliquement; mais comme l'on peut ſuppoſer les ſections des plans ſucceſſivement paralleles aux deux axes, on aura des Parallelogrames & des cercles dans chaque cylindre qui donneront par differends moyens les mêmes points de la courbe, ce que nous avons fait dans cette conſtruction pour abreger; car nous pouvions également diviſer le ſecond cylindre D A en cercles paralleles à *d* A, & prendre ſurchacun, à commencer du côté *d*D, les arcs correſpondans à chacun de ces cercles, raſſemblez ſur la baſe *dm* A, c'eſt-à-dire, qu'au cercle du milieu paſſant par F & B, on auroit porté deux fois l'arc *df*, enſuite aux deux Collateraux deux fois l'arc *dh*, & ainſi de ſuite; mais comme l'uſage des lignes droites eſt plus commode & plus exact dans l'exécution, que celui des courbes tracées ſur des ſurfaces courbes, on a choiſi les unes preferablement aux autres, puiſque l'une & l'autre maniere doit également donner les points du contour de l'Ellipſimbre, *qu'il falloit trouver.*

Digitized by Google

U S A G E.

Nous avons fait remarquer au Theoreme XXI. que l'uſage de cette courbe étoit aſſez fréquent dans les ceintres des Voutes, parce que la plûpart ſont cylindriques, & que ſouvent une Voute n'eſt percée que par une portion de cylindre, comme il arrive aux abajours & aux deſcentes de Cave.

Des Ellipſoïdimbres.

Probleme XLV.

Tracer une Ellipſoïdimbre formée par la pénetration de la Sphère & du Cône, dont l'axe ne paſſe pas par le centre de la Sphère.

La ſolution de ce Problême étant toûjours la même, c'eſt-à-dire, fondée ſur le même principe; il ne s'agit que de tracer des lignes paralleles entr'elles ſur le plan qui paſſe par l'axe du Cône, & le centre de la ſphère, & qui ſoient perpendiculaires à cet axe, leſquelles ſeront les diametres des cercles, que les plans paſſans par ces lignes perpendiculairement au triangle par l'axe du Cône, feroient dans le Cône & dans la ſphère; les interſections des cercles du Cône avec ceux de la ſphère, qui ſont ſur le même plan, donneront les points de la Courbe ſur les ſurfaces des deux corps, auſquelles ils ſeront communs, & les perpendiculaires abaiſſées des points d'interſection des arcs ſur leurs diametres communs donneront leur projection, & les points de l'axe courbe de l'Ellipſoïdimbre; la Figure 204. fait voir que c'eſt ainſi qu'on a tracé l'axe courbe A *d* B *Fig.* 204. par une pratique tout-à-fait ſemblable aux précedentes, ſans qu'il ſoit néceſſaire d'y ajoûter une plus longue explication, qui ne pourroit être utile qu'à ceux qui liroient ce Problême, ſans avoir lû auparavant quelques-uns des précedens; il ſuffit de dire en leur faveur que le point *y* eſt trouvé par l'interſection des arcs de cercle *d*E*x* & *g f x*, ayant abaiſſé du point *x* la perpendiculaire *xy* ſur le diametre commun E*f* des arcs faits, l'un du centre *d* pris ſur le diametre de la ſphère ID, & l'autre du centre *g* pris ſur l'axe du Cône S*b*.

Quand nous diſons que les plans qui forment les tranches des deux corps doivent être perpendiculaires à l'axe du Cône, on conçoit bien que ce n'eſt que pour plus de commodité dans l'exécution, comme nous en avons déja prévenu le Lecteur ci-devant, parce qu'alors toutes les ſections dans le Cône étant des cercles, ſont les Figures les plus ſimples & les plus faciles à décrire; car rien n'empêche qu'on ne faſſe les tranches paralleles à l'axe; mais alors leurs plans formeroient des Hyperboles

Digitized by Google

dans le Cône; de ſorte que les points de l'Ellipſoïdimbre ſeroient à l'interſection de differentes Hyperboles, avec differents cercles, j'entends de differentes grandeurs; car les Hyperboles ſeroient toûjours ſemblables, étant formées par des plans paralleles entr'eux. Rien n'empêcheroit, de même qu'on ne fit les tranches inclinées à l'axe du Cône, mais alors les points de la courbe pourroient être à l'interſection des cercles de la ſphère, & des trois autres ſections coniques, Ellipſes, Paraboles ou Hyperboles, ſuivant l'inclinaiſon des plans coupans à l'égard de l'axe du Cône; car le centre de la ſphère étant donné dans le triangle par l'axe du Cône, on parviendroit toûjours au même but, mais par des voyes plus embarraſſantes; ce qu'il faut éviter.

L'USAGE de ce Problême eſt indiqué au Theoreme XIV. pour les enfourchemens des Lunettes ebraſées, ou voutes en Canonieres, qui rachetent une Voute ſphérique, ou d'une Trompe conique qui rachete un Cul-de-four.

PROBLEME XLVI.

Décrire une Ellipſoïdimbre formée par la pénetration du Cône dans le Cylindre, à la rencontre de leurs Surfaces.

SOIT [*Fig.* 205.] le cercle K B A *i*, qui repreſente la baſe du cylindre, & le triangle S D *d*, celui qui eſt la ſection du Cône par ſon axe S C, lequel paſſe, ou ne paſſe pas par le centre X de la baſe du cylindre: les interſections de ce cercle avec le triangle donnent les points communs aux deux ſurfaces du Cône & du cylindre; ſçavoir, deux points dans ſon immerſion A B, & deux ſans ſon émerſion *i* K, leſquels ſont par conſéquent à l'Ellipſoïdimbre.

ON diviſera l'arc B A en autant de parties égales ou inégales que l'on voudra, par leſquelles on tirera des perpendiculaires à l'axe S C du Cône, comme *g n* 1, *e o* 2 ou *e m* 3, & des points *g* & *e* pour centres & pour Rayon la partie qui eſt compriſe dans le Cône *g* 1, *e* 2 ou *e* 3, on décrira des arcs de cercle 1 R, 2 *u*, 3 *x*, & par les points *n o m* des diviſions, on menera des paralleles à l'axe S C juſqu'à la rencontre de ces arcs, qu'elles couperont aux points R, *u*, *x*, leſquels ſeront au contour de la courbe; ſi l'on ſuppoſe ces arcs relevez en l'air perpendiculairement au triangle par l'axe ſur leurs diametres.

POUR faire uſage de cette préparation dans la deſcription de l'Ellipſoïdimbre ſur le cylindre, on tracera un cercle à ſa ſurface, pour ſervir de milieu à la Courbe, par exemple G H, ſur lequel ayant tranſporté les diviſions de l'arc B A, à commencer d'un point Q pris pour le point C de la préparation, on portera C *o* & C *p*, en Q *o* & Q *p*, C *n* en Q *n*, & C *m*

Digitized by Google

en Q*m*, & par les points *nopm* on menera des paralleles à l'axe du cylindre, ſur leſquelles à commencer du cercle GH, on portera de part & d'autre de ce cercle les Ordonnées des arcs 1R, 2*u*, 3*x*, qui ſont *n*R en *rn*, *ou* en *ou*, *mx* en *mx*, & par les points *rux*, &c. trouvez à la ſurface du cylindre, on tracera à la main une courbe qui ſera l'Ellipſoïdimbre propoſée.

Secondement, ſi on veut tracer la même courbe ſur le cône, on tirera du ſommet S deux côtez à ſa ſurface diametralement oppoſez, comme SDS*d*; on prendra ſur chacun d'eux, les diſtances SB, SA, & SK S*i*, ſi l'on veut tracer la petite ſection, & ſur le côté SD ayant porté les intervales B1, B2, on tracera par les points 1. & 2. des cercles paralleles à la baſe, ſur leſquels on portera de part & d'autre de ce côté, les arcs 1R, 2*u*, & dans l'autre côté auſſi de part & d'autre l'arc 3*x*, & par les points R*ux*, on tracera ſur le cône à la main, ou avec une Régle ou Baguette ronde & pliante, la courbe qui ſera l'Ellipſoïdimbre demandée.

Si l'axe du cône étoit incliné au côté du cylindre, il eſt clair qu'au lieu de cercles, il faudroit tracer des Ellipſes.

La Figure fait voir auſſi d'un coup d'œil, comment on doit faire la projection de cette courbe, en tirant par les points donnez *nom* des paralleles à l'axe du cône, leſquelles étant traverſées par une perpendiculaire GH ſur le même plan, ſi l'on porte de part & d'autre de cette ligne ſur chaque parallele l'Ordonnée correſpondante du cercle fait par chaque tranche, on aura les points T, *r*, *u*, *x*, *t*, &c. par leſquelles menant une courbe, on aura la projection de l'Ellipſoïdimbre demandée.

La démonſtration de ce Problême eſt facile à apercevoir, ſi l'on ſe repreſente les arcs 1R, 2*u*, 3*x* élevez perpendiculairement ſur leurs diametres, & ſur le plan du triangle par l'axe du cône; car alors les Ordonnées *n*R, ou *mx* repreſentent les côtez du cylindre qui paſſent par les points R, *u*, *x*, de la ſurface du cône, où ſont leurs interſections; & par conſéquent les points communs aux deux ſurfaces, qui ſont au contour de l'Ellipſoïdimbre; *ce qu'il falloit trouver.*

Nous avons indiqué au Theoreme XXVI. l'uſage de cette courbe, nos *Embraſures* dans les Tours, ou dans les *Flancs concaves* ſans Talud, ou des Portes ebraſées dans les murs arondis par leurs plans ſans Talud, ſont des portions de cônes qui pénetrent des cylindres.

PROBLEME XLVII.

Décrire une Ellipſoïdimbre formée par l'interſection des Surfaces de deux Cônes, dont les Axes ſe coupent.

CETTE courbe ſe décritra par notre méthode generale, en coupant les deux cônes par des plans paralleles entr'eux, & perpendiculaires à l'axe de l'un des deux; la courbe ſera à l'interſection des cercles & des Ellipſes, dont on a les centres & les diametres ou Rayons, & les axes des Ellipſes que l'on trouvera dans le plan qui paſſera par les deux axes; la *Fig.* 207. Figure 207. & ce que nous avons dit tant de fois en pareilles conſtructions ſuffiſent pour mettre cette pratique ſous les yeux.

L'USAGE de ce Problême eſt principalement pour les Embraſures ou Portes ebraſées en Tour creuſe ou ronde, & en Talud, ſuppoſant quelles ſoient Droites, c'eſt-à-dire, que leur axe ou ligne de direction, ſoit perpendiculaire à la tangente du mur arondi, ou à la corde qui eſt le diametre de la Porte ou Embraſure; ſi la direction eſt rampante, ce ſont deux cônes dont les axes ſe coupent obliquement.

Des Ellipſoïdimbres compoſées.

PROBLEME XLVIII.

Tracer une Ellipſoïdimbre compoſée ſur les Surfaces du Cône & de la Sphère, qui ſe pénétrent.

LA ſolution de ce Problême n'a rien de particulier, que la maniere de trouver les axes droits des deux parties des courbes qui ſe croiſent pour n'en faire qu'une des deux; ce qui détermine leurs points d'inflexions dans le plan paſſant par l'interſection de ces deux axes, perpendiculairement à celui qui paſſe par l'axe du cône.

Fig. 206. SOIT la Figure 206. la ſection d'un cône par ſon axe, & d'une ſphère par ſon centre; ſi l'on tire du ſommet S une tangente STD au cercle de la ſphère PTH, les lignes tirées des points E & H, où la ſphère coupe le cône au point d'attouchement T, ſeront celles que l'on cherche, & le point *y*, projection du point *x*, interſection des arcs T*x* de la ſphère fait du centre F, & G*x* du cône du centre *m*, ſera celui de l'inflexion formée par la rencontre de deux portions d'Ellipſoïdimbre de la partie ſuperieure & de l'inferieure du cône; les autres points ſe trouveront à l'ordinaire par l'interſection des arcs de la ſphère, dont les centres ſont ſur ſon diametre P*p* parallele à l'axe du cône, & des arcs des ſections du cône, dont les centres ſont ſur ſon axe S*m*.

Application

Digitized by Google

Application des Pratiques précedentes aux Courbes quelconques formées par les interſections des Cylindres, & les Cônes.

Puisque l'on connoit que les ſections des ſphères, ſphèroïdes, cônes & cylindres faites par des plans, ſont toujours du nombre de celles qu'on appelle coniques qui ne ſortent jamais du ſecond degré, & que lorſqu'ils ſont paralleles, elles ſont toujours ſemblables: quelque puiſſe être la ſection de ces corps qui ſe pénetrent, ſoit à l'égard de leurs axes, ou de leurs côtez, on trouvera toujours ſur chaque tranche l'interſection de deux de ces courbes, qui donnera deux points de la courbe plane ou à double courbure, qui ſe forme par la rencontre des deux ſurfaces; ce qui ſuffit pour ſuppléer dans la pratique à ce qui peut manquer à notre Theorie, concernant les Paraboloïdimbres, Hyperboloïdimbres ou autres poſſibles, comme on voit aux Figures 207. & 208. *Fig.* 207. 208.

De la deſcription des Helices & Limaces.

Quoique les Helices ne ſoient pas du nombre de ces Courbes qui ſont produites par la ſection des corps, auſquelles nous nous ſommes bornez; elles ſont ſi uſuelles en Architecture, qu'on a beſoin très ſouvent de les tracer.

Le mot *d'Helice* vient du Grec *Heliſſo*, c'eſt-à-dire, *circumvolvo*, je tourne autour; quelques Mathematiciens ont appliqué ce nom à la ſpirale, qui eſt une courbe plane, c'eſt-à-dire, décrite ſur un plan; mais la plûpart l'ont reſervé pour celles qui s'élevent au deſſus d'un plan en tournant autour d'un corps, comme le Lierre, les Liſerons & les *Convolvulus*, autour d'un Arbre. Pour moi qui tâche d'éviter les periphraſes, j'en reſſerre la ſignification à celles qui tournent autour d'un corps cylindrique ſans s'approcher de leur axe, pour les diſtinguer de celles qui en approchent, que j'appelle *Limaces*, en quoi je la diſtingue encore d'une autre courbe qui eſt dans un plan, que l'on appelle le *Limaçon de M. Paſcal*, laquelle eſt une eſpece de ſpirale.

Je diviſe encore les Helices en régulieres & irrégulieres, les régulieres ſont celles qui montent autour d'un corps cylindrique d'un mouvement uniforme, comme ſont les Vis, dont l'intervale de chaque révolution qu'on appelle le *Pas de la Vis* eſt toujours égal; les irrégulieres ſont celles, dont les Pas de chaque révolution, augmentent ou diminuent ſuivant une certaine proportion que l'on s'eſt fixé.

PROBLEME XLIX.

Tracer une Helice ſur un Corps Cylindrique.

Fig. 209. POUR décrire cette courbe, on tracera un cercle autour du cylindre, s'il eſt droit ſur une baſe circulaire, ou une Ellipſe s'il eſt ſcalene, mais droit ſur une baſe Elliptique, & l'on en diviſera la circonference en autant de parties égales qu'on voudra, comme Figure 209. en ſept pour la moitié qui paroît, c'eſt-à-dire, 14. pour le circuit entier; & par ces diviſions on menera autant de paralleles à l'axe du cylindre; enſuite on réglera l'intervale des révolutions à volonté, & l'on en diviſera un comme OA ou ſon égal BD en autant de parties égales qu'on a diviſé la circonference de la baſe du cylindre (dans l'exemple préſent en 14. parties,) & l'on en portera ſur chaque parallele à l'axe une de plus qu'à la précedente. Ainſi commençant à rien au point *o*, on portera une de ces diviſions ſur la parallele *ag* au point 1, ſur la ſeconde *bb* deux, au point 2, ſur la troiſiéme *ci* trois, au point 3, & ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à la moitié au point 7. alors on retournera vers le point A en faiſant la même augmentation, & continuant ainſi juſqu'au ſommet du cylindre.

SI l'Helice eſt irréguliere, que les diviſions de DàB ſoient dans le rapport des tangentes ou des ſécantes, ou d'autres progreſſions; la conſtruction ſera toujours la même, & la même proportion regnera entre les Pas de la Vis, qu'on a fait regner dans l'intervale d'un ſeul.

COROLLAIRE.

D'ou il ſuit que ſi deux Helices de baſes differentes, c'eſt-à-dire, de differens diametres, ſont un même nombre de revolutions autour d'un axe commun, les intervales des Pas auront plus grande raiſon à leur baſe plus elles ſeront petites, & au contraire plus petite raiſon à l'égard des plus grandes; c'eſt-à-dire, que les Pas de la Vis, quoiqu'également diſtans, ſeront plus inclinez, & les autres plus couchez.

USAGE.

CE Problême ſert à pluſieurs Ouvrages. Premierement à tracer les grandes Vis, les Colomnes torſes, les naiſſances des Voutes tournantes & rampantes, comme la Vis St. Giles, & les joints de Doele des mêmes Vis, les limons tournans, que les Apareilleurs appellent *la Courbe rampante*, le deſſous des marches tournantes des Vis, les appuis des Fenêtres & Baluſtres dans les Tours rondes ou creuſes, &c. comme nous l'expliquerons au IV. Livre.

Digitized by Google

Des Limaces.

Les Limaces ſont, comme nous l'avons dit, des Helices qui s'approchent continuellement de leur axe. Or elles peuvent en approcher en telle raiſon qu'on voudra faire regner entre les lignes droites tirées des points de la courbe perpendiculairement à leur axe; ainſi on peut décrire cette courbe ſur tous les corps coniques, ſphériques ou conoïdes & ſphéroïdes, ellipſoïdes, paraboloïdes, ou hyperboloïdes, ou tout autre corps formé par la révolution de quelque courbe ſur ſon axe; nous donnons ici pour exemple le Cône & la ſphère, *Fig.* 210. 211. *Fig.* 210. 211.

On peut encore faire regner une certaine progreſſion entre les intervales de chaque révolution de cette courbe, ou les faire égaux ſuivant le deſſein qu'on ſe propoſe.

Probleme L.

Tracer une Limace ſur un Cône ou ſur une Sphère, ou Sphéroïde.

On diviſera la baſe du Cône [*Fig.* 210.] ou la baſe circulaire ou Elliptique d'une Hemiſphère ou Hemiſphéroïde en autant de parties égales que l'on voudra, par leſquels on tirera autant de lignes droites au ſommet du Cône, ou autant de cercles ou Ellipſes au Pole P de la ſphère ou du ſphéroïde. Enſuite on diviſera le côté du Cône en un même nombre de parties, ſi l'on ne veut qu'une révolution, ou ſi l'on en veut pluſieurs en un plus grand nombre, comme du double, triple ou quatruple, & l'on fera ces parties égales ſi l'on veut, ou diminuant ſuivant un certain rapport, par exemple pour le Cône, on peut les faire diminuer ſuivant le rapport des paralleles à la baſe d'un triangle Iſoſcele formé par deux des côtez du Cône, & par la premiere diviſion priſe à volonté, & pour l'Hemiſphère, par les arcs paralleles à la baſe d'un triangle ſphérique, comme *cd*P [*Fig.* 211.] dont la baſe *cd* ſera priſe à volonté pour le premier intervale; ce qui donnera une échelle de diviſions inégales, qu'on portera ſur chaque ligne du Cône tendant au ſommet, comme ſur *a*S (*Fig.* 210.) une diviſion, ſur *b*S deux, ſur *c*S trois, & ainſi de ſuite. *Fig.* 210. 211.

Pour la ſphère, on portera ſur les cercles tendant au Pole les meſures ſuivies de même avec leur augmentation d'une partie ſur chacune.

Digitized by Google

USAGE.

Il n'eſt pas ſans exemple que l'on ait fait des édifices en Limaces. On a gravé une Eſtampe du projet d'une Chapelle pour le milieu du Louvre, dont le ſommet ſe terminoit en Limace; on croit que la Tour de Babel étoit de même, comme on le voit dans le Traité qu'en a fait le P. *Kirker*, le Chevalier *Borromini* a fait ainſi le Chapiteau qui couronne toute la voute de l'Egliſe de Saint Leon de la Sapience à Rome; mais ſans avoir recours à l'application de ce Problême dans les Edifices en grand, on la peut trouver aſſez ſouvent dans le petit, pour de certains Ornemens de volutes ſaillantes ou rentrantes. La nature nous donne des merveilleux exemples des varietez de cette courbe dans une infinité de Coquillages de Mer & de Terre; j'en ai vû au Chily de Coniques gravez de Canelures à côtes entre chaque *pas*, ou intervale de l'Helice, qui diminuoient de longueur, de largeur & de profondeur dans une merveilleuſe proportion juſqu'à la pointe, où elles devenoient imperceptibles à la vûë; ce que le plus habile Artiſan aidé des ſecours de la Geometrie auroit bien de la peine d'imiter.

TRAITÉ DE STEREOTOMIE.

LIVRE TROISIE'ME.

De la deſcription des Diviſions des Solides.

DANS les deux Livres précedens nous n'avons eu pour objet que la Figure des lignes & des ſurfaces formées par les ſections des corps, & l'art de les décrire. Preſentement nous embraſſons l'eſpace compris entre une, deux ou pluſieurs ſections; c'eſt-à-dire, les parties ſolides qui réſultent de la diviſion des corps coupez par des ſurfaces planes ou courbes; & nous nous propoſons de chercher les moyens de les repreſenter ſur un plan autant exactement qu'il eſt poſſible, afin de trouver les longueurs de leurs côtez, & leurs angles plans & ſolides, tant rectilignes, que mixtes.

Pour m'expliquer en termes de l'Art, il s'agit ici de cette eſpece de *Deſſein* que les Architectes appellent le *Trait* & *l'Epure*, dans lequel conſiſte toute la difficulté de la coupe des Pierres.

Je vais tâcher d'éclaircir cette matiere, & d'en donner les principes

en la réduiſant à un petit nombre de Régles appuyées de leurs raiſons, & dont l'application ſera d'autant plus facile, que le lecteur eſt déja pleinement inſtruit de la maniere de décrire toutes les eſpeces de Courbes qui peuvent y être mêlées.

On ſçait qu'il eſt impoſſible de repreſenter exactement un ſolide ſur une ſurface plane, non ſeulement celui qui en a de courbes; mais encore celui qui n'eſt compris que par des planes, puiſqu'elle ne peut jamais en repreſenter qu'une, & un ſolide en a au moins quatre; ordinairement dans l'uſage de l'Architecture ſix, & quelquefois davantage. On a donc été obligé de conſiderer les ſolides dans les differentes rélations & ſituations de leurs parties, par le moyen deſquelles on parvient à les repreſenter à differentes repriſes.

Tantot, pour connoître la diſtance horiſontale de leurs angles, on les a ſuppoſé comme aplatis ſur un plan horiſontal; tantôt, pour connoître leurs hauteurs, on les a conçû comme aplatis ſur un plan vertical; quelquefois pour connoître d'un coup d'œil toutes leurs ſurfaces, & en voir le rapport, on les a rangé de ſuite ſur une ſurface plane. Enfin pour ſçavoir quels ſont les angles que ces ſurfaces font entr'elles, on en a meſuré les angles mixtes, curvilignes & rectilignes par le moyen des cordes des côtez courbes, ou avec des inſtrumens; juſqu'ici on a rien imaginé de mieux.

On peut donc réduire tout l'Art de tracer une *Epure* à quatre ſortes de deſcriptions, la premiere a pour objet les meſures horiſontales; on l'appelle en termes d'Architecture le *Plan*, en langage de Mathematique *l'Ichnographie*, ou la *projection horiſontale*. Nous ſommes obligez d'adopter ce dernier pour éviter les équivoques dans les raiſonnemens Geometriques, où le mot de *Plan* ſignifie en general une ſurface plane quelconque. Secondement, pour éviter les manieres de parler qui renferment une eſpece de contradiction, comme de dire *le plan d'un point, ou d'une ligne* pour ſignifier ſa projection. Troiſiémement, pour éviter la Cacophonie, lorſqu'il faudra dire *le plan d'un plan*, au lieu de ſa projection.

La ſeconde eſpece de deſcription des ſolides a pour objet les meſures verticales; on l'appelle dans le langage des Sciences *Ortographie*, & en termes d'Architectures elles a differens noms. Celle qui repreſente les faces des Edifices, ou de leurs parties s'appelle *Elevation*: celle qui en fait voir les dedans, ſuivant une ſection faite par leur largeur s'appelle *Profil*, & celle qui repreſente auſſi les dedans, ſuivant leurs longueurs s'appelle *Coupe* & Profil.

La troiſiéme eſpece de deſcription des ſolides qui fait partie du deſ-

Digitized by Google

ſein de l'Epure, a pour objet l'étenduë des ſurfaces; on l'appelle en termes de l'Art le *Développement*, parce qu'elle raſſemble & étend ſur une ſurface plane, celles dont le ſolide eſt comme enveloppé; celle-ci n'a pas de nom particulier uſité dans les Livres; mais puiſque les précedentes en ont qui ſont dérivez du Grec, rien n'empêche qu'on l'appelle avec feu M. de Lagny de l'Academie des Sciences *l'Epipedrographie*. *Memoires de l'Acad. 1727.*

La quatriéme eſpece de deſcription neceſſaire à l'Epure a pour objet les ouvertures des angles rectilignes, curvilignes & mixtes, formez par les termes des ſurfaces planes & courbes, & par l'inclinaiſon qu'elles ont entr'elles. Celle-ci n'a pas de nom propre, on l'appelle la maniere de trouver les *Buveaux*, quelques-uns Beuveaux ou Bevaux, mais plûtôt ſuivant l'étimologie du latin *Bivium* les *Biveaux*; on peut avec le même M. de Lagny l'appeller la *Goniographie*: ces quatre eſpeces de deſſeins ſont eſſentiels à l'Epure, & les ſeules neceſſaires; car quoiqu'il y ait une cinquiéme maniere de repreſenter les ſolides par la *Scenographie*, c'eſt-à-dire, la Perſpective, on n'en peut tirer aucun ſecours pour la coupe des Pierres, parce qu'elle change les meſures des ſolides repreſentez, en diminuant les parties qui s'éloignent du devant du tableau.

De l'Arangement des Deſſeins dans l'Epure.

La confuſion que l'on trouve dans les deſſeins des Livres qui traitent de la coupe des Pierres, vient ſouvent de la multiplicité des eſpeces de repreſentations que l'on raſſemble dans la même Epure; car ſouvent on y joint le plan au Profil, quelquefois encore à l'élevation, & l'on mêle les uns avec les autres ſans diviſions; ce qui demande une grande attention pour démêler ce qui appartient à chacune; en effet ſouvent la même ligne fait partie du plan & de l'élevation, & ſert encore au Profil.

Souvent les objets verticaux ſont renverſez, comme ſi au lieu de monter ils tomboient du haut en bas; quelquefois ils ſont placez de côté, quoiqu'ils doivent être verticaux; ſouvent on fait des lignes & des arcs de cercles inutiles à la conſtruction, qui ne ſervent qu'à indiquer les alignemens, les égalitez des lignes tranſpoſées, ou l'ouverture de leurs angles: il arrive auſſi ſuivant les circonſtances, que pour analiſer une projection, on ſe ſert pour plus de commodité & abreger l'operation, d'un angle Droit qu'on a trouvé fait, quoique pour un ſujet different. Ce double employ de lignes trouble l'attention des Lecteurs, ou exige une fatigante contention d'eſprit pour démêler ces differentes conſiderations.

La neceſſité de raſſembler pluſieurs objets dans une petite Planche rend cet embarras preſque inévitable; d'autant plus qu'il a ſon utilité pour indiquer plus ſenſiblement leurs rapports.

Digitized by Google

Malgré les ſoins qu'on a pris pour éviter la confuſion, il eſt bon d'avertir le Lecteur qu'il ne doit compter de connexité neceſſaire entre les lignes des deſſeins, que celle qui eſt annoncée ou indiquée par le deſſein qu'on y a joint, dans lequel on aura ſoin de dire que cette ligne qui étoit de l'élevation ou du *Plan* doit être conſiderée par une autre ſuppoſition, comme étant du Profil; mais lorſqu'on aura omis cet avertiſſement, & qu'il ſera queſtion de Profil, il faut abandonner l'idée qu'on attachoit à une ligne, comme faiſant partie du plan, & prendre celle qui convient au Profil dont on a parlé.

diſcours

Quoiqu'il ſoit plus naturel de mettre chaque eſpece de deſſein à part; il eſt cependant vrai que cette ſimplicité d'objet indique moins ſenſiblement les rapports des lignes, & que l'on trouve en cela moins de commodité qu'à raſſembler, & même quelquefois à mêler les *Plan*, *Profil* & *Elevation*: on tiendra cependant pour arbitraire l'arangement de leurs ſituations, les uns auprès des autres, ou dans les autres, au deſſus, au deſſous, ou à côté; pourvû que les parties en ſoient diſtinctement décrites.

CHAPITRE I.

De la Projection en General.

Nous avons déja expliqué dans la ſeconde partie du II. Livre, ce que nous entendons par le mot de Projection; il ſuffit de répeter ici que c'eſt la deſcription d'un corps faite par des lignes perpendiculaires à un plan tirées de chacun des angles & diviſions réelles ou imaginaires de ce corps, telle eſt la trace de la goutiere d'un comble qui décrit la Figure de ſon contour ſur la Terre.

On conçoit aiſément ſuivant cette définition, que le même corps poſé de differentes manieres donne differentes Figures de projection; ainſi un dez poſé à plat ſur une de ſes ſurfaces, *Fig.* 212. aura pour projection le quarré, ſur lequel il eſt appuyé, parce que les perpendiculaires tirées des quatre angles ſolides qui ſont hors du plan de deſcription, ſont les mêmes que celles qui ſont à la jonction des quarrez perpendiculaires entr'eux; mais ſi le dez eſt ſuppoſé n'être appuyé que ſur un de ſes angles, les perpendiculaires tirées des ſix ſommets des autres angles formeront ſur ce plan le contour d'une exagone qui ſera régulier, ſi le huitiéme angle ſe trouve dans la même perpendiculaire au plan que le premier, comme on voit, *Fig.* 223.

D'ou il ſuit: 1.° que pour faire la Projection d'un corps, il ne ſuffit pas

pas d'en concevoir parfaitement la Figure; mais il faut connoître ou déterminer la poſition de ſes angles; parce que la variation de cette poſition change les meſures des diſtances horiſontales ou verticales, que l'on cherche dans ce genre de deſſein; car les perpendiculaires tirées des angles ſolides s'approchent ou s'éloignent, ſuivant l'inclinaiſon des ſurfaces des ſolides, & ſe confondent quelquefois; de ſorte que deux points differens ne ſont repreſentez que par un ſeul ſur le plan de deſcription.

2.° Qu'une ſeule projection verticale ou horiſontale ne ſuffit pas pour exprimer ſur un plan la Figure, ou la ſituation d'un ſolide à l'égard de ce plan; mais qu'elles ſont neceſſaires toutes les deux; 1.° parce que les mêmes corps en differentes poſitions peuvent avoir la même projection; ainſi une Piramide quadrilatere droite, ou un Cône droit, par exemple, *Fig.* 215. 218. appuyée ſur ſon ſommet, lorſque ſon axe eſt perpendiculaire au plan de deſcription, a pour projection un quarré, & le Cône un cercle, comme s'il étoit appuyé ſur ſa baſe, *Fig.* 214. 217.

2.° Parce que les corps differens peuvent avoir la même projection; ainſi un Cône, un Cylindre, une Vis & une Sphère donnent également un cercle pour projection, *Fig.* 216. 217. 218. 219. 220. de même qu'un Cube, un Parallelepipede & une Piramide quadrangulaire donnent auſſi un quarré pour projection, *Fig.* 212. 213. 214. 215. un Anneau & un Helice ont également chacun une Couronne de cercle ou d'Ellipſe pour projection, *Fig.* 221. 222. ou, ſi nous prenons des exemples dans l'Architecture, nous trouverons que le *Plan* d'une voute ſur le Noyau & celui d'une Vis Saint Giles de mêmes diametres ne different en rien; celui d'une voute en plein ceintre Droit ſurmontée & ſurbaiſſée ou inclinée en deſcente, donnent auſſi le même Parallelograme dans leur projection, ainſi que les Voutes cylindriques & les ſphériques donnent le même *Profil.*

3.° Parce que des corps ronds ont des projections rectilignes égales ou ſemblables à celles des corps terminez par des ſurfaces planes, ainſi [*Fig.* 224.] un Cône couché, a pour projection un triangle rectiligne, de même qu'une Piramide, *Fig.* 225. & un cylindre ou une vis donne un Parallelograme, auſſi bien qu'un prime rectiligne, *Fig.* 226. 227. 228. & même un mixte [*Fig.* 229.]

4.° Parce que la projection change ſouvent la nature des choſes, la projection d'une ligne perpendiculaire au plan de deſcription n'eſt qu'un point; celle d'un plan en pareille ſituation n'eſt qu'une ligne; celle d'une ligne courbe qui ſeroit dans ce plan devient une ligne droite, ou ſi elle eſt inclinée à ce plan, elle peut changer d'eſpece, comme nous l'avons dit au Livre précedent, de cercle, elle peut devenir Ellipſe, ou d'Ellipſe, elle peut devenir un cercle.

5.° Enfin, parce que de la projection des ſolides, il en réſulte quelquefois des Figures ſi differentes de celles de leurs ſurfaces, qu'on ne peut les prévoir qu'avec une grande attention, comme nous l'avons fait remarquer de celle du Cube poſé ſur un de ſes angles, lorſque le diametre qui paſſe par les oppoſez, eſt perpendiculaire au plan de deſcription, ſa projection eſt un Exagone régulier; pour qu'on n'en doute pas, je vais en donner la démonſtration.

Fig. 223. Soit [*Fig.* 223.] le Cube AE poſé ſur ſon angle B; en ſorte que ſa diagonale SB ſoit perpendiculaire au plan PL: ayant diviſé les trois ſurfaces quarrées qui comprennent l'angle ſolide S par des diagonales, comme le quarré ASDG par la diagonale AD; à cauſe de l'égalité des quarrez, ces diagonales ſeront égales entr'elles, & formeront un triangle équilateral parallele au plan de deſcription; parce que ce triangle eſt la baſe d'une Piramide triangulaire droite, dont l'axe, qui eſt partie du diametre, eſt perpendiculaire au plan de deſcription (par la ſuppoſition;) donc la projection de ce triangle ſera auſſi un triangle égal à la baſe de cette Piramide. La méme choſe arrivera à l'égard des trois autres ſurfaces du Cube, qui comprennent l'angle ſolide oppoſé B, dont les diviſions des quarrez par des diagonales retrancheront une Piramide égale à la précedente, mais renverſée & tournée differemment, en ſorte que les angles de l'une ſeront au devant des faces de l'autre, & à diſtances égales; puiſque par la ſuppoſition les côtez & leurs inclinaiſons ſont égaux; ces deux triangles équilateraux donneront donc la poſition de ſix des angles du Cube, & les deux autres qui ſont aux extremitez du diametre, réunis par la projection dans un méme point, tomberont au milieu des deux triangles équilateraux, & ſeront le centre de l'éxagone, donc la projection du Cube ainſi poſé, eſt un éxagone régulier.

Pour faire connoître les angles élevez, & ceux de la projection, on a marqué les uns & les autres des mêmes lettres differenciées par des Majuſcules.

Il ſuit de ces remarques, que pour ſçavoir ſi un ſolide eſt contenu dans un autre, par exemple, un Tetraedre dans un Cube, ou un autre ſolide dans un Parallelepipede, tels que ſont ordinairement les quartiers de Pierres de taille; il faut faire autant de projections de ce ſolide, que le Parallelepipede a de ſurfaces qui ne ſont pas répetées dans leurs oppoſées, c'eſt-à-dire, trois, parce qu'il en a ſix, & appliquer chacune de ſes projections à la face qui lui convient, pour ſçavoir ſi elle n'excede point.

Dans l'Architecture ces projections ne ſe font que ſur des plans horiſontaux & verticaux, parce qu'on ne s'y conduit que par *l'Aplomb* & le *Niveau*. Ainſi des trois, il y en a toujours une horiſontale, qui eſt ap-

Digitized by Google

pellée le *Plan*, & deux verticales, dont l'une eſt *le Profil*, pour ce qui eſt vû de côté, & la troiſiéme eſt *l'Elevation*, pour ce qui eſt vû de face; mais parce qu'un ſolide peut être compris par des ſurfaces inégales de tous côtez; le cas peut arriver qu'on ait beſoin de ſix projections, ſçavoir de deux horiſontales, & de quatre verticales, c'eſt-à-dire, une pour chaque face du Parallelepipede, dans lequel on doit former le ſolide.

CHAPITRE II.

De l'Ichnographie, ou Projection Horiſontale,

En Termes de l'Art

DU PLAN.

DANS le deſſein que nous avons de conduire le Lecteur par des principes generaux à la connoiſſance des proprietez particulieres des ſections des corps, pour trouver les modeles des parties qui compoſent differentes eſpeces de Voutes; il auroit ſuffit de ne faire mention que de celles des ſphères, Cônes & Cylindres, comme nous avons fait juſqu'à preſent, mais à cauſe que ce III. Livre eſt une préparation à la pratique de la coupe des Pierres, il nous a ſemblé à propos d'entrer dans le détail de l'Architecture, & d'en parler le langage, dont nous avons joint ici une explication, à laquelle on pourra avoir recours pour en entendre les termes uſitez; mais comme elle n'eſt pas aſſez ample pour donner une parfaite intelligence des rélations des ceintres, nous commencerons par y ſuppléer.

Des differences Reſpectives des Ceintres.

On ſçait que les differentes ſections des corps ronds, tels que ſont les voutes, produiſent differentes lignes à leur ſurface, courbes ou droites; leſquelles ont chacune un nom pour les déſigner; les ſections tranſverſales & *Continuës*, ſont ſouvent appellées *Ceintres*, les parties de ces ſections interrompuës par la liaiſon des vouſſoirs s'appellent, *joins de Doele*. Les ſections longitudinales s'appellent *joins de Lit*, celles-ci ſont droites dans les Cônes & Cylindres, & courbes dans les Sphères, & les Anneaux & Helices; les parties de ces ſections qui ſont dans l'épaiſſeur de la voute, s'appellent *joins de tête*.

Les intervales ou diviſions des joins de Lit doivent être continuez avec une certaine régularité, tantôt en lignes droites paralleles, quelquefois en ſe rapprochant avec une certaine uniformité, comme concourant à un point fort éloigné; ſouvent en lignes courbes paralleles, ou concourant à un même point, comme aux Voutes ſphériques.

Lorsque les joins de Lit ſont paralleles entr'eux, comme aux Voutes cylindriques, il eſt clair que les ceintres circulaires & elliptiques qui les traverſent, doivent être diviſez en un même nombre de parties proportionelles; de ſorte que ſi deux ceintres ne ſont pas paralleles entr'eux, dans les voutes en Berceau, l'un étant circulaire, l'autre ſera neceſſairement Elliptique, ou tous les deux ſeront Elliptiques, & les diviſions de l'un déterminent neceſſairement celles de l'autre pour la quantité & la grandeur des *vouſſoirs*, qui ſont les Pierres qui la compoſent. Cette dépendance reſpective oblige l'Architecte à ſe déterminer ſur la Courbe qu'il veut former à une face de la voute, plûtôt qu'à l'autre, ou à celle qui réſulte de la ſection d'un plan perpendiculaire à ſon axe; celui de ces ceintres, auquel il fait le plus d'attention, & qu'il choiſit pour faire la diviſion la plus réguliere de ſes vouſſoirs, s'appelle le *Ceintre primitif*, l'autre dont la courbure & les diviſions dépendent de la ſuite des joins de Lit, & de la difference de poſition à l'égard de celui-ci, s'appelle *Ceintre ſecondaire.*

Fig. 230. Le Ceintre primitif eſt quelquefois réel comme en ABD [*Fig.* 230.] où l'on ſuppoſe une face biaiſe, qui doit paroître & ſubſiſter; ou ſimplement imaginaire & ſuppoſé comme *ima*, *Fig.* 231. où l'on ſuppoſe un plan tangent à une Tour, dans laquelle on veut faire une Porte, dont le ceintre réel qui ne peut être décrit ſur une ſurface plane, ne peut ſervir à régler les diviſions des vouſſoirs; de ſorte qu'on eſt obligé ou de les développer pour l'étendre ſur une ſurface plane, & alors il devient primitif, ou de ſuppoſer un ceintre dans un plan tangent à la Tour qui eſt un primitif ſuppoſé; parce qu'il ne doit pas ſubſiſter, ne ſervant qu'à déterminer les diviſions du réel, qui eſt le *ſecondaire.*

Mais ſi l'on développe le ceintre réel R*m*D ſur un plan, pour en faire le ceintre primitif, comme lorſqu'on veut que les têtes des vouſſoirs ſoient égales, le même ceintre conſideré comme appliqué à la ſurface courbe de la Tour, eſt un ſecondaire, ſoit que la ſurface ſoit convexe, comme à la Figure 231. ſoit qu'elle ſoit concave, comme à la Figure 232. où le ceintre ASD eſt ſuppoſé comme primitf, pour régler les diviſions du réel AMD dans le deſſein de l'Epure ſeulement. Où il faut remarquer que ſoit que ce ceintre primitif ſoit pris ſûr la corde de l'arc concave d'une Tour, ou ſur un plan tangent à la Tour parallele à cette corde, il n'en réſulte aucun changement au
Fig. 231. ceintre réel *ima*, *Fig.* 231. ou AMD, *Fig.* 232. & que ce ceintre pri-
Fig. 232. mitif ſuppoſé, eſt le même que celui de l'arc Droit; de ſorte qu'on peut dire alors que l'arc Droit eſt le ceintre primitif; mais ſi la diviſion ſe fait ſur un développement, il devient le ſecondaire, en ce que ſes diviſions en dépendent, & deviennent inégales, lorſque celles du développé ſont égales.

Si le Ceintre primitif ſuppoſé, n'étoit pas dans un plan parallele à la corde RD qui eſt perpendiculaire à la direction de la porte, comme L*b* qui lui eſt incliné, alors il y auroit trois ceintres à conſiderer, dont les diviſions ſeroient toutes inégales; ſçavoir, 1.° celles du ceintre primitif imaginaire; 2.° du ceintre réel à la ſurface de la Tour; 3.° & du ceintre de l'arc Droit dans l'épaiſſeur de la Tour, & chacun de ces ceintres ſeroit d'une courbure differente; ſçavoir, circulaire ou elliptique, & ellipſimbre: il faut expliquer ce que nous entendons par l'arc Droit.

De l'Arc Droit.

Le ceintre qui eſt la ſection d'un plan coupant l'axe d'une voute en Berceau à angle Droit s'appelle *l'arc Droit*, tel eſt l'arc RED [*Fig.* 230.] ou ROI, *Fig.* 235. & 237. ou ABD, *Fig.* 239. ce genre de ceintres peut être *primitif*, ou *ſecondaire*, ſuivant l'attention principale que l'on a aux faces, ou à l'interieur d'une voute. Dans les Figures 230. & 235. il ſemble être naturellement le ſecondaire, ſi l'on a principalement en vûë la régularité du ceintre de face apparente ABD. Dans la Figure 239. il eſt primitif, ſi ABD eſt la face apparente, parce qu'elle eſt perpendiculaire à la direction du Berceau.

D'ou il ſuit, 1.° que l'arc Droit n'eſt à plomb que dans les voutes Horiſontales, & qu'il eſt en talud & ſurplomb dans les inclinées, comme R*oi*, *Fig.* 235.

Secondement, qu'il n'eſt jamais parallele aux arcs de faces biaiſes à la direction des Berceaux, ſoit qu'ils ſoient de niveau, ou en deſcente, comme on voit aux Figures 230. & 235. où l'arc RED, R*oi* n'eſt pas parallele à ABD.

Troisie'mement, que l'arc Droit de toutes les voutes biaiſes & en deſcente n'eſt pas d'une courbure ni d'une largeur, ou hauteur égale à celle de l'arc de face, ainſi *Fig.* 230. ſuppoſant l'arc de face circulaire, l'arc Droit RED ſera ſurmonté elliptique, dont le petit axe RD ſera plus court que le diametre AD; & au contraire (à la Figure 235.) ſi ABD eſt circulaire R*oi* ſera elliptique ſurbaiſſé, dont le demi axe O*c* ſera plus petit que le Rayon BC.

Quatrie'mement, qu'il ne peut y avoir d'arc Droit, proprement dit, dans une voute conique, comme dans les Trompes, [*Fig.* 236.] parce que la ſurface de ſa Doele ne peut être à angle Droit ſur aucun plan, que ſuivant une ligne tirée de ſa baſe au ſommet du Cône, dont les côtez ſont convergens. *Fig.* 236.

Digitized by Google

Cependant le P. Deran appelle *arcs Droits* les *Biveaux*, c'eſt-à-dire, les angles de la doele & des lits.

Quelques-uns ont auſſi appellé arc Droit le ceintre primitif perpendiculaire à l'axe du Cône, parce qu'on s'en ſert comme de l'arc Droit pour la diviſion des vouſſoirs.

Il ſemble par ce que je viens de dire qu'il n'y a point d'arc Droit dans les voutes courbes par leur projection horiſontale; mais ſi l'on fait attention que l'angle que fait un Rayon avec ſa tangente eſt réputé Droit, ou infiniment peu different du Droit, on reconnoîtra facilement qu'ils ſont les arcs Droits des Voutes ſphériques, ſphéroïdes & annulaires.

Fig. 233. 1.° Que tout cercle Majeur d'une ſphère A B D, *Fig.* 233. eſt un arc Droit.

2.° Que dans les ſphéroïdes il y en a deux; ſçavoir, *a s b* qui eſt perpendiculaire à l'axe qui paſſe par les Poles du premier, perpendiculairement au plan de la baſe, ou projection du ſphéroïde, comme P *b p a*, *Fig.* 234. [*Fig.* 234.] & le ſecond ſera P S *p*.

Fig. 238. 3.° Que l'arc Droit d'une voute *Annulaire* eſt celui dont le diametre tend au centre de l'anneau s'il eſt circulaire, comme R *i*, *Fig.* 238. lequel eſt perpendiculaire à la tangente T N, & au plan de la projection A D F E, ſoit que la voute ſoit horiſontale, comme la *voute ſur le noyau*, ou qu'elle ſoit inclinée à l'horiſon, comme la vis St. Giles.

Si l'Anneau eſt Elliptique, comme la voute ſur un noyau Ovale, ſon arc Droit ſera la ſection Verticale, perpendiculaire à la tangente au point de diviſion de l'Ellipſe qui eſt la projection d'un joint de lit; il en ſera de même pour la vis St. Giles ſur un plan Ovale; alors la direction du diametre de l'arc Droit ne tend plus au centre du noyau.

U S A G E.

On connoîtra dans la ſuite que l'arc Droit eſt indiſpenſablement néceſſaire pour trouver les Biveaux & faire les panneaux, c'eſt lui ſeul qui détermine les angles mixtes des doeles & des joins, & qui ſert à faire les développemens des ſurfaces courbes des Cylindres; parce qu'étant perpendiculaire à toutes les paralleles à l'axe, dont le nombre infini forme la ſurface des Berceaux, il donne ſeul les meſures des largeurs de ces ſurfaces, & par conſéquent les intervales des joins de lit, qui ſont paralleles à l'axe du Cylindre: il en eſt de même à l'égard des Cylindres pliez ſur leurs axes d'une courbe Circulaire ou Elliptique, comme dans les voutes ſur le noyau.

zed by Googl

REGLES DU DESSEIN DE L'EPURE.

I.

Du PLAN, ou de la Projection Horiſontale.

Dans toutes les voutes où l'arc Droit & l'arc de face ſont inégaux, il faut commencer par *ſe déterminer au choix d'un des deux pour en faire le ceintre Primitif.*

LA Simetrie, la beauté ou la ſolidité étant les motifs de ce choix, il ne ſera pas difficile de ſçavoir lequel il convient de choiſir. Lorſqu'une face eſt apparente, il en faut faire le ceintre Primitif, afin que les Têtes des vouſſoirs ſoient égales, & que leurs joins ſoient dirigez ſuivant les perpendiculaires à leurs tangentes aux points de diviſion, ſi le ceintre eſt Circulaire, Elliptique ou de quelqu'autre courbe; mais ſi les Faces ſont cachées, comme lorſqu'une voute eſt terminée par deux murs, il eſt plus commode de prendre l'arc Droit pour le Primitif; car il faut remarquer que ſi l'un eſt Circulaire & l'autre Elliptique, celui qui ſera pris pour Primitif réglera les joins de l'autre en fauſſe Coupe, à moins que l'on ne faſſe les lits Gauches, parce que les joins de tête du Circulaire tendent à l'axe du Berceau, & les joins de tête du ceintre Elliptique ne tendent pas au centre de l'Ellipſe par où paſſe l'axe du Cylindre; de ſorte que les lits changeroient d'inclinaiſon inſenſiblement, ce qui donneroit un lit Gauche, & que l'on doit éviter dans la pratique, à cauſe de la difficulté de l'exécution.

Remarque ſur le choix du Ceintre Primitif aux Voutes extradoſſées.

Un Architecte eſt aſſez le Maître de choiſir pour ceintre Primitif l'Arc de face, ou l'arc Droit, lorſqu'une voute n'eſt pas extradoſſée; mais lorſqu'elle l'eſt, il ne convient pas toujours qu'il choiſiſſe l'arc de face; car s'il s'agit d'un Berceau ou d'une voute Conique biaiſe, dont l'arc de face ſoit Circulaire, il eſt évident par le Theoreme II. du I. Livre que l'épaiſſeur deviendra plus grande à la clef qu'aux impoſtes; de ſorte que les vouſſoirs y deviendront plus peſans qu'aux impoſtes, ce qui eſt contre la bonne conſtruction, & cependant qu'aucun Auteur de la coupe des Pierres n'a remarqué; il convient donc alors de choiſir l'arc Droit pour centre Primitif, le faiſant Circulaire, ou ſi l'on veut un peu ſurmonté,

SECONDE REGLE.

Diviſer le Ceintre Primitif en autant de parties égales qu'on veut avoir de rangs de Pierres ou Vouſſoirs, & régulierement en nombre impair.

Cette operation conſiderée geometriquement, eſt preſque toujours impoſſible, parce qu'elle dépend de la triſection de l'angle qu'on n'a pas encore trouvée; mais cette préciſion eſt inutile dans les Arts, il ſuffit de chercher ces diviſions en tâtonnant, d'autant plus qu'elles ſont arbitraires; puiſqu'on peut faire ſans difformité des voutes de Pierres d'une largeur inégale, pourvû que chaque rang ſoit exactement parallele, & que la difference des largeurs ſoit peu ſenſible.

Nous ajoûtons que les diviſions doivent être en *nombre impair*, afin qu'il ne ſe trouve point de joint au milieu du ceintre; mais une Pierre également appuyée ſur les deux côtez de la voute qu'elle doit fermer dans l'exécution, on l'appelle pour cette raiſon *la Clef*, nom qui n'eſt pas affecté à une ſeule Pierre, mais au rang de vouſſoirs qui eſt le plus élevé: ce n'eſt pas qu'un joint ſur le milieu d'un ceintre tirât beaucoup à conſéquence pour la ſolidité; mais il choqueroit la vûë & la bonne ordonnance.

Il en faut cependant excepter les pans des voutes ſphériques établies ſur un quarré; on doit leur tracer un joint au milieu dans l'Epure ſeulement, mais non pas dans l'exécution, parce que ce joint n'eſt que l'angle d'un vouſſoir qui fait enfourchement, dont les branches ſe réuniſſent à cette ligne du ſommet; c'eſt pourquoi on diviſe le nombre des vouſſoirs de chaque côté en parties égales.

Par la même raiſon de Simetrie, il ne convient pas de diviſer le côté d'un ceintre depuis la clef juſqu'à l'impoſte en plus grand nombre de vouſſoirs que l'autre, à moins que les impoſtes ne ſoient pas de niveau entr'elles, comme dans les arcs Rampans, ou que la quantité des vouſſoirs ſoit aſſez grande de chaque côté, pour qu'on ne s'apperçoive pas d'un rang de plus ou de moins; c'eſt pourquoi les arcs Rampans peuvent être diviſez en nombre pair.

La raiſon pour laquelle il faut commencer par la diviſion du ceintre Primitif, eſt qu'il faut avoir la projection Horiſontale des joins de lit de chaque Rang de vouſſoir, qu'on ne peut tailler qu'après en avoir déterminé les largeurs par le nombre qu'en doit contenir le contour du ceintre, & que lorſque les voutes ſont biaiſes, ces largeurs de tête deviennent inégales, ſoit dans les arcs de face, ſoit dans les arcs Droits qui ne ſont pas paralleles entr'eux; de ſorte qu'il faut prévoir ce que la largeur d'une

d'une tête biaiſe doit donner à l'arc Droit, ou ce que celle de l'arc Droit donnera d'augmentation à l'arc de face biaiſe.

TROISIE'ME REGLE.

Diviſer les Arcs exterieur & interieur du Ceintre Primitif, qui comprennent l'épaiſſeur de la Voute en parties proportionnelles par des perpendiculaires à ces Arcs, aux points de leurs Diviſions, pour régler l'inclinaiſon des joins de Tête.

Nous avons donné au Livre, Problémes 26. 27. & 28. la maniere de tirer ces lignes, qu'on appelle les *joins de Tête*, comme 11, 22, 33, 44, *Fig.* 237. 238. 39. & 40. non ſeulement pour les ceintres circulaires, mais auſſi pour toutes ſortes de courbes des ſections Coniques, & nous avons fait voir que la pratique des Ouvriers n'eſt pas exacte pour d'autre Courbe que pour le cercle.

Sur quoi il y a trois choſes à remarquer. La premiere, que l'on doit tirer les joins de Tête perpendiculairement aux tangentes des Courbes des ceintres aux points de leur diviſion dans les arcs de Face ſeulement, où l'on a la liberté de les incliner comme l'on veut; mais non pas aux ceintres Elliptiques des arcs Droits, lorſqu'ils ſont ſecondaires, parce que les Lits des vouſſoirs ne ſeroient pas continuez dans un même plan, comme nous l'avons dit ci-devant.

La deuxiéme, que lorſque le ceintre primitif eſt circulaire, les joins du ſecondaire Elliptique, doivent être tirez au centre de l'Ellipſe, plûtôt que perpendiculairement à la tangente ſur la diviſion, parce que les plans des lits doivent tous s'entrecouper dans l'axe du Berceau Cylindrique, comme on l'enſeignera au IV. Livre de differentes manieres.

La troiſiéme, qu'aux arcs de face Elliptique, il faut ſe contenter de faire les joins de tête perpendiculaires aux arêtes de Doele, parce qu'on ne peut les faire en méme tems perpendiculaires à celle de l'extrados d'une Ellipſe concentrique ſemblable, que par le moyen d'une Courbe qui ne convient ni au joint de Tête ni au Lit, qu'il faut affecter de faire toûjours plan. La raiſon eſt que les arcs des Ellipſes Aſymptotiques, c'eſt-à-dire, concentriques & ſemblables ne ſont pas paralleles, comme ceux de deux cercles, par conſéquent la perpendiculaire à la tangente de l'une ne peut ſe réunir avec celle de l'arc proportionel de l'autre.

La premiere raiſon ſur laquelle eſt fondée cette diviſion proportionelle de l'arc exterieur & de l'interieur, qui comprennent l'épaiſſeur de la voute, concerne la ſolidité, parce que les têtes des vouſſoirs devienent par cette conſtruction, en forme de coin, plus large du côté exterieur que de l'interieur, la circonference de l'un étant plus grande que celle de

l'autre, les parties aliquotes en ſont auſſi plus grandes; de ſorte que la Pierre ne peut paſſer par l'ouverture inferieure de l'intervale de deux vouſſoirs, qui eſt plus étroit à la Doele qu'à l'Extrados; ainſi étant preſſée par ſa peſanteur contre les vouſſoirs Collateraux, qui ſe ſervent mutuellement d'appui les uns aux autres, elle eſt ſoutenuë en l'air par la réſiſtance des derniers appuis, qui ſont les Piedroits, leſquels doivent avoir aſſez de force pour contrebalancer l'effort que ces vouſſoirs ou eſpeces de coin font pour les écarter.

Nous avons encore deux autres raiſons de cette conſtruction; la premiere concerne la Simetrie, afin de conſerver toûjours une inclinaiſon uniforme des joins de tête ſur la courbe du Ceintre; car quand même les parties de l'arc exterieur & de l'interieur ne ſeroient pas proportionelles, la voute n'en ſubſiſteroit pas moins, pourvû que celles de l'interieur ſoient toujours plus petites que celles de l'exterieur, il n'en réſulteroit d'inconvenient que de la difformité, & une inégale impulſion des vouſſoirs contre leurs Collateraux.

La ſeconde raiſon eſt pour une plus grande ſolidité, parce que les plans qui paſſent par les joins de tête, qu'on appelle les lits, étant perpendiculaires à la tangente de l'arc au point de ſa diviſion, font avec la Doele de part & d'autre le plus grand angle qu'ils puiſſent faire, qui eſt le Droit, ou infiniment peu different du Droit; car ſi on le faiſoit obtus d'un côté, il rendroit l'autre aigu.

Or il importe que les réſiſtances des *Arêtes*, c'eſt-à-dire, des angles des Pierres, ſoient égales pour porter également la charge, car il eſt clair que la plus forte feroit caſſer la plus foible, comme l'expérience le fait voir aux platebandes, où l'on eſt forcé d'en agir autrement; ce que nous ferons remarquer au Livre ſuivant, en donnant les moyens d'y remedier.

QUATRIE'ME REGLE.

Abaiſſer des Perpendiculaires de chacun des Points de diviſion de l'Arc exterieur & de l'interieur ſur le Diametre commun prolongé, où il le faut, pour en avoir la projection ſur une ligne droite.

Fig. 237. 238. & 239. Sort [*Fig.* 237. 238. & 239.] les arcs ABD exterieur, & *abd* interieur diviſez en parties proportionelles A 1, 1. 2, 3. 4, & *a* 1, &c. par les lignes 1. 1, 2. 2, 3. 3, 4. 4, on abaiſſera ſur le diametre commun *ad*, & ſur ſon prolongement AD des perpendiculaires de chaque point de diviſion 1. 2. 3. 4. leſquelles pour l'arc exterieur ſeroient 1 E, 2 F, 3 G, 4 H, & pour l'interieur 1 *e*, 2 *f*, 3 *g*, 4 *h*, pour avoir les projections des diviſions de l'arc exterieur aux points E F G H, & de l'interieur aux points *e f g h*.

Digitized by Google

Les perpendiculaires, dont il eſt ici queſtion, ſont ordinairement en œuvre des verticales, c'eſt-à-dire, en termes de l'art des *à-Plombs*, & lorſque le diametre du Ceintre n'eſt pas horiſontal, comme il arrive aux arcs Rampans, au lieu du diametre on ſubſtituera une ligne horiſontale, juſqu'à laquelle on prolongera ces perpendiculaires au deſſous du diametre incliné.

La raiſon de cette operation eſt qu'elle fournit une maniere commode de trouver l'inclinaiſon de chaque Corde des arcs du ceintre diviſé en vouſſoirs, en ce que chacune de ces Cordes devient l'Hypotenuſe d'un triangle rectangle, dont la projection donne la longueur de la jambe horiſontale *a e* pour le premier de l'interieur a *e* 1, *Fig.* 239. & *e f* ou ſon égale 1 *K* pour le ſecond triangle 1 K 2; de ſorte qu'il ne reſte plus qu'à trouver la hauteur de l'autre jambe du triangle rectangle *e* 1 ou K 2, pour avoir les deux extremitez de l'arc ou de ſa Corde, *a* & 1, ou 1 & 2, pour avoir ſa poſition à l'égard de l'horiſon; ce que la difference des perpendiculaires ſur le diametre donne facilement, en retranchant de la hauteur 2*f*, la premiere hauteur *e* 1.

Il eſt viſible que ces differences de hauteurs où ces hauteurs à l'Impoſte *a* ſont les Sinus Droits de l'inclinaiſon des Cordes des diviſions des ceintres, & les lignes horiſontales trouvées par la projection *a e*, *e f* ſont leur ſinus de Complément.

Or avant que de creuſer les arcs dans la Pierre, on commence toujours par en trouver les Cordes par pluſieurs raiſons, qu'on verra dans la ſuite. Cette pratique eſt la fondamentale de toutes les projections, on la trouvera repetée à chaque Trait de la coupe des Pierres au IV. Livre; *c'eſt pourquoi il eſt bon d'y faire attention.*

Il faut remarquer que quoique les lignes qui ſont la projection des arcs ſoient verticales dans l'exécution, il n'importe dans le deſſein de l'Epure en quelle ſituation on les trace, pourvû qu'elles ſoient toujours perpendiculaires à une ligne ſuppoſée horiſontale.

Cet avertiſſement n'eſt pas inutile pour les Commençans qui trouvent étrange, que dans l'Epure on place les ceintres quelquefois dans une ſituation renverſée, ou pour la commodité de l'arangement de la Figure, à laquelle on joint le plus ſouvent les parties contiguës, ou pour éviter la confuſion des lignes qui ſe croiſent; ou pour s'accommoder à la place du papier, ou du mur ſur lequel on fait le Trait.

L'imagination doit redreſſer les plans couchez ſur d'autres plans, avec leſquels ils doivent faire des angles Droits, aigus ou obtus; or en quelque

ſituation que l'on les ſuppoſe, les perpendiculaires à leur commune interſection donneront toujours les mêmes points de projection des arcs; ainſi, *Fig.* 239. ſi l'on ſuppoſe les arcs B D, M D & *b d*, *p d* égaux entr'eux, & également diviſez aux points 3. 4. *o* & *n*, il eſt évident que les perpendiculaires tirées à leur interſection commune C D, donneront les mêmes points de projection *g* & *h* pour les points *o* & *n*, comme pour les points 3 & 4; ainſi dans les Traits, on trouvera des ceintres placez indifferemment en tout ſens, ſuivant la commodité de la Figure & du Papier.

CINQUIE'ME REGLE.

Mener par les Points de projection des diviſions des Ceintres, des Lignes droites ou courbes, comme il convient à la direction des joins de Lit de chaque eſpece de Voute, qui en expriment la projection.

Fig. 237. 238. Soit [*Fig.* 237. & 238.] la ligne *a d*, le diametre d'un ceintre ſur lequel on a trouvé par la projection les points *e*, *f*, *g*, *h*, qui expriment les diviſions des joins 1, 2, 3, 4, ſi la voute eſt Cylindrique comme à la Figure 237. pour trouver la direction des joins de lit, & la tracer, il ne s'agit que de mener des paralleles à l'axe, ou aux côtez du Berceau par les points *e*, *f*, *g*, *h*, comme *e k*, *f l*, *g m*, *h n*, & ſi le Berceau n'eſt pas droit, mais tournant comme une voute ſur le Noyau circulaire, *Fig.* 238. aulieu de lignes droites, on tirera des arcs de Cercles concentriques à ſes côtez, ou des arcs d'Ellipſes, ſi cette voute tourne en Ellipſe, & l'on aura la direction des joins de lit, comme *e k p*, *f l g*, *g m r*, *h n s*.

Fig. 233. Si la voute eſt ſphérique, comme à la Figure 233. du point C pour centre, il faut décrire autant de cercles concentriques par les points de projection des joins, on aura de même la direction de ces joins, qui eſt encore parallele aux Piedroits de la voute.

Fig. 240. Enfin ſi la voute eſt Conique, comme à la Figure 240. ayant trouvé la projection des diviſions du ceintre primitif A M B aux points F D N O, on tirera par ces points & par le ſommet interieur du Cône S les lignes *s* F, *s* D, *s* N, *s* O, qui ſeront les directions des joins de lit.

Par où l'on voit, que dez qu'on a la projection des diviſions du Ceintre primitif, on a auſſi la direction des joins de lit exprimée ſur le plan Horiſontal.

Il faut ſeulement excepter de cette remarque les voutes ſphériques, ou ſphéroïdes, dont les joins de lit ſont dirigez à des Poles horiſontaux; parce que leurs projections ſont des Ellipſes qui ſe croiſent aux Poles, comme les ſommets de deux Cônes égaux tournez en ſens contraire ſur un axe commun, qu'on pourroit inſcrire dans le ſphéroïde.

Digitized by Google

La raiſon de cette operation eſt que les vouſſoirs doivent être couchez, ſuivant leur plus grande longueur dans une ſituation horiſontale, ou qui en approche autant qu'il eſt poſſible, pour leur donner une meilleure aſſiete; or lorſqu'ils ſont rangez ſuivant la direction d'un Berceau horiſontal, où ils ſont toujours horiſontaux dans un ſens, ils s'appuïent totalement ſur leurs lits, mais dans les voutes inclinez, ils s'appuïent ſur leurs Têtes, quelquefois autant que ſur leurs Lits.

Secondement, on prolonge la direction des joins de lits dans la longueur, ou dans le circuit de la voute, afin de leur donner la grace d'une Simetrie de lignes droites ou courbes paralleles aux Impoſtes, leſquelles ſont une eſpece d'ornement dans les Voutes ſphériques, & ſi on s'écarte de cette diſpoſition en inclinant les joins, c'eſt encore pour en faire un ornement plus ſingulier par un arrangement d'arcs.

On pourroit obſerver une pareille Simetrie à l'égard des joins montans, qu'on appelle joins de Doele qui les traverſent; comme je l'ai vû exécuté au Pont d'Avignon ſur le Rône, dans la partie qui ſubſiſtoit ſur le petit bras de la Riviere. Mais il en réſulte deux inconveniens, l'un pour la conſtruction, en ce que l'on n'a pas la liberté d'y employer des Pierres de longueurs inégales, l'autre pour la ſolidité, parce que les parties ne ſont pas liées enſemble; de ſorte que dans l'exemple que je viens de citer, le quart, la moitié & même les deux tiers du Pont pouvoient tomber ſans entrainer le reſte, ce que l'Architecte avoit peut être fait à deſſein.

Il peut encore arriver qu'une partie de voute s'afaiſſe davantage en ôtant les ceintres que les voiſines, dont l'appareil a pû être mieux exécuté, & faire ainſi des inégalitez dans la Doele; enfin l'uſage eſt de prolonger par une ſuite réguliere les joins de Lit, & non pas ceux de Doele, qui ne doivent faire aucune ſuite, que lorſqu'on veut affecter de la deliaiſon.

Les lignes de la projection des joins de lit, quoique ſimples dans l'Epure, ſont la repreſentation de trois lignes de la voute; ſçavoir, de l'intervale vuide qui reſte entre deux vouſſoirs, que l'on remplit quelquefois de Mortier; & des deux angles ou arêtes de ces deux vouſſoirs, qui ſe touchent à la ſurface de la Doele; c'eſt pourquoi on les appelle en termes de l'art *le Plan des arêtes des joins de Lit*, diction impropre qu'on ne peut adopter, puiſqu'on ne peut dire le plan d'une ligne, mais bien la *projection* d'une ligne.

L'on verra au Livre ſuivant de quel uſage ſont les projections des joins de lit; nous dirons ſeulement à l'égard des voutes Cylindriques, qu'elles ſervent à couper proportionellement les diametres des differens ceintres,

ſur leſquels élevant des perpendiculaires égales à celles qui tombent des diviſions du ceintre primitif, on trouve les hauteurs & les diviſions des joins de chaque ceintre; ainſi, *Fig.* 239. à cauſe des paralleles *ap*, *ee*, *ff*, &c. les diametres *ad* & *pq* ſont diviſez proportionellement de même que *pq* & *rs*; de ſorte que le diametre *ad*, projection de l'arc primitif *abd*, eſt diviſé proportionellement au diametre *rs*, & parce que les hauteurs du Berceau ſont ſuppoſées égales par-tout en faiſant *yt*, *zu* égales à *e1*, *f2*, on aura les diviſions du troiſiéme ceintre; ce qui ſera expliqué plus au long dans la ſuite.

Si après avoir fait la projection des joins de Lit de la Doele ou Intrados, on en fait autant pour ceux de l'Extrados; on trouvera les points des diviſions des ceintres exterieurs, leſquels étant joins par une ligne aux interieurs, donneront l'inclinaiſon des plans des lits. Mais pour ne pas multiplier les lignes, on ne tire ces projections que dans le beſoin; nous les omettons preſque toujours dans cet Ouvrage, pour éviter la confuſion dans les Traits de l'Épure, où elles cauſent un embarras qui n'eſt pas un petit obſtacle à l'intelligence des Traits de la coupe des Pierres.

Pour faire la projection des joins de lit des voutes Coniques, dont les ſommets ſont loin, ou ſeulement hors de l'étenduë de la ſurface, ſur laquelle on la veut tracer, il ne ſuffit pas d'avoir la projection des joins d'un ceintre primitif, il en faut un ſecond; parce que ces lignes n'étant pas paralleles entr'elles, doivent tendre à un point qui eſt le ſommet du Cône, & ſi le ſecond ceintre n'étoit pas parallele ou ſemblable au primitif, on pourroit être embaraſſé pour aligner ces joins, dont il n'y a qu'un ſeul point donné par la projection ſur le diametre du ceintre primitif; voici un moyen aiſé de le faire.

Probleme I.

Par un Point donné auprès de deux Lignes convergentes, en mener une troiſiéme qui tende au même ſommet de l'Angle qu'elles feroient, ſi elles étoient prolongées.

Fig. 241. 242. Soient *Fig.* 241. 242. les lignes AB & CE inclinées entr'elles, & le point D entre les deux, ou au dehors; on tirera à volonté par ce point la ligne DAC, *Fig.* 242. ou ADC, *Fig.* 241. qui coupe les deux lignes données en A & en C; on lui menera enſuite une parallele BE, à telle diſtance qu'on voudra, & les diagonales AE, BC par les points où cette parallele coupe les lignes données. Du point D par H, ſection des diagonales, on tirera DG, & tranſportant la grandeur GE, de B en X, on tirera DX qui ſera la ligne cherchée.

Digitized by Google

DEMONSTRATION.

A cauſe des triangles ſemblables ADH, EGH, on a AD: EG:: AH: EH, & les triangles ſemblables ACH, EBH donnent AH: EH:: AC: BE, donc auſſi AD: EG ou BX:: AC: BE; *ce qu'il falloit faire.*

SIXIE'ME REGLE.

Les Lits des Voutes Cylindriques & Coniques doivent être, autant qu'il eſt poſſible, des Surfaces planes.

La raiſon eſt que la ſurface plane étant la plus ſimple, eſt par conſéquent la plus facile à exécuter, & la plus propre à s'adapter ſur une ſemblable; en ſorte que l'intervale des joins devienne le moindre qu'il eſt poſſible dans l'exécution; On éprouve en effet que lorſque les ſurfaces ſont courbes aux lits & aux joins, elles ſont rarement aſſez bien exécutées dans leur concavité ou convexité pour que l'une s'ajuſte bien dans l'autre; on eſt toujours obligé d'y retoucher, & de les preſenter ſouvent pluſieurs fois avant que l'une & l'autre ſurface s'ajuſtent bien enſemble; c'eſt par cette raiſon, que plûtôt que de faire des lits gauches, on aime mieux les faire en fauſſe coupe, comme dans les Deſcentes biaiſes, & dans ce Trait qu'on appelle *la Corne de Vache*, où l'on tire les joins du centre du petit ceintre, lequel étant excentrique au grand, ne peut avoir pour joint la même ligne; puiſque le Rayon du petit ne peut pas être perpendiculaire aux arcs du grand, dont les Rayons partent d'un autre point.

On pourroit cependant excepter certaines voutes irrégulieres, comme des Berceaux Elliptiques par un bout, & Circulaires par l'autre, dont les faces ſont apparentes; parce qu'outre la difformité qui en réſulteroit ſur chaque face, où les joins de tête ſeroient en fauſſe coupe, les lits plans pourroient couper les Doeles à angles trop aigus, qui ſeroient ſujets à faire caſſer les arêtes des vouſſoirs en les taillant, en les poſant, ou à la ſeule charge.

SEPTIE'ME REGLE.

Les Lits des Voutes ſphériques ou ſphéroïdes ſont des Surfaces Courbes.

La raiſon eſt qu'ils ſont formez par la révolution des joins de tête *e* 1, *f* 2, *g* 3, autour de leur axe BC, auquel ils ſont inclinez; d'où il ſuit qu'ils ſont alternativement concaves & convexes pour s'adapter les uns dans les autres, comme des Cornets. *Fig.* 233.

REMARQUE.

Les Lits des Voutes Cylindriques, Sphériques & Coniques régulieres ſont des Surfaces qui ont toujours deux côtez paralleles, ſoit qu'elles ſoient planes, ou qu'elles ſoient courbes.

La raiſon eſt que les voutes ſont ordinairement d'une même épaiſſeur; or comme les Lits s'étendent du dedans au dehors, ils ſont terminez d'un côté par la Doele, & de l'autre par l'Extrados, qui ſont paralleles au moins horiſontalement.

Et quoique la voute ne ſoit pas extradoſſée d'une égale épaiſſeur, ſi elle eſt Cylindrique, & qu'elle s'épaiſſiſſe vers les Reins, ſuivant la Courbe que M. Parent a trouvé pour balancer la pouſſée par l'augmentation d'épaiſſeur des vouſſoirs, dont on parlera au IV. Livre; il ſeroit encore vrai que les lits auroient deux côtez paralleles entr'eux, parce que cette épaiſſeur coupée ſuivant la direction de la voute, ſeroit toujours la même à chaque lit, la difference ne tombant que ſur les ſurfaces des joins de Doele, ou de tête, & non pas ſur les lits où la Puiſſance qui réſiſte au poid, doit toujours être égale à égale diſtance du point d'appuy.

HUITIE'ME REGLE.

Pour connoître ſi l'on peut prendre des meſures ſur une Projection, il faut examiner ſi l'Objet qui eſt projetté, étoit parallele au Plan de deſcription.

Nous avons donné la raiſon de cette Régle, lorſque nous avons démontré que la projection faite par des lignes perpendiculaires à un plan, racourciſſoit toujours l'objet projetté, qui n'étoit pas parallele à ce plan; parce que ſa longueur étoit l'Hypotenuſe d'un triangle rectangle, dont la projection n'eſt que le côté. C'eſt par cette raiſon, que pour avoir les meſures des vouſſoirs des Deſcentes biaiſes, il en faut faire deux projections, l'une horiſontale qui donne des meſures trop courtes, & l'autre ſuivant la Rampe ſur un plan qui lui ſoit ſuppoſé parallele. Ainſi l'on verra dans le IV. Livre, que quoique la maniere de tracer une voute en Deſcente biaiſe rachetant un Berceau par Equarriſſement, ſoit la même que celle de tracer une Porte biaiſe en ſurplomb, il faut meſurer le biais de la Porte ſur le plan de niveau, & celui de la Deſcente ſur le plan incliné, appellé *plan ſuivant la Rampe*, parce que le plan de niveau eſt trop court; ce qui fait voir la neceſſité de faire un Profil des Rampes, ou ce qui eſt la même choſe, leur projection ſur un plan vertical, pour faire enſuite une nouvelle projection ſur un plan incliné, par le moyen duquel on puiſſe trouver les meſures des vouſſoirs, dont les joins de lit ſont paralleles à la Rampe.

CHAPITRE

CHAPITRE III.

De l'Ortographie, ou de la Projection ſur un Plan Vertical.

I.°

DU PROFIL.

ON ne peut trouver par le moyen de la projection horiſontale, ou *Plan* ichnographique, que des meſures horiſontales, comme nous venons de le dire; mais parce qu'on a auſſi beſoin des meſures verticales, & quelquefois des projections ſur un plan incliné, qu'il faut rapporter à un plan vertical, cette maniere de deſſein qu'on appelle *Profil*, n'eſt pas moins neceſſaire que la precédente qu'on appelle *le Plan*.

La projection verticale change de nom, ſuivant la ſituation dans laquelle on repreſente les Objets; s'ils ſont repreſentez par le côté, ſuivant leur profondeur, on l'appelle *Profil*: s'ils ſont repreſentez dans leur interieur, ſuivant une longueur parallele à leur ſurface qu'on ſuppoſe ôtée, on l'appelle *Coupe*; & s'ils ſont vûs en face, on l'appelle *Elevation*.

Cette difference qui ne conſiſte que dans la dénomination, n'en fait aucune dans la maniere de faire les repreſentations. C'eſt toujours une projection ſur un plan vertical, & à bien prendre la choſe, c'eſt encore la même que pour faire la projection horiſontale; car il n'y a qu'à ſuppoſer une poſition de plan vertical, au lieu d'un plan horiſontal, & mener ſur ce plan des lignes horiſontales, au lieu de verticales, par les angles ou diviſions de l'objet. S'il ne s'agiſſoit ici d'introduire le lecteur dans les principes d'un Art, dont il faut lui donner des idées diſtinctes, nous aurions confondu le Plan, le Profil & l'Elevation ſous le même nom de *Projection*; car les Régles qui en conſtituent la difference, ne ſont purement qu'accidentelles.

PREMIERE REGLE.

Pour les Voutes Cylindriques.

Un Ceintre ſuppoſé en ſituation Verticale étant donné, il faut mener par tous les Points de ſa diviſion en Vouſſoirs des Lignes horiſontales, juſqu'à la rencontre d'une Ligne verticale ou ſuppoſée telle, pour en faire le Profil.

Cette Régle ne differe de la quatriéme du chapitre précédent, qu'en ce que ces lignes ne ſont pas menées ſur le diametre horiſontal, mais ſur une ligne qui lui eſt perpendiculaire, comme A E, [*Fig.* 243.] ſur le Rayon C A, ſur laquelle on a mené les paralleles à l'horiſon B E, 4*f*, 3*g*, 2*h*, 1*i*, pour *Fig.* 243.

avoir les hauteurs des points 4, 3, 2, 1, raſſemblées ſur cette ligne AE.

On pouvoit au lieu des horiſontales BE, 4*f*, 3*g*, &c. abaiſſer des perpendiculaires 4*p*, 3*q*, 2*r*, 1*s*, comme l'on a fait ci-devant pour la projection horiſontale, & tranſporter avec le compas la longueur de chacune de ces lignes ſur AE, à commencer du point A; ſçavoir, *p*4 en A*f*, *q*3 en A*g*, &c. & l'on auroit eu les mêmes points E*f g b*; mais il convient pour la pratique de les chercher par des perpendiculaires ſur AE, parce qu'elles en ſont connoître les origines, & le point de diviſion qu'on a voulu repreſenter; ce qui empêche la confuſion, d'autant plus que chaque point de la ligne AE en repreſente toujours deux, lorſque les ceintres ſont également diviſez dans chacune de leurs moitiez; comme ils le ſont ordinairement, ou doivent l'être pour plus de régularité; ce qui fait que dans nos Figures de Profil, 243. & 244. nous ne mettons qu'un quart de cercle, qui eſt une moitié de ceintre, au lieu du demi cercle qui fait un ceintre tout entier; où l'on peut remarquer qu'il eſt indifferent de placer la verticale du Profil hors du cercle, comme AE à la Figure 243. ou dans le cercle, comme *b*R à la Figure 245.

La raiſon pour laquelle on raſſemble ainſi toutes les hauteurs des diviſions d'un ceintre ſur une ſeule ligne, eſt premierement pour faire voir l'effet d'une voute vûë de côté, où les directions des joins de lit ſe reſſerrent à meſure qu'ils approchent du ſommet, quoiqu'en effet, ils ſoient diſtribuez autour du ceintre à diſtances égales.

Secondement, pour changer la direction de ces joins, lorſque les Berceaux ſont inclinez, comme à la Fig. 245. où ſe rencontrent ſous quelque angle que ce ſoit, comme on voit à la Fig. 244. ce qui détermine les hauteurs inégales des Berceaux de même largeur, qui ſont inclinez entr'eux.

Troisie'mement, pour trouver les hauteurs des diviſions des ceintres des Faces inclinées à l'horiſon; car en les ſuppoſant ſur un plan vertical, comme CBA, *Fig.* 244. & les raſſemblant ſur une ligne auſſi verticale CB; il ne s'agit plus que d'incliner cette ligne, comme en C*b*, dans la ſituation où elle doit être à l'égard de l'horiſon, c'eſt-à-dire, ſuivant ſon Talud, & par des arcs de cercle B*b*, *fn*, *gm*, &c. on aura toutes les hauteurs de ces diviſions *bv*, *nu*, *mt*, *lx*, *ky*, leſqu'elles ſont differentes des premieres BC, 4*p*, 3*q*, 2*r*, 1*s* qui étoient plus grandes.

SECONDE REGLE.

Mener des paralleles à la direction des Voutes en Berceau, par les Points de leur projection ſur une Ligne verticale, pour y marquer les joins de Lit, & lorſque ces paralleles rencontrent une Ligne de jonction de deux Berceaux, reproduire ces mêmes Lignes parallelement à la direction du ſecond Berceau, & ainſi d'un troiſiéme.

Digitized by Google

Cette Régle ſe comprendra facilement par l'exemple de la Fig. 245. où l'on a repreſenté une Deſcente $bnpR$, & à la Figure 244. une autre HD, qui aboutit à deux Berceaux horiſontaux EDCb dans le bas, & HG, c^3, b^3 dans le haut. *Fig.* 244. & 245.

Ayant trouvé par la Régle precédente les diviſions de la ligne Cb, égales à CB, on tirera par les points trouvez nm, lk, les paralleles nx, my, lY, $k2$, juſqu'à la rencontre de la ligne ED, qui repreſente le plan de l'Ellipſe commune aux deux Cylindres EDCb & HD, & par les points x, y, Y, z, on tirera autant de paralleles à la ligne EH ou DG, qui donneront les intervales des joins de lit du ſecond Berceau plus reſſerrez juſqu'à la ſeconde ligne HG, d'où on les reproduira parallelement à Hb^3, direction du troiſiéme Berceau, où ils le ſeront encore plus; on continueroit de méme pour les directions des Lits d'un quatriéme, s'il y en avoit.

La raiſon de cette operation, eſt que les joins de Lit doivent être continuez en ligne droite, parallelement à la direction des Piedroits des voutes, & à leurs Impoſtes: c'eſt pourquoi ils ſont repreſentez par des lignes paralleles dans le *Profil*, comme nous l'avons dit du *Plan*; la ſeule difference eſt que les paralleles de la Projection horiſontale ſe reſſerrent vers les Impoſtes, & que dans le Profil, elles ſe reſſerrent vers la Clef, & les intervales de ces paralleles meſurez perpendiculairement, ſont les ſinus Droits de l'inclinaiſon des Cordes des arcs de chaque vouſſoir, comme les intervales des paralleles de la Projection horiſontale, ſont les ſinus de leurs Complémens; de ſorte qu'ayant trouvé les uns & les autres par ces deux ſortes de Projection, on a les deux jambes du triangle rectangle, dont l'hypotenuſe eſt la Corde de l'arc du ceintre, que comprennent les diviſions de chaque vouſſoir; par conſéquent on a la poſition de cette Corde à l'égard de l'horiſon, & l'angle qu'elle doit faire avec la Corde de l'arc ſuivant, ſoit qu'il ſoit portion de Cercle ou d'Ellipſe.

TROISIE'ME REGLE.

Tranſporter toutes les Perpendiculaires tirées des diviſions du Ceintre primitif au Rayon vertical, ſur le demi diametre de chaque Berceau, pour avoir la Courbe des Ceintres ſecondaires, tant des arcs Droits, que des inclinez.

Soit *Fig.* 241. le quart de cercle CBA, moitié du Ceintre primitif diviſé à ſa circonference aux points 1, 2, 3, 4, ayant tiré par ces points des perpendiculaires à ſon demi diametre vertical, comme 1i, 2h, 3g, 4f, on les tranſportera ſur tous les differens demi-diametres des Berceaux. *Fig.* 244.

1.° Comme l'incliné en Talud Cb, 2.° le vertical bv, qui eſt l'Arc Droit.

3.° L'incline' de rencontre FD.

Digitized by Google

4.° Le perpendiculaire à la direction c^2, b^2, qui eſt l'arc Droit de la deſcente HD.

5.° L'INCLINE' de rencontre HG.

6.° Le vertical de ſortie c^3, b^3, qui eſt auſſi un arc Droit, en un mot par-tout où l'on voudra avoir le changement des ceintres que donnent les differentes ſections des plans paſſans par ces demi-diametres. Ainſi pour former le ceintre de l'arc Droit du Berceau Rampant HD ; ayant tiré à volonté la perpendiculaire b^2, c^2, qui coupera les paralleles originaires des points 1, 2, 3, 4, aux points d, d, d, on portera ſur chacune de ces paralleles les longueurs correſpondantes au ceintre Primitif AB, des Ordonnées $1i$, $2b$, $3g$, $4f$, en $d1$, $d2$, $d3$, $d4$, & l'on aura l'arc Droit ſurbaiſſé b^2, a^2, on tranſportera auſſi les mêmes Ordonnées perpendiculairement ſur les diviſions de la ligne HG, pour avoir l'arc de rencontre H3, ig, enfin ſur la ligne c^3, b^3, comme le marquent les mêmes chiffres pour avoir le dernier ceintre de face ſuperieure b^3, a^3. On obſervera la même conſtruction à l'égard de la ligne DE, ſi l'on vouloit avoir le ceintre de rencontre des differens Berceaux, avec cette ſeule difference, qu'au lieu des lignes obliques qui les coupent au Profil, il faut leur mener des perpendiculaires ſur chacune des diviſions, que donnent ces lignes, comme on voit en Gg, $u1$, $v2$, $v3$; ce qu'on n'a pas fait dans cette Figure, pour éviter la confuſion.

La raiſon de cette operation, eſt que les largeurs des Berceaux étant par-tout égales, leur difference ne peut être que dans les hauteurs. Quoique les Berceaux ſoient inclinez à l'horiſon, les Ordonnées paralleles au plan qui paſſe par les Impoſtes ſeront des horiſontales, & par conſéquent égales à celles qui étoient paralleles au Rayon AC, leſquelles déterminent les largeurs, & coupent les demi-diametres, qui ſont dans des plans verticaux en parties proportionelles, telles que doivent l'être les abſciſſes des Ellipſes.

Si les Berceaux étoient Rampans ſuivant les Impoſtes, alors la ligne AC devlendroit inclinée au Rayon vertical CB, & toutes les autres Ordonnées lui ſeroient paralleles.

Sur quoi il eſt aiſé de remarquer qu'il n'eſt pas indifferent de prendre pour ceintre Primitif une face couchée en Talud, comme Cb, ou ſa hauteur verticale bv, qui eſt l'arc Droit du Berceau horiſontal ; puiſque ſi l'un eſt en plein ceintre, l'autre ſera ſurbaiſſé ou ſurmonté ; c'eſt à l'Architecte à voir ce qui convient le mieux à ſon deſſein.

Des Profils des Berceaux à double Obliquité.

Tous les Profils dont nous venons de parler, ne ſuppoſent qu'une

igitized by Googl

obliquité, ou de direction, à l'égard du plan vertical, comme les Deſcentes; ou d'inclinaiſon de face, comme les Taluds; mais il en eſt d'autres qu'on ne peut exprimer dans les Profils, ſans racourcir ou les faces ou les axes; de ſorte qu'on ne peut plus y prendre de meſure, telles ſont les obliquitez du Biais ſimple, du Biais & du Talud joint enſemble, ou de la Deſcente & du Biais; parce qu'alors ſi le plan de deſcription eſt parallele à une des directions, il ne l'eſt pas à l'autre.

On verra dans le IV. Livre la maniere de faire les Profils de ces differentes eſpeces de voutes obliques, & de ſuppléer par le Plan horiſontal, & des ſeconds Profils aux racourciſſement qui ſe trouvent dans les parties du premier, qui n'y peuvent être dans leurs meſures.

Comme nous ne donnons ici que les Régles generales, nous n'entrerons point dans le détail de toutes les differentes compoſitions d'obliquité; mais nous ferons voir comment on peut les réduire en une ſeule.

Probleme II.

Réduire toutes les differentes Obliquitez de biais, de Talud & biais, de biais & deſcente, de deſcente, Talud & biais, en une ſeule, pour ne faire qu'un Profil, qui exprime toutes ces Obliquitez, & conſerve les meſures que l'on y doit prendre.

Ce Problême qui eſt le principe ſecret & miſterieux de la methode de Desargues, ſera détaillé au IV. Livre pour toutes ſortes de Berceaux en particulier, où nous expliquerons ce qu'il a caché ſous des noms impropres, qu'on trouve dans le Livre de Bosse.

Premierement, il eſt clair que toutes les obliquitez qui ne ſont pas de directions differentes, peuvent ſe réduire à une ſeule; ainſi [*Fig.* 244.] dans une deſcente HD, le Talud HG ou le ſurplomb ED étant perpendiculaires au plan vertical paſſant par l'axe du Cylindre DG, peuvent être exprimez dans le même Profil differemment ſitué, ſans aucun changement; car ſi je prends DG pour une horiſontale, quoiqu'elle ſoit inclinée, il n'en réſultera d'autre changement que celui de nom; ſçavoir que HG que j'avois appellé Talud à l'égard de l'horiſon G a^3 ou CD, s'appellera ſurplomb à l'égard d'un horiſon DG, & qu'au contraire DE qui étoit en ſurplomb deviendra un Talud. Ainſi j'ai déja réduit deux obliquitez de deſcente & Talud en une ſeule de ſurplomb, & celle de deſcente & ſurplomb en une de Talud. *Fig.* 244. & 245.

Secondement, [*Fig.* 245.] je puis changer une obliquité ſimple en une autre obliquité connuë ſous un nom different; ſi par exemple je conſidere le demi Berceau R*bup*, comme incliné à l'horiſon OR, je puis

Digitized by Google

le conſiderer auſſi comme horiſontal ſur R p, mais biais à l'égard d'une ligne de face R h conſiderée comme étant dans le plan de ſuppoſition horiſontal h R p, au lieu que dans la premiere ſuppoſition, elle étoit verticale dans le même plan conſideré en ſituation verticale, ſans qu'il en réſulte d'autre changement, que celui du *niveau* en *à plomb*; la ſeule difference qui en réſulte, eſt la tranſpoſition de la Clef au lieu où étoit l'Impoſte, & la diviſion des vouſſoirs qu'on commencera à une extremité d'un Rayon, au lieu de la commencer à l'autre, ſi l'arc de face eſt circulaire, mais s'il étoit ſurbaiſſé ou ſurhauſſé, il en réſulteroit une tranſpoſition d'axe du grand au lieu du petit, & du petit au lieu du grand; ce qui arrivera à l'arc Droit, ſi l'arc de face eſt circulaire.

Au reſte il eſt clair que cet arc Droit n'eſt pas ſuſceptible d'aucun autre changement, quand même on augmenteroit ou diminueroit le talud, le biais, la deſcente ou le ſurplomb.

Si cependant les obliquitez des faces ſont doubles de differentes directions, comme de Biais & Talud tout enſemble, ou deſcente & de Biais; alors on ne peut pas les réunir en une par la ſeule tranſpoſition du niveau en à plomb; il faut chercher la poſition du diametre de plus grande obliquité, qui eſt celui de la ſection d'un plan paſſant par l'axe perpendiculairement à la face du Berceau.

Fig. au deſſus du 247. Soit A B [dans la Fig. au deſſus du chiffre 247.] le Diametre horiſontal d'un Berceau, dont la direction horiſontale de ſon Piedroit eſt A G, & celle de ſon axe qui lui eſt parallele eſt C X, faiſant avec A B l'angle aigu X C A, ſoit auſſi l'inclinaiſon de ſa face en Talud, ſuivant un angle donné S C T, ou ſon Complément T C B, du point C pour centre & C A pour Rayon, ayant décrit un cercle A S B K, qui coupera C T en T, on tirera de ce point T une parallele à A C B, & du point A une perpendiculaire A x à l'axe donné C E, qui coupera T t en t, ſi par ce point t & le centre C, on tire une ligne D I, on aura l'obliquité ſimple t C, compoſée des deux P C du Biais, & t P du Talud, laquelle ſera la projection d'un plan paſſant par l'axe perpendiculairement à la face, & par conſéquent celle d'une partie de l'axe ſur le diametre de la plus grande obliquité. Pour détacher ces deux lignes confonduës par cette projection, on menera par le point t une perpendiculaire indéfinie t F, qui rencontrera la ligne de Talud T C prolongée en F, je dis que l'angle t C F eſt celui de l'axe avec le diametre de la ſection de la face coupée par un plan paſſant par l'axe & perpendiculairement à cette face.

Demonstration.

Soit tirée A x perpendiculaire à E C qui rencentrera T t au point t.

Digitized by Google

Si l'on ſuppoſe deux Cylindres horiſontaux de baſes égales & de differentes directions de Biais & de Talud, que nous exprimerons par celles de leurs axes EC oblique ſur AB, & SC qui lui eſt perpendiculaire; ſi l'on fait mouvoir ces deux Cylindres en ſens contraire chacun autour de ſon axe, il eſt clair que le point T décrira un arc de cercle en l'air, dont la projection eſt la ligne T*t*, & que le point A tournant autour de l'axe XC décrira un autre arc, dont la projection eſt A*x*, qui rencontrera le precédent en un point en l'air, qui ſera exprimé au plan horiſontal par le point *t* commun aux deux diametres, & la ligne *t*C ſera la projection du Rayon CT dans un plan vertical, commun aux deux baſes des Cylindres; lequel Rayon eſt auſſi commun à la baſe d'un troiſiéme Cylindre, qui auroit pour axe DC, & pour inclinaiſon de ſa face l'angle DCF; car ſi l'on fait mouvoir le diametre TCF autour de cet axe, il eſt clair que le point F décrira en l'air un arc, dont F*t* eſt la projection, par conſéquent au lieu de conſiderer les deux Cylindres precédens, je puis ne conſiderer que le troiſiéme, dont l'obliquité FCD ſur ſon axe CD raſſemble celle des deux autres, ſuppoſant toûjours des baſes égales.

Il eſt viſible que ſi l'on prolonge la perpendiculaire juſqu'à la circonference du cercle en H, & qu'on tire HC, on aura un angle DCH égal à DCF, & par conſéquent que le diametre de plus grande obliquité pourra être repreſenté en deſſus en HK, ou en deſſous en FT, & l'axe par HC ou DC, puiſque l'angle de leur rencontre eſt toûjours le méme en C.

Cela ſuppoſé, ſi l'on prend DI pour diametre de la baſe, il ſera évident qu'il ſera celui de la plus grande obliquité, puiſque le plan *t*HC paſſe par l'axe HC, & par la perpendiculaire H*t* qui eſt horiſontale ſur une ligne DI, qui eſt dans un plan incliné coupé par un vertical; or cette ligne H*t* qui eſt le ſinus droit de l'angle HCD, eſt la plus courte de toutes celles qu'on peut mener d'un point H de l'axe au diametre DI; par conſéquent l'angle HCD eſt le plus petit de tous ceux que l'axe peut faire avec un des diametres de la baſe; *ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

De la connoiſſance de cet angle, il ſuit qu'on peut faire le Profil d'un Berceau à double obliquité, ſuivant les mêmes Régles que pour ceux qui n'en ont qu'une, ou deux de même direction, réduites à une; la difference qu'il y aura, c'eſt qu'au lieu de prendre la baſe horiſontale de la face donnée pour celle de la projection des diviſions de ſon ceintre en vouſſoirs, on prendra le diametre trouvé DI, ſur lequel on abaiſſera des perpendiculaires des points de ces diviſions; ce qui oblige à la deſcription d'un peu plus de la moitié de la baſe, ajoûtant au deſſous de AB l'arc

BI=AD; ainſi pour faire la projection des Impoſtes A & B, on menera de ces points ſur le diametre DI les perpendiculaires A*a*, B*b* qui donneront des points *a* & *b*, leſquels ne ſeront plus aux extremitez du diametre de baſe, comme ils étoient auparavant. Cependant il eſt viſible que ſi par ces points *a* & *b*, on mene des paralleles *a*X, *b m*, à l'axe HC, on retombera dans le cas de la pratique ordinaire de la Figure 245. ſuppoſant l'angle A*R p* égal à l'angle DCH de celle-ci; ſoit qu'on réduiſe les deux obliquitez au ſimple biais, ou à la ſimple deſcente Droite.

COROLLAIRE II.

PUISQUE cette conſtruction change l'angle XCA du premier Biais en HC*a*, celle du Piedroit AG ſera tranſportée en *a*X parallelement à l'axe, & les lignes *a r* & *b*R perpendiculaires à l'axe exprimeront, le demi diametre de l'arc Droit, paſſant par les joins de lit des Impoſtes, il en ſera de même pour tous les autres joins de lit; ce qui fait voir comment on peut revenir à la même pratique de Profil qui a été expliqué à la Figure 244. où l'on a fait l'arc Droit a^2, b^2, par le moyen du demi diametre c^2, b^2, perpendiculaire à l'axe DG, diviſé en ſes abſciſſes, c'eſt-à-dire, qui ſont des diſtances équivalentes à des hauteurs des retombées; ce que nous expliquerons plus au long au IV. Livre.

COROLLAIRE III.

SI au lieu de conſiderer le diametre AB, comme horiſontal dans un plan incliné, on le conſidere comme étant dans un plan vertical le diametre DI ſera incliné à l'horiſon, & ſi l'on veut auſſi ſuppoſer DI horiſontal, AB ſera incliné à l'horiſon, & *m*L perpendiculaire à DI ſera une verticale, laquelle ſera perpendiculaire à l'axe horiſontal HC, quoique tous les autres diametres poſſibles lui ſoient inclinez; d'où il ſuit que quelque Biaiſe que ſoit une voute, il y aura toûjours une tête de lit, où il n'y aura du tout point de Biais, & qui ſera parfaitement à l'équerre.

COROLLAIRE IV.

IL ſuit auſſi que tous les angles des têtes des lits des vouſſoirs compris entre *m* & D ſeront obtus, & entre *m* & I, ils ſeront aigus plus & moins, ſelon qu'ils approcheront des extremitez D ou I, ce qui doit s'entendre auſſi des côtez oppoſez au deſſous du diametre DI; parce que les côtez des Cylindres étant paralleles à leur axe, l'angle de chacun de ces côtez avec un diametre donné, eſt égal à celui que fait l'axe avec ce même diametre.

COROLLAIRE

Corollaire V.

Puisque les angles que l'axe fait avec chacun des diametres du cercle de la baſe du Cylindre ou face du Berceau, ſont tous inégaux; il ſuit qu'on peut faire une infinité de Profils differens d'un même Cylindre ſcalene, dans leſquels il paroîtra plus ou moins incliné; en ſorte que s'il eſt fait par le diametre perpendiculaire à celui de plus grande obliquité, le Profil de ce Cylindre, ou ce qui eſt le même, d'un Berceau biais, ſera le même que celui d'un Droit.

Corollaire VI.

Si l'on tire auſſi une perpendiculaire *nu* à l'axe HK, elle repreſentera un des diametres de l'arc Droit, lequel étant ſuppoſé circulaire, la courbe de la face ſera une Ellipſe, dont le grand axe ſera dans la plus grande obliquité DI, le petit axe en *m*L, qui lui eſt perpendiculaire; ce qui donne une facilité pour en tracer le ceintre.

Corollaire VII.

Au reſte de quelque Courbe que ſoit le ceintre de face, ou celui de l'arc Droit, la maniere de trouver le diametre de la plus grande obliquité ſera toujours la même; car le demi diametre CT ſera égal à FC, quoique l'on ſubſtituë une Ellipſe au lieu du cercle THF, & les perpendiculaires T*t* & A*x* aux directions SC, EC ſe rencontreront toujours au même point *t*, ſi ſans égard à l'arc de face, on prend ſur AC une longueur égale à CF ou CT, ce qui eſt indépendant du ceintre de face; en effet il eſt clair que quand même on ne prendroit que la moitié de ces lignes, les perpendiculaires *t*T & A*t*, qu'on peut conſiderer comme les côtez d'un Parallelograme, ne feroient que ſe rapprocher parallelement, & par conſéquent ſe couperoient toujours dans la même diagonale *t*C; ce qui ſuffit pour donner l'angle DCF, de l'axe avec le diametre de plus grande obliquité qu'on cherche.

Corollaire VIII.

Puisque l'inclinaiſon du diametre DI de plus grande obliquité, avec la ligne horiſontale donnée pour baſe de la face AB, & l'angle de cette ligne DI, avec celle qui repreſente l'axe HC, ſont les ſeules choſes eſſentielles à la réduction de l'obliquité; il eſt clair que leur tranſpoſition au deſſus ou au deſſous de la ligne AB, ne changent rien à la conſtruction, & qu'ainſi il importe peu que l'axe ſoit en HC ou en FC, pourvû que l'une & l'autre de ces lignes faſſent le même angle avec la ligne DI, & qu'ainſi il importe peu de faire le Profil du Talud au deſſus ou au deſſous de la ligne

AB; mais en ce cas il faut changer le côté de la perpendiculaire à l'axe de A en B.

Secondement, il faut obſerver que le talud & le ſurplomb, la deſcente & la montée à ouvertures d'angles égales avec l'horiſontale AB, donneront toujours le même angle de l'axe HC avec le diametre DI, mais en differens ſens; de ſorte que les directions oppoſées donneront des angles de differente nature, l'un aigu & l'autre obtus; mais qui feront toujours les ſuppléments à deux droits l'un de l'autre.

Troisie'mement, que les Profils des angles d'inclinaiſon perpendiculaire à une même direction, comme la deſcente & le talud, la montée & le talud doivent être rangez d'un même côté au deſſous de l'horiſontale AB, lorſque l'un doit être ſouſtrait de l'autre, & des deux côtez, lorſqu'ils doivent être ajoûtez; ſçavoir, le Talud au deſſous, & la deſcente au deſſus, comme nous le ferons voir au IV. Livre; parce que ſi l'on retranche de l'angle de la montée celui du Talud, l'angle de la face avec l'axe qui étoit déja aigu, le devient encore plus. Et ſi l'on retranche le Talud de l'angle de la deſcente, qui eſt équivalent à un ſurplomb à l'égard de l'axe conſideré en ſituation horiſontale, & par conſéquent obtus, le ſurplomb diminuë & approche plus du Droit; ce ſera la même choſe ſi l'on ajoûte l'angle du Talud au complément du ſurplomb ou deſcente; cet angle qui étoit aigu avec cette addition approchera plus du droit, par conſéquent l'obliquité de l'axe ſur la face diminuera.

Des Profils des Voutes Coniques.

Les Profils des Trompes & autres voutes Coniques qui ſeroient faits ſuivant les mêmes Régles que ceux des Cylindriques ou Berceaux, ſeroient inutiles pour la conſtruction des Traits.

Fig. 247. La raiſon eſt que les projections des joins de Lit, n'étant pas paralleles entr'elles, ne peuvent l'être auſſi à un même plan vertical; par conſéquent (par le I. Corol. du Chap. V. du II. Livre,) ces points ne peuvent y être repreſentez dans leurs juſtes meſures; ils ſeront tous plus courts au Profil, que dans la réalité, excepté un qui peut être dans un plan vertical. Ainſi ſuppoſant le Profil S*b*P [*Fig.* 247.] formé ſur la projection SPL, il ne s'y trouvera de meſure juſte, que la longueur du milieu de la Clef S*b*, dont SH eſt la projection horiſontale; car il eſt viſible que l'Impoſte SL, ou ſon égale SP, eſt plus courte que ſon Profil *s*P; puiſque SP eſt l'hypotenuſe d'un triangle rectangle, dont *s a*P eſt un côté, les autres lignes S*n*, S*o* qui repreſentent les joins de Lit, ſeront un peu moins racourcies, à meſure qu'elles approchent du plan vertical S*b*P.

D'ou il ſuit, que puiſque tous ces Profils racourciſſent inégalement

Digitized by Google

les joins de Lit; on ne peut en trouver toutes les valeurs raſſemblées dans un ſeul plan, comme celles des joins des Berceaux, excepté aux voutes qui ſont des portions de Cônes droits ſur une baſe Circulaire; parce qu'alors la valeur de tous les joins de Lit eſt donnée ſans le ſecours du Profil dans le ſeul plan horiſontal, ces Lits étant tous égaux à celui d'une des Impoſtes.

QUATRIE'ME REGLE.

Dans les Traits des Voutes Coniques Scalenes, il faut faire autant de Profils qu'il y a de joins de Lit, dont les Hauteurs ou les Projections horiſontales ſont inégales, pour en trouver la juſte valeur.

J'entends par le mot de *Scalene*, non ſeulement la voute dont la projection horiſontale ou verticale eſt un triangle ſcalene, mais auſſi celle dont le plan horiſontal eſt un triangle iſoſcele, & dont l'axe eſt Droit ſur ſa baſe, qui n'eſt pas circulaire, mais Elliptique, ou de quelqu'autre Courbe.

Soit [*Fig.* 247.] SAB, le plan horiſontal d'une Trompe que nous conſiderons comme biaiſe, quoiqu'elle ſoit droite, pour ne pas multiplier les Figures; ſur AB, comme diametre de la baſe du Cône, qui eſt la face de la Trompe, ayant décrit la courbe de ſon ceintre, comme le demi cercle AHB ou une demi-Ellipſe, & l'ayant diviſé en ſes vouſſoirs aux points 1, 2, 3, 4; on abaiſſera des perpendiculaires de chacun ſur AB, pour en avoir la projection horiſontale aux points D, E, F, G, d'où par le ſommet S du Cône, on tirera les lignes DS, ES, FS, GS, qui ſeront les projections des joins de Lit à la Doele, dont il faut chercher la valeur par le Profil. *Fig.* 247.

Puisque tous les joins rencontrent le plan horiſontal en S, il eſt viſible qu'ils ſont tous chacun l'hypotenuſe d'un triangle rectangle, dont on a les deux côtez donnez; ſçavoir, la hauteur des points 1, 2, 3, 4, ſur le plan horiſontal, & la diſtance de leurs projections D, E, F, G du ſommet S, dans la projection horiſontale.

Ainsi on peut faire ces Profils de differentes façons qui viennent toutes à la même fin.

1.° On peut élever aux points D, E, F, G des perpendiculaires égales aux hauteurs D1, E2, F3, G4, & tirer les hypotenuſes demandées, comme E2 en Ee, D1 en D*d*, les lignes S*e* & S*d*, ſeront les vraies longueurs des joins de Lit.

2.° Pour abreger, & profiter des angles droits tout faits, on peut porter les projections ſur la baſe BA prolongée; par exemple, ES en

E*x*, & DS en DY, les lignes *x* 2, & Y 1, ſeront les vraies longueurs des joins de Lit, auſquels les oppoſez correſpondans aux points 3. & 4. ſeront égaux, parce que le Cône eſt droit; il n'en ſeroit pas de même s'il étoit ſcalene, la Trompe étant biaiſe.

Ces deux manieres ſont bonnes en elles-mêmes, mais lorſqu'il y a beaucoup de vouſſoirs, elles produiſent une multiplicité de lignes qui cauſe de la confuſion; c'eſt pourquoi je crois qu'il convient mieux de porter tous les Profils hors du plan ſur une baſe commune.

3.° On prendra une ligne quelconque qui paſſe par les ſommets S hors du plan, comme SL ſur laquelle on tranſportera par des arcs de cercle, faits du méme point S pour centre, toutes les longueurs des projections SC, SF, SG, en K, L, *n*, où l'on élevera des perpendiculaires KH°, L3′, *n*4, les lignes 3′S, 4S ſeront les Profils des joins de Lit, paſſant par les points 3 & 4, & H°S, celui du milieu de la Clef. Comme il eſt évident par la conſtruction, qui eſt la même que la précédente. Cette méthode débaraſſe le *Plan*, & les arcs CK, FL, G*n*, marquent les origines des Profils, pour qu'on ne s'y méprenne pas. Le reſte de la Figure ſert pour les diſcours ſuivans.

Les valeurs des joins de Lit étant trouvées, il ſera facile de faire les Profils des ſurfaces des Lits, c'eſt-à-dire, des ſections du Cône par des points donnez à la circonference de ſa baſe, & par ſon ſommet S perpendiculairement à chaque tangente menée par ces points; parce que ſi la baſe eſt circulaire, on a trois côtez du triangle de cette ſection; ſçavoir, l'axe qui eſt commun à tous, le Rayon de la baſe qui eſt toujours le méme, ſi elle eſt circulaire, & le joint de Lit trouvé; l'angle de ſupplément à deux droits du Rayon avec le joint de Lit, eſt le Profil de la téte de Lit.

Mais ſi la baſe eſt Elliptique ou de quelque autre courbe, alors la ſection du Lit prolongée ne paſſera plus par l'axe du Cône, mais toujours par le ſommet S, & la rencontre du joint de tête avec le plan horiſontal ſera facile à trouver; car ſuppoſant N*e* un joint de tête perpendiculaire à la courbe ondée A*e*H, il n'y a qu'à le prolonger juſqu'à la rencontre du diametre de la face AB en E, la ligne SE ſera la ſection qui tient lieu d'axe, E*e* celle du Rayon de la face, ainſi avec le joint de Lit, on aura le triangle de la ſection interieur du Cône, dont l'angle de ſupplément à deux droits ſera le Profil de la téte du vouſſoir.

Ou l'on voit qu'on n'a pas la même facilité qu'aux Berceaux où cet angle eſt toujours égal à celui d'un diametre de la baſe avec l'axe du Cylindre, parce que les côtez du Cône ſont convergens.

Digitized by Google

Nous n'avons conſideré juſqu'ici qu'une ſeule obliquité dans le Cône; ſi l'on doit avoir attention à pluſieurs, comme lorſqu'une Trompe eſt biaiſe & en Talud, il faut réduire ces deux obliquitez en une, de la même maniere que nous l'avons dit pour les Berceaux, & ayant trouvé le diametre de plus grande obliquité, & ſon angle avec l'axe, on fera le Profil d'une voute à double ou triple obliquité, comme pour la ſimple biaiſe.

Probleme III.

Tracer le Profil d'une Voute Conique à double ou triple obliquité de Biais, Talud & Deſcente.

Puisqu'on ne peut exprimer la longueur d'une ligne inclinée à un plan, que par ſa projection ſur un plan qui lui ſoit parallele; il eſt clair qu'on ne peut faire un Profil d'un Cône ſcalene que dans un plan parallele à celui qui paſſant par ſon axe eſt perpendiculaire à la baſe, & ce Profil ne peut encore ſervir qu'à trouver les meſures des trois lignes qui ſont dans ce plan; ſçavoir, des deux côtez, le plus long & le plus court, & de l'axe du Cône; ainſi il eſt inutile de vouloir entreprendre un Profil d'un Cône ſcalene ſur tout autre diametre, que celui de la plus grande obliquité.

Nous en avons déja dit autant pour les Profils des Cylindres ſcalenes; mais à cauſe que les côtez ſont paralleles à l'axe, l'obliquité ne leur cauſe aucun changement, comme aux Cônes où ils s'alongent, & ſe racourciſſent continuellement de part & d'autre de la ſection perpendiculaire par l'axe.

Ainsi le Probléme ſe réduit à chercher cette ſection.

Pla. 22. Fig. 265.

Soit, Planche 22. *Fig.* 265. le cercle AHBK, la baſe du Cône, ayant tiré par le centre C un diametre quelconque DE prolongé vers G, on portera de C en G la plus grande obliquité, comme celle du biais, & l'autre du Talud en GP perpendiculairement à GE; la ligne PB menée par le centre C ſera la ſection d'un plan perpendiculaire à la baſe AHBK, & paſſant par l'axe du Cône, laquelle réduit les deux obliquitez de Biais & de Talud en une ſeule de ſimple Biais PC, plus grande qu'aucune des deux autres, étant l'hypotenuſe d'un triangle rectangle, dont elles ſont les côtez.

Presentement on peut trouver tous les côtez du Cône ſans avoir recours à aucune nouvelle projection; on élevera PX perpendiculaire ſur PB, & égale à la hauteur du Cône, ou diſtance perpendiculaire de la baſe au ſommet. Puis ayant pris à volonté au contour de la baſe autant de points que l'on voudra 1, 2, 3, E, 5, 6, 7, D, on prendra les intervales de chacun de ces points au point P, & on les portera ſur PB

Digitized by Google

aux points 7° 6° 5° 3°, & par ces points, & le ſommet X, on tirera les lignes XA, X7°, X6°, X5°, X3° XB qui ſeront les vraies longueurs des côtez du Cône, avec leſquels chacun en particulier, la longueur de l'axe XC, & le Rayon CA forment autant de triangles, on aura les Profils de toutes les ſections du Cône, & par conſéquent en prenant les ſupplémens des angles du côté, & du Rayon, tous les Profils des têtes des Lits.

SI l'on compare ce Profil avec celui de la projection verticale S*de*, faite ſur une baſe *de* parallele au diametre donné DE, on reconnoîtra qu'aucune de ſes lignes n'eſt égale, ni à la longueur ni à l'inclinaiſon qu'elle doit avoir ſur le plan de la baſe; & par conſéquent qu'elles ſont inutiles pour y prendre aucunes meſures de Profil, ce qui eſt aſſez clair ſans démonſtration, puiſque I*c*=GC eſt plus petit que PC, & la hauteur PX=IS, il ſuit que l'angle I*c*S eſt plus grand que PCX, par conſéquent le Profil de projection n'a pas aſſez d'obliquité.

USAGE.

CE Problême nous ſervira à faire voir qu'on peut beaucoup abreger les Traits des voutes coniques biaiſes en deſcente, en ſurplomb ou en Talud; lorſque nous parlerons des Traits particuliers dans le IV. Livre; puiſqu'on peut réduire toutes ces obliquitez differentes en apparence à une ſeule comme aux Berceaux, la montée peut être réduite en Talud ſimple, la deſcente en ſurplomb ſimple, la montée en Talud, à un Talud plus oblique de la quantité du Talud, la deſcente en Talud, à un ſurplomb moins oblique de la quantité du Talud, le biais en Talud ou en ſurplomb, à un plus grand biais, comme on le voit dans cet exemple; de ſorte que toutes les obliquitez étant réduites en une, il ne reſte plus qu'à voir quel angle le diametre donné DE fait avec celui de la plus grande obliquité AB, pour y rapporter les projections des points de diviſion en vouſſoirs, qu'on a coûtume de faire ſur le diametre donné ordinairement, horiſontal ou incliné, s'il s'agiſſoit d'une face rampante.

SI au lieu d'une projection verticale ſur le diametre DE, on avoit voulu la faire ſur le diametre *c*6 au lieu du biais GC, on auroit eu pour toute obliquité de l'axe celle du Talud GP, qu'il auroit fallu porter de I en *p* ſur l'horiſontale *dp*, & tirer *p*S qui donne une obliquité d'axe toute differente; enfin ſi on avoit propoſé le Profil ſur le diametre HK perpendiculaire à PC, toute l'obliquité ſe feroit évanoüie, la ligne SI auroit repreſenté l'axe, alors le Profil du Cône ſcalene n'auroit en rien differé de celui du Cône droit.

D'ou il ſuit que d'une infinité de Profils poſſibles, il n'y en a qu'un

Digitized by Google

qui puiſſe donner les meſures des côtez, & de l'axe d'un Cône ſcalene.

Remarque ſur les Profils en General.

Les multiplicitez des lignes qu'on trouve dans les Traits viennent principalement des Profils, or je regarde comme une maxime que

On doit éviter autant qu'il eſt poſſible l'aſſemblage de pluſieurs Profils ſur un même Plan, & particulierement les lignes inutiles qui n'indiquent que de loin, & par de longs renvoys leurs origines; c'eſt pourquoi lorſqu'on a un grand nombre de vouſſoirs dans une face, il convient mieux de mettre les Profils chacun à part, ou du moins une partie d'un côté, l'autre de l'autre, que de les mettre ſur les baſes de leur projection.

La raiſon de cette maxime eſt toute ſimple, lorſque les objets ſe preſentent en trop grand nombre, ils partagent trop notre attention, & fatiguent l'eſprit occupé à démêler ceux que nous devons choiſir, ce qui arrive particulierement, lorſque les lignes de Doele & d'Extrados ſont tirées, & comme mélées; ſecondement, parce qu'il eſt aiſé de ſe tromper & de prendre les unes pour les autres.

J'ajoute qu'il faut retrancher les lignes inutiles qui ne ſervent qu'à indiquer par de longs circuits les origines des Profils, parce qu'on en trouve ſouvent de cette eſpece dans les Traits des Auteurs de la coupe des Pierres, qui embroüillent extrêmement les Epures.

Pla. 20.

Je puis donner pour exemple le Profil d'une deſcente à la Fig. 248. où le Parallelograme AE eſt la moitié du plan horiſontal d'un Berceau avec ſes projections de joins de Lit $1^{p}N$, $2^{p}n$ provenant des diviſions 1, 2, de la moitié du ceintre de face HA; le Parallelograme be eſt le Profil de ce Berceau, où l'on veut ſituer les joins de Lit dans la diſtance qu'il convient. La maniere ordinaire, eſt de les y conduire par de longs circuits des lignes que l'on voit dans la Figure $1\,1^{a}\,1^{d}$, $2\,2^{a}\,2^{d}$, $H\,a\,b$, que l'on peut ſupprimer ſans ſe priver de l'indication de l'origine des Profils, comme on voit à la Figure 245. car ayant fait à l'ordinaire la projection horiſontale des joins de Lit par le moyen du ceintre AHB, diviſé en ſes vouſſoirs aux points 1, 2, 3, 4, on trouvera les Profils des mêmes joins de Lit, en répetant la moitié de l'arc de face en $o\,L\,b$, & menant par ſes diviſions 1, 2 des horiſontales 1D, $2d$, qui donneront ſur la ligne de Profil $A\,R\,b$ les points d & D, par où on menera des paralleles à la Rampe $R\,p$, leſquels ſeront les Profils demandez; ce qui ſupprime comme l'on voit beaucoup de lignes droites & d'arcs de cercles inutiles, & marque, de plus près, l'origine de chacune des lignes de Profil, ſans ofuſquer inutilement le Lecteur.

Fig. 248.

De l'Elevation.

Il eſt encore une eſpece d'Ortographie, c'eſt-à-dire, de repreſentation des hauteurs, qu'on appelle *l'Elevation*, laquelle ne differe du Profil qu'en ce qu'elle a pour objet les parties exterieures, & apparentes au dehors, au lieu que le Profil eſt deſtiné pour exprimer les profondeurs auſſi bien que les hauteurs.

Dans tous les Traits, il eſt de neceſſité indiſpenſable de faire l'élevation de la face de la voute, dont il s'agit, pour trouver les intervales horiſontaux des joins de Lit, & leur hauteur au deſſus des Impoſtes, du moins à leurs origines ſur l'arc de face ; c'eſt là le principal uſage que l'on fait de l'élevation : cependant nous ferons voir que cette eſpece de projection verticale d'un corps ou d'une voute quelconque, conduit à ſon exécution, autant que celle du *Plan* & du Profil.

Il eſt clair que lorſqu'on veut faire uſage de cette eſpece de deſſein, il doit être aſſujetti aux Loix de la projection verticale, comme le Profil; c'eſt-à-dire, qu'elle doit être faite ſur un plan parallele à l'objet ou à la partie que l'on en veut repreſenter.

D'ou il ſuit, 1.° qu'on ne peut faire d'élevation d'un corps Cylindrique, ſur laquelle on puiſſe prendre d'autres meſures, que ſuivant ſa longueur ; parce qu'il n'y a que les côtez paralleles à ſon axe qui ſoient en ligne droite, par conſéquent qui puiſſent être paralleles au plan de deſcription. Quant aux parties de ſon contour repreſenté en élevation, il eſt clair qu'elles ſont toutes inégales ; ſe racourciſſant d'autant plus qu'elles s'éloignent de l'axe du Cylindre.

2.° Qu'on ne peut trouver que trois meſures ſur l'élevation d'un corps Conique ; ſçavoir, les trois côtez du triangle par l'axe du Cône qui eſt parallele au plan de deſcription, dont deux ſont des côtez du Cône, & le troiſiéme le diametre de ſa baſe.

3.° Qu'on ne peut prendre qu'une ſeule meſure ſur l'élevation d'un corps ſphérique, concave ou convexe ; ſçavoir, le diametre du cercle parallele au plan de deſcription.

Le peu d'utilité de ces deux dernieres eſpeces d'élevations, nous diſpenſe d'en donner des exemples, il ſuffit de celui d'un corps Cylindrique, ſur lequel eſt tracée une ligne quelconque, que nous ſuppoſerons ici une Helice, pour montrer comme on doit faire l'élevation d'un Eſcalier à vis dans les deſſeins d'Architecture.

Soit

Digitized by Google

Soit [*Fig.* 249.] la Couronne de cercle a D *b d*, le plan horiſontal d'une Tour dans laquelle eſt un Eſcalier, il ſuffit d'en tracer la moitié, parce que nous la ſuppoſons également diviſée de part & d'autre. Ayant diviſé ſon contour en un certain nombre de marches, s'il s'agit d'un Eſcalier, ou en parties égales arbitraires, s'il s'agiſſoit d'une Helice tracée à la ſurface de ce corps, on menera par le centre C une perpendiculaire C E au diametre *a b*, qu'on prolongera autant qu'on le jugera à propos; puis ſur cette ligne ayant pris à volonté un point D, on lui menera une perpendiculaire qui ſera parallele à a *b*, & par tous les points des diviſions du coutours de la Couronne de cercle, on menera des paralleles à l'axe C E indéfinies. On marquera enſuite ſucceſſivement chaque hauteur de marche ſur cet axe C E, s'il s'agit d'un Eſcalier, ou les parties aliquotes d'une révolution, s'il s'agit d'une vis ou d'une colomne torſe, & par toutes ces diviſions on menera des paralleles à la baſe A B, qui rencontreront les paralleles à l'axe C E, en des points 1, 2, 3, *a*, 5, 6, 7, M, &c. par leſquels on tracera à la main la Courbe D *a* M *b* E, qui ſera la repreſentation de l'Helice ſur la ſurface exterieure du Cylindre ou de la Tour.

Il eſt aiſé de voir que celle de la ſurface interieure *e f g* du *Plan* ſe tracera de la même maniere. Il faut ſeulement obſerver que quoique les largeurs ſoient moindres, les hauteurs doivent être les mêmes pour l'Helice exterieure & interieure, parce que s'il s'agit d'Eſcalier, c'eſt la même hauteur de marche; il en ſera de même des autres Helices, qui font leur révolution en même tems; c'eſt pourquoi les points D M D M E deviennent communs à l'exterieure & à l'interieure: l'élevation qui doit donner les premieres meſures du plan horiſontal de l'Epure ne contenant d'autre difficulté que celle de tracer le genre de Courbe qu'on ſe propoſe pour ceintre de la voute; nous n'avons rien à ajoûter à ce qui a été dit au II. Livre.

CHAPITRE IV.

Des moyens de faire les Plans, Profils & Elevations Des Figures irrégulieres.

Il y a deux ſortes d'irrégularitez dans les voutes; l'une conſiſte dans leurs contours, qui peuvent n'être ni Circulaires ni Elliptiques, mais de quelqu'autre Courbe de fantaiſie, telles ſont les Faces des Trompes ondées, comme cette voute Conique qu'on appelle Trompe d'Anet, *Fig.* 247.

L'autre conſiſte dans la courbure de leurs ſurfaces qui ne ſont ni Cylindriques, ni Coniques ni Sphériques, telles ſont celles de la plûpart des Arrieres-vouſſures.

Le moyen le plus facile de connoître ces irrégularitez, eſt de les comparer à des Figures régulieres, ou par *Inſcription* ou par *Circonſcription*, les contours peuvent être connus par l'une & l'autre maniere; mais les ſurfaces irrégulieres ne peuvent l'être que par le moyen de la Circonſcription dans la pratique de la coupe des Pierres, où il ne s'agit que d'ôter & non pas d'ajoûter, comme dans les ouvrages de Stuc; on peut donc comparer le contour d'une Figure irréguliere à une réguliere par ſon excès ſur la réguliere inſcrite, ou par ſon défaut à la réguliere circonſcrite.

Fig. 247. Soit, par exemple, une Trompe ondée, [*Fig.* 247.] dont la projection horiſontale eſt la Figure SAHB, on peut en retrancher le Cône droit SAB, en tirant la ligne AB perpendiculairement ſur ſon axe SC, & regarder le reſte de la Figure qui eſt hachée comme un excès de ce Cône, que l'on peut trouver en tirant du ſommet S autant de lignes qu'on voudra, comme SE, SD, SC, qu'on prolongera juſqu'aux extremitez de cet excès, & l'on aura les lignes E*e*, D*d*, CH, qu'il faudra ajoûter en ligne droite aux premieres, ſoit en projection pour en avoir le Plan horiſontal, ſoit en Profil, comme V*h*, xe^2, yd^2.

Au lieu de comprendre un petit Cône dans une plus grande Figure, on peut tirer une perpendiculaire ſur l'axe SH, & former un Cône droit SPL qui la renferme toute entiere; & alors ayant tiré des lignes droites SN, SO du ſommet S du Cône, on en retranchera les parties *e*N, *d*O pour avoir les points *e* & *d* du contour irrégulier de la Face ondée, & autant d'autres que l'on voudra par la même maniere, en cherchant leur défaut au dedans du Cône circonſcrit SLP.

L'une & l'autre methode peut avoir ſes applications ſuivant les differentes circonſtances; la circonſcription qui donne de plus grandes meſures, peut avoir ſon incommodité dans les grands Ouvrages, & l'inſcription pourroit être plus ſujette à de petites erreurs d'exécution, mais en elles-mémes, elles ſont également correctes.

Ce que nous diſons ici des contours irréguliers par leurs ondulations devient plus aiſé pour ceux qui ſont compoſez de lignes droites; parce qu'il ſuffit de tirer des lignes par leurs angles, pour en avoir la poſition & le contour régulierement; c'eſt pourquoi on peut, pour plus grande préciſion, inſcrire les contours ondez dans des Poligones.

La voye de l'inſcription & de la circonſcription eſt plus commode

Digitized by Google

dans les Berceaux, dont les Faces ſont irrégulieres, parce qu'il ne s'agit que de tirer des lignes paralleles à leur direction, & des perpendiculaires aux extremitez des parties les plus ſaillantes, pour les inſcrire dans des Parallelogrames.

Soit [par exemple, *Fig.* 250.] la projection horiſontale d'une Porte ſur le Coin AEDPB, dont la face interieure AMB eſt arondie ; on circonſcrira à cette Figure irréguliere mixte le Parallelograme BAGI, dans lequel on tirera autant de paralleles à AG, comme *g*F, *g*F que l'on voudra avoir de points au Profil. *Fig.* 250.

On formera enſuite ſur GI comme diametre le demi cercle GHI pour ceintre de l'arc Droit, que ces lignes prolongées couperont aux points 1, 2, H, 3, 4.

La projection horiſontale étant ainſi preparée, on fera pour le Profil un ſecond Parallelograme *a*S*di* ſur les côtez BA, IG prolongez ; enſuite ayant porté les hauteurs *g* 1, *g* 2, DH en aS, a 2, *a* 1, on menera par ces points 1, 2, S des paralleles à la baſe a*i*, ſur leſquelles on portera les excés du Parallelograme GABI ſur le plan horiſontal de la porte EAMBPD, ainſi on portera F 1*q* en 1K, F 2*q* en 2L, CM en S*m*, & par les points *m*LKa, on tracera à la main une courbe qui ſera le Profil de la moitié concave de la face interieure de la porte.

Pour tracer le Profil de la moitié de la face exterieure ſaillante, on portera, de méme, l'excés GE du plan horiſontal en *ic* du Profil, *g* 1*p* en *e* 1*f*, *g* 2*p* en *e* 2*f*, & par les points *d*, 1*f*, 2*f*, *c* on tracera à la main une courbe qui ſera la moitié de la face exterieure.

Pour abreger le tranſport des hauteurs, on peut tracer le quart de cercle *i* 14, 23, *db* égal à GH du plan horiſontal, & également diviſé, & par ces diviſions 14, 23 mener des paralleles à la baſe *i* a du Profil, leſquelles marquent plus ſenſiblement leurs origines.

La raiſon de cette operation de Circonſcription, eſt que les lignes droites & les perpendiculaires ſont les termes les plus ſimples, d'où l'on puiſſe commencer à meſurer les obliquitez & les ſinuoſitez des Faces ; par ce moyen on abrege la réduction des Faces courbes en lignes droites, & en triangles rectilignes, dont il faudroit chercher en particulier les angles, les côtez, & leur ſituation reſpective.

Cette maniere eſt neceſſaire pour former les Profils qui ſont des projections verticales ; mais pour lever ceux qui ſont des ſections des corps, on peut la rendre plus facile, & l'abreger comme nous l'allons dire.

Digitized by Google

PROBLEME IV.

Tracer ſur un Plan un Contour ſemblable & égal à celui d'un Corps quelconque ſuppoſé coupé par ce Plan,

En termes de l'Art.

LEVER UN PROFIL.

Fig. 246. SOIT un corps quelconque, [*Fig.* 246.] dont le contour ſoit de telle irrégularité que l'on voudra; on donne ici pour exemple un Roſon & des Moulures A B C D E, il faut imiter exactement le contour de la ſection qui feroit faite par ce plan, s'il le coupoit comme pourroit faire une Scie.

ON placera le carton ou la planche ſur laquelle on veut tracer le Profil dans la ſituation où l'on veut qu'il ſoit à l'égard du corps, dont on veut imiter le contour; par exemple, d'un Platfond ſous lequel on la mettra à-plomb, ou contre un mur de Niveau; on l'arrêtera & on la tiendra ferme en cette ſituation, pour qu'elle ne varie pas, car l'obliquité changeroit l'imitation.

ON appuyera cette planche contre les parties les plus ſaillantes, comme en E, enſuite ayant poſé une Régle R *r* perpendiculairement ſur un des côtez de ladite planche K L, par le moyen d'un Equerre F Q G, on prendra avec le Compas ou une meſure de bois qui ſervira de jauge le plus grand enfoncement *b* B, qu'on tranſportera ſous la partie la plus ſaillante E *e*, pour voir ſi la planche ſera aſſez large pour le contenir de E en *e*, perpendiculairement au côté K L ou H I, que nous ſuppoſons droit, & parallele ſi l'on veut; puis on fera couler une branche de l'Equerre G Q ſur le côté K L, en ſorte qu'une partie de ſon épaiſſeur deborde aſſez la planche, pour qu'on puiſſe appuyer la Régle mobile R *r* contre l'autre branche de l'Equerre Q F, à laquelle elle doit toujours être appliquée, & couler le long, en la pouſſant dans les creux, & la retirant dans les Saillies.

ON preſentera ainſi la Régle ſous chaque enfoncement, comme en B & en D, portant toujours la même ouverture de Compas B *b*, ou la même jauge ou meſure de bois, de B en *b*, & de D en *d*, & l'on marquera ſur la planche les points *b* & *d*, de même ſous chaque Saillie A *m* C E, marquant les points que la meſure donnera le long de la Régle en M *c* & *e*. On continuera de même en faiſant couler l'Equerre & la Régle pour avoir autant de points que l'on voudra, par leſquels on tracera à la main le contour *a b c* M *c d e* ſur la planche, de laquelle ſi l'on retranche la partie ſuperieure avec la Scie ou autrement; on aura le Profil que les Ouvriers appellent pour les Moulures un *Calibre*, lequel s'ajuſtera parfaitement aux Moulures du Platfond, ſuivant la même ligne A E; en ſorte

Digitized by Google

que ſi l'on vouloit y faire une cloiſon, il en boucheroit exactement les vuides.

On peut même par ce moyen lever les contours des enfoncemens recouverts comme en S; car tirant avec l'Equerre la perpendiculaire RS, & la portant à même diſtance de BR en *br*, & faiſant *rs* égale à RS, on aura l'enfoncement S, ainſi des autres.

Demonstration.

Il eſt clair par la conſtruction, que la Régle ne change point de ſituation à l'égard de la ligne KL, à laquelle elle eſt toujours perpendiculaire, puiſqu'elle eſt toujours une prolongation d'un côté de l'Equerre, & que tous les points du corps ſont également éloignez du contour tracé, donc les deux Courbes ſont paralleles & égales, puiſque leurs abſciſſes ſont communes, & les Ordonnées ſont égales par la conſtruction.

Usage.

Ce Problême de pratique eſt d'un fréquent uſage en Architecture, particulierement dans les réparations des vieux Edifices, où il faut racorder des ornemens ſaillans, & renfoncez, ou des ceintres corrompus, c'eſt-à-dire, de courbure irréguliere, ou par faute de conſtruction, ou par l'affaiſſement qui s'eſt fait. Faute de ſçavoir uſer de ce moyen, les Ouvriers ſont obligez de tâtoner long-tems, en preſentant pluſieurs fois le Profil qu'ils ont levé pour voir ce qu'il faut ôter d'un côté, & ajoûter de l'autre; en quoi ils conſomment beaucoup de tems & de peine, qu'ils pourroient s'épargner par la pratique ſimple de ce Problême.

De la ſuppoſition des Surfaces planes pour parvenir à l'imitation des Courbes terminées par des ſections planes,

Et pour la coupe des Pierres en termes de l'Art.

Des Doeles Plates.

La raiſon qui nous engage à ſuppoſer des lignes droites auprès des courbes pour en connoître les ſinuoſitez; nous oblige auſſi à ſuppoſer des ſurfaces planes au devant des courbes, pour en connoître la concavité ou la convexité; particulierement lorſqu'elle eſt irréguliere, & ſi leur courbure eſt réguliere, & leur ſurface ſuppoſée terminée par des plans; la ſuppoſition d'une ſurface plane au devant de la courbe ſert à faire connoître la poſition & la diſtance de ſes angles.

Ainsi avant que d'entreprendre de creuſer une portion de Cylindre

[par exemple] terminée par quatre ou pluſieurs plans ; il faut former une ſurface plane pour y ſituer les quatre angles de cette portion de Cylindre à leur diſtance reſpective ; le Modele de cette Figure pour les Doeles des vouſſoirs s'appelle le *Panneau de Doele plate*, c'eſt un plan paſſant par la Corde de l'arc du ceintre compris dans le vouſſoir, lequel touche neceſſairement trois des angles du vouſſoir, & ordinairement quatre, & comme les ceintres ſont diviſez en pluſieurs parties dans leur contour, ſuivant le nombre de vouſſoirs qui compoſent la voute, les Doeles ſont diviſées en autant de ſurfaces planes ou de Doeles plates qui réduiſent le Cylindre en Priſme, le Cône en Piramide, & la Sphère en Polyedre.

La raiſon de cette ſuppoſition eſt, 1.° que dans des operations compoſées, il convient pour la facilité & la ſûreté de l'exécution de commencer par des ſimples ; ainſi avant que de creuſer une ſurface courbe, on en doit premierement ſituer les bornes dans leur juſte diſtance ; ces bornes ſont les angles ſolides des vouſſoirs, deſquels il y en a au moins trois qui peuvent être appliquez à une ſurface plane, & ordinairement quatre. Il arrive de plus que ſi ces vouſſoirs ſont faits pour une voute conique ou cylindrique, on peut placer ſur la méme ſurface plane les côtez oppoſez qui ſont droits ; de ſorte qu'ayant formé une ſurface plane, ce qu'on appelle en termes de l'art *dreſſé un Parement*, on y peut placer une grande partie du contour d'un vouſſoir, qui doit y reſter lors même qu'il ſera achevé, il ne reſte qu'à creuſer celle qui eſt concave, laquelle eſt compriſe dans ces bornes.

Secondement, cette ſuppoſition eſt neceſſaire pour trouver l'inclinaiſon des ſurfaces planes des joins, avec les courbes des Doeles, ou des Têtes, parce que ces inclinaiſons peuvent changer à chaque vouſſoir, comme il eſt viſible dans les voutes de ceintres Elliptiques ſurhauſſez ou ſurbaiſſez, où l'angle de la Doele avec le Lit change continuellement d'ouverture ; or il eſt plus aiſé d'appliquer des Biveaux ou des Recipiangles rectilignes ſur des ſurfaces planes, que des Biveaux d'angles mixtes, parce que ceux-là peuvent s'ouvrir & ſe reſſerrer par la conſtruction de l'Inſtrument, & s'adapter à tous les angles, au lieu qu'il faut changer de modele d'angle mixte à chaque poſition des joins de la courbe du ceintre Elliptique.

Troiſiémement, lorſque les Doeles ou autres ſurfaces des vouſſoirs ſont *Gauches*, c'eſt-à-dire, dont les angles ne ſont pas dans un même plan, c'eſt une eſpece de neceſſité de ſuppoſer une ſurface plane qui paſſe par trois de ſes angles, pour trouver la poſition du quatriéme, ou cinquiéme s'il y en a ; car de même qu'on ne peut connoître la nature des lignes courbes, que par les proprietez des lignes droites inſcrites ou circonſcrites, ou ordonnées à quelque diametre, auſſi on ne peut connoître les

Digitized by Google

ſurfaces courbes, qui ne ſont pas régulieres, que par leurs diſtances à des ſurfaces planes, en meſurant les longueurs des lignes perpendiculaires à ce plan, ou dont l'inclinaiſon eſt connuë, terminées à differens points de la ſurface courbe, à laquelle on la compare. Et parce qu'il n'y a que le ſeul triangle qui ſoit neceſſairement dans un plan, les ſurfaces de plus de trois côtez peuvent avoir leurs angles en differens plans; puiſqu'elles peuvent être diviſées en triangles; ainſi une Doele plate de quatre côtez peut être diviſée en deux triangles; celle de cinq en trois, & ainſi de ſuite. Or les ſurfaces courbes irrégulieres peuvent être coupées par pluſieurs plans, de maniere que leurs angles ſoient dans un même plan, une tuile creuſe, quoique d'une courbure Conique, s'adapte ſi bien ſur une planche que ſes quatre angles la touchent. Une portion de Cylindre, une portion de ſphère, telles que ſont celles des vouſſoirs des voutes régulieres, a la même proprieté. Il n'en eſt pas de même d'une portion d'Arriere-Vouſſure de Marſeille ou de St. Antoine, &c. un vouſſoir poſé ſur une planche ne la touchera que par trois de ſes angles, & le quatriéme reſtera en l'air. Pour connoître de combien il s'écarte de ce plan, il faut que la diſtance en ſoit meſurée par une perpendiculaire abaiſſée de ſon ſommet ſur cette ſurface plane; donc il importe de ſuppoſer un plan pour trouver la ſituation des parties des ſurfaces irrégulieres, & les faire avec la préciſion neceſſaire.

De la ſuppoſition des Surfaces Cylindriques ou Coniques de baſe quelconque, pour parvenir à la deſcription & formation des Surfaces courbes terminées par des lignes Courbes à double Courbure.

Le moyen des Doeles plates, que nous venons de propoſer, eſt très avantageux dans la pratique de la coupe des Pierres, ſoit pour former avec ſûreté & facilité les vouſſoirs des voutes de ſurfaces régulieres ou gauches, ſoit pour le menagement des materiaux, mais il devient inutile pour la formation des ſurfaces courbes, Cylindriques, Coniques, Sphériques ou Gauches qui ſont terminées par des lignes courbes à double courbure; c'eſt pourquoi il faut avoir recours aux ſuppoſitions de ſurfaces Cylindriques, qui coupent la ſurface donnée ſuivant deux directions, dont la rencontre ſe fait à la Courbe à double courbure qu'on cherche.

Nous entendons par le mot de ſurface Cylindrique, non ſeulement celle d'un Cylindre ordinaire, qui a pour baſe un cercle ou une Ellipſe, mais une Courbe quelconque connuë ou inconnuë, Geometrique ou Mechanique, telle que la donne la projection d'une Courbe à double courbure ſur un plan horiſontal ou vertical.

Il eſt des ſurfaces Gauches dont les Arêtes qui les terminent, ou celles de certaines ſections qu'on y peut faire, ſe trouvent facilement par la ſeule inſcription dans un Cylindre, ou un Cône, à la ſurface duquel cette courbe conſerve une progreſſion connuë, telle eſt celle de la Vis; ſoit qu'elle faſſe ſes révolutions parallelement, ou plûtôt à égale diſtance de ſon axe, ou qu'elle ſe reſſerre en Limace; ainſi ſuppoſant une Vis ordinaire, dont les révolutions ſont toujours équidiſtantes de ſon axe, il eſt clair que le plan de la projection perpendiculaire à cet axe, eſt un cercle, & qu'on la peut inſcrire dans un Cylindre régulier Droit, de la baſe duquel elle s'éleve également, ou ſuivant une progreſſion connuë.

De-la on tire la pratique de faire le Profil ou Elevation de cette eſpece de courbe à double courbure; comme nous l'avons expliqué cidevant en propoſant pour exemple l'Elevation d'un Eſcalier à vis, dont le contour ſur le Cylindre eſt une Helice tangente aux extremitez des marches.

Si le contour de la Vis n'étoit pas toujours équidiſtant de ſon axe, la conſtruction du Profil ſeroit encore la même, avec cette difference que ſi la baſe du Cylindre dans lequel elle peut être inſcrite, eſt Elliptique, il faut choiſir pour la ligne de baſe du Profil un axe, ou un diametre convenable au deſſein qu'on a de trouver les points de ſtation les plus écartez, ou les plus reſſerrez.

Si la Vis ſe reſſerroit en montant, au lieu de l'inſcrire dans un Cylindre, il faudroit l'inſcrire dans un Cône, ou dans une Sphère ou Sphéroïde, & mener toutes les lignes de diviſion au Pole, à quoi nous ne nous arrêtons pas, parce que ce cas arrive rarement en Architecture, au lieu que celui des vis Cylindriques eſt d'un uſage continuel, non ſeulement pour les Eſcaliers, mais encore pour les Appuis Rampans des Tours rondes, Circulaires ou Elliptiques.

La plûpart des Courbes à double courbure ne fourniſſent pas les mêmes facilitez pour être décrites, que la Vis, par deux raiſons; l'une, c'eſt que le Cylindre dans lequel on peut l'inſcrire, eſt très ſouvent irrégulier, c'eſt-à-dire, qu'il n'a pas pour baſe une portion de cercle ou d'Ellipſe; de ſorte qu'il faut commencer par chercher le contour de cette baſe, par le moyen de la projection. En ſecond lieu, parce qu'ayant cette Courbe, & par conſéquent la ſurface du cylindre qu'on peut élever au deſſus, on ne peut déterminer ſur le cylindre aucun point de la courbe à double courbure, parce qu'on ne connoît pas la diſtance des points de la baſe du Cylindre à ceux de la courbe qu'on cherche, comme on la connoît dans l'exemple de la Vis; de ſorte qu'on eſt obligé de conſiderer cette courbe à double courbure par un autre ſituation perpendiculaire

Digitized by Google

diculaire à la premiere; d'en chercher la projection, & d'élever ſur la Courbe qu'elle donnera pour baſe un ſecond Cylindre perpendiculaire au premier, à la ſurface duquel cette courbe doit encore ſe trouver.

Or puiſqu'elle eſt dans chacune des ſurfaces Cylindriques trouvées, il eſt évident qu'elle ſera dans leur commune interſection; ce qu'il faut remarquer comme un principe de pratique des plus importans que nous ayons à propoſer, & dont on verra une application continuelle, lorſque nous parlerons des voutes compoſées.

Pour éclaircir cette doctrine, & la rendre ſenſible par un exemple, nous choiſirons ici une Arriere-Vouſſure de St. Antoine biaiſe & ſurbaiſſée, qui eſt une ſurface gauche, dans laquelle nous trouverons des Courbes des ſections planes, & des Courbes à double courbure très propres à donner une juſte idée de la maniere de faire les Plans, Profils & Elevations de toutes ſortes de ſurfaces les plus difficiles à repreſenter, d'où l'on tire la maniere de les former, tant en pierre, qu'en bois.

Pla. 21.

Soit [*Fig.* 251.] le trapeze AEDB le Plan horiſontal d'une voute, dont la ſurface eſt Gauche, comme celle que nous donnons pour exemple. Il faut, premierement ſuppoſer que l'on en connoit les ſections planes & paralleles ſuivant une direction; car ſi l'on n'en connoit rien, on ne peut rien deviner, puiſque le raiſonnement n'eſt qu'une conſéquence tirée de quelque connoiſſance anterieure, ou ſuivant les Philoſophes *procedere à noto ad ignotum.* *Fig.* 251.

Supposons donc que l'on connoit les Courbes de toutes les ſections paralleles à la ligne du milieu CM, ou par une convenance, ou par une détermination arbitraire, comme on les connoit en effet dans l'Arriere-Vouſſure de St. Antoine, puiſque c'eſt ſur leur détermination que l'on en fait le Trait. Il n'importe que ces Courbes ſoient portions de cercle ou d'Ellipſe, ou d'autre Courbe; nous n'avons pas beſoin d'en connoître la nature, pourvû qu'elles ſoient données, cela ſuffit.

Ayant mené des paralleles à la ligne du milieu CM en telle quantité qu'on le jugera à propos, pour avoir un nombre ſuffiſant de points des Courbes que l'on cherche, on menera par les points p^1, p^2, C, p^3, p^4, &c. où ces paralleles coupent la ligne AB qu'on prend pour baſe du ceintre de Face, autant de perpendiculaires à cette ligne, qui couperont le ceintre de Face donné AbB aux points ^{1}, ^{2}, b, ^{3}, ^{4}, où ſeront les hauteurs des Profils, c'eſt-à-dire, des Courbes de toutes les ſections planes qui paſſent par les lignes du plan horiſontal Ep^1, np^2, MC, Np^3, &c. paralleles à CM.

Si l'on mene par toutes ces hauteurs des horiſontales bH, 33, 22, 11, & qu'on les faſſe égales à leurs correſpondantes qui ſont tirées dans le plan horiſontal $MC = bH$, $Np^3 = 33$, $np2 = 22$, &c. on aura deux points de chacune des Courbes des ſections faites par des plans paralleles entr'eux, & parce qu'on les doit ſuppoſer connuës ou données, comme dans l'exemple preſent, où elles ſont ordinairement des quarts d'Ellipſe, ou des arcs de cercle preſque tous moindres que le quart. Il ſera aiſé de décrire ces ſections; or comme elles doivent être dans des plans perpendiculaires au plan AbB, ce qu'il eſt impoſſible de faire ſur le papier, à moins qu'on n'y applique des pieces découpées volantes, on eſt réduit à les ranger de ſuite ſur le même plan, comme on voit à la Figure, ou toutes d'un ſeul côté, ou pour éviter la confuſion des lignes, partie d'un côté, par exemple vers A, partie de l'autre, vers B.

Toutes ces Courbes ainſi placées, donneront facilement la poſition de tous les points qu'on y voudra marquer, par exemple leur milieu en m. Car ſi l'on mene par ces points autant d'horiſontales mxy paralleles à AB, elles couperont en y, les verticales bC, $3p^3$, $2p^2$, $1p^1$, &c. qui ſont à l'interſection du plan vertical AbB, & des plans qui le coupent perpendiculairement ſuivant ces verticales. La Courbe tracée à la main par tous les points yy, ſera l'élevation de celle qui paſſe par le milieu de la Doele de l'Arriere-Vouſſure, quoiqu'elle en ſoit bien éloignée dans cette repreſentation.

Il en ſera de même pour celle qu'on voudroit faire paſſer au tiers, ou au quart, en travers d'une Impoſte à l'autre.

Il eſt encore viſible que cette méthode ſert à tracer des paralleles aux Arêtes de devant AbB, ou du fond EMD; car il n'y a qu'à prendre ſur les arcs des ſections planes des longueurs données égales, comme $1d$, $2d$, $3d$, Hd, &c. pour le haut, & p^1e, p^2e, Ce, p^3e, p^4e, pour le bas, enſuite mener par tous les points d & e des horiſontales juſqu'à l'interſection des verticales correſpondantes, qu'elles couperont aux points x, x, x, & celles menées par les points e, e, en z, z, la ligne courbe tirée par ces points x, x, x; z, z, z, ſera la projection verticale; c'eſt-à-dire, l'élevation des lignes paralleles aux Arêtes qui ne les feront cependant pas dans cette élevation.

La même méthode que nous employons pour trouver les points des Courbes projettez ſur un plan vertical, ſervira pour trouver la repreſentation des mêmes points ſur le plan horiſontal; il n'y a qu'à répeter toutes ces ſections planes de ſuite ſur leurs baſes horiſontales Ep^1, np^2, MC, &c. & par les points donnez d, m, e, de toutes ces Courbes leur tirer des perpendiculaires dx, my, ez, & l'on aura ſur le plan horiſon-

tal ABDE d'autres Courbes *xx* X *xx*, *yy* Y *yy*, *zzz*, qui ſeront en termes d'Architecture les *Plans*, c'eſt-à-dire, les projections horiſontales des Courbes qu'on cherche; leſquelles repreſentent des paralleles à AB, comme *x*, *x*, *x*, ou à ED, comme *z*, *z*, *z*, ou qui paſſe par le milieu de la Doele, comme *yyy*.

Pour abreger l'operation, on raſſemble toutes ces Courbes ſur un Profil M*b*AB, *Fig.* 152. que l'on peut faire differemment ſuivant les Courbes que l'on veut tracer; par exemple, ſi l'on vouloit s'en ſervir pour chercher les points d'une Courbe formée par une ſection plane G*g* parallele à ED, *Fig.* 253. il faut raſſembler les origines de toutes les Courbes des ſections planes, que j'appellerai primitives en un ſeul point M; parce que ſi l'on porte la longueur MK du plan horiſontal, en M*k* ſur la baſe MA du Profil, & qu'on lui éleve une perpendiculaire *k*L, elle coupera toutes les Courbes des ſections primitives M 1, M 2, M 3, M*b*, &c. en des points *vuu*, qui donneront les hauteurs de la Courbe plane ou ſection plane de la voute ſur la baſe G*g*; ainſi il n'y a plus qu'à les porter ſucceſſivement ſuivant leur ordre en *iu*, *iu*, *iu*, pour avoir les points *u*, *u*, *u* de cette Courbe. *Fig.* 252. & 253.

Si au contraire on vouloit chercher les points de la Courbe, qui ſeroit une ſection plane parallele à AB, comme I*g*; il conviendroit de raſſembler l'origine ſuperieure de toutes les ſections ſur une même ligne verticale C*b*Q, *Fig.* 254. par la même raiſon que dans l'exemple précedent; enſuite on couperoit ce Profil par la perpendiculaire R*r*, dont la diſtance CR ſeroit égale à celle du plan horiſontal CR, laquelle donneroit les points S*ss* pour les hauteurs de la Courbe. *Fig.* 254.

Mais ſi la ſection étoit oblique à l'une & à l'autre face AB & ED, comme en *g*O; cette abreviation n'a plus lieu, il faut porter à part ſur la baſe du Profil toutes les longueurs EO, *no*, M*o*, & par les points *o*, *o* du Profil élever des perpendiculaires qui couperont les Courbes correſpondantes en des points *t*, *t*, *t*, qui ſeront les hauteurs cherchées, qu'il faut porter ſur des perpendiculaires qu'on élevera ſur *g*O aux points *o* pour avoir les points *t*, *t*, *t*.

De la maniere dont nous venons de trouver les Courbes planes, & les Courbes à double courbure, qu'on peut imaginer dans une ſurface gauche par des ſections tranſverſales, il ſera aiſé de tirer celle de trouver les projections de celles qu'on peut imaginer ſuivant la longueur ou direction de la voute, comme celle d'une ligne parallele à l'Impoſte AE, ou BD; telle ſeroit l'Arête de la longueur d'une traverſe de bati de menuiſerie, dont l'Arriere-Vouſſure ſeroit revêtuë.

Car ſi on fait à volonté pluſieurs ſections planes tranſverſales, comme

Digitized by Google

A*b*B, I S*g*, &c. paralleles entr'elles, & qu'ayant pris ſur les Courbes de ces ſections une partie égale, comme A*d*, I*d*, &c. on abaiſſe de ces points des perpendiculaires *d b*, *d e* ſur les diametres A B & I*g*, elles les couperont en des points *b e*, &c. par leſquels on tracera à la main une Courbe qui ſera la projection de l'Aréte *d* d'une ſection courbe parallele à l'Impoſte A E, quoique cette projection ne la ſoit pas.

Il ſuit encore de la même méthode, que l'on peut trouver non ſeulement des Courbes longitudinales & tranſverſales, qu'on peut imaginer ſur la ſurface gauche d'un côté à l'autre, ou d'une face à l'autre, mais encore des projections des Courbes à double courbure, qui rentrent en elles-mêmes, comme ſi l'on vouloit faire un panneau ou un ornement Circulaire ou Elliptique dans la Doele d'une Arriere-Vouſſure; ce que l'on exécute tous les jours depuis qu'elles ſont devenuës à la mode.

Sur quoi il faut remarquer qu'il eſt impoſſible de décrire un cercle, ou une Ellipſe parfaite ſur une ſurface courbe irréguliere, mais ſeulement une Figure qui approchera d'autant plus du cercle ou de l'Ellipſe, que la ſurface ſur laquelle on le décrit, ſera moins concave ou convexe, nous excepterons ſeulement les cas des ſurfaces ſphériques, ſphéroïdes, coniques, cylindriques & annulaires, où le centre de la Figure qu'on décrit, ſe trouve au Pole ou dans un axe. Ainſi quoiqu'on trace avec le compas une Figure ſemblable à un cercle ſur la ſurface de l'Arriere-Vouſſure qui nous ſert d'exemple, ce n'eſt qu'une apparence de cercle, laquelle en réalité eſt une Courbe à double courbure, dont on peut trouver autant de points que l'on voudra par la projection ſur le plan horiſontal A B D E, où elle donnera une Courbe en ovale pointuë, comme on voit Q*x q z*, & ſur le plan vertical A*b* B une Courbe reſſerrée vers le haut, comme Q*b q z*.

Fig. 251. Premierement ayant déterminé la poſition du centre de ce cercle ſur la ſection primitive du milieu H*m'* C en *m'* pour l'élevation, & M*m'* H pour le plan horiſontal, & les longueurs égales de ſes Rayons ſur la même Courbe, l'un vers *d*, l'autre vers *e*; on aura les projections verticales de ces points en X & en *z* ſur *b* C, & leur projection horiſontale en X*z* ſur C M.

Ensuite on fera des ſections planes, qui paſſent par le point Y du plan horiſontal en differentes directions à volonté; on prendra ſur ces Courbes des Rayons égaux, dont on cherchera les projections, comme nous l'avons dit des autres points *d* & *e*, & l'on aura ainſi autant de points que l'on voudra en projection verticale ou horiſontale; c'eſt-à-dire, qu'on en aura en termes de l'art les *Plans* & Profils; ce qui ſuffit pour

Digitized by Google

former la Figure requiſe en Pierre ou en Bois, comme nous le dirons au IV. Livre.

Remarque ſur l'Uſage.

La Régle de pratique que nous venons d'établir, toute ſimple qu'elle eſt dans ſon principe, étant une ſuite naturelle de ce que nous avons dit juſqu'à preſent touchant la projection, eſt le *Précis de toute la ſcience de la coupe des Pierres & des Bois.*

Dans la coupe des Pierres il convient de faire autant que l'on peut des ſections planes pour la commodité de l'appareil & de l'exécution, lorſqu'on en eſt le Maître, comme il arrive ſouvent.

Mais dans la coupe des Bois, pour les revêtemens de Lambris de Menuiſerie, ou pour les incruſtations des Ornemens de Marbre, on ne peut éviter les Courbes à double courbure; parce que les Ornemens qui conviennent à ces ſortes d'Ouvrages, conſiſtent en bandes paralleles, ou en bordures Circulaires ou Elliptiques, ou en Courbes de contour arbitraire. Ainſi on peut regarder l'exemple que nous venons de donner pour tracer les projections des Courbes, qu'on ſuppoſe dans une voute, & particulierement dans celles dont les Doeles ſont Gauches, comme le fondement & le précis de toute la ſcience des Menuiſiers & des Marbriers, dans les Ouvrages les plus difficiles qui ſe préſentent pour les Traits de la coupe, dont ils ont beſoin. Je puis même avancer que ce Problême ſeul, contient tout le Livre de la coupe des Bois du Sieur Blanchard, qui n'en eſt qu'une application à differens cas; car quoiqu'il ne tire pas les lignes de projection depuis leur origine juſqu'à leur baſe naturelle, horiſontale ou verticale, mais ſeulement par des portions paralleles à ces baſes, apparemment pour éviter la confuſion des lignes, ſa pratique ne differe en rien de la notre, comme nous allons le montrer ſenſiblement.

Soit [*Fig.* 251.] une des ſections planes & primitives quelconque, par exemple, Imp', dont la baſe horiſontale eſt la ligne droite Pfp', & la verticale Ipf. Soit dans cette Courbe Imp' les points d, m, e, dont on veut avoir les projections, on menera pour celle du point d l'horiſontale df, qui coupera la verticale $1f$ en f, la diſtance $1f$ eſt celle que les Ouvriers appellent le *gauche de la Courbe* pour l'élevation; enſuite pour avoir celle du point m, on menera mo juſqu'à l'aplomb qui tombera de d, que l'horiſontale mo rencontrera en o, la ligne do ſera le *Gauche* de la Courbe dm, de même tirant $e7$ juſqu'à l'aplomb $m7$, la ligne $m7$ ſera le *Gauche* de la Courbe me, enfin es ſera le gauche de la Courbe ep', conſideré ſeulement comme dans les précedentes projections en qualité d'é-

levation, c'eſt-à-dire, de projection verticale, & pour l'horiſontale, ce ſeront les lignes fd, om, $7e$, tp^1, comme on le voit clairement. Or il eſt évident que toutes ces lignes étant paralleles aux lignes IP^f, & $P^f p1$ ſont égales à toutes leurs parties $1f$, fg, $g9$, $9Pf$, pour l'élevation & $P^f 9$, 98, $8t$, tp^1, ce qui n'a pas beſoin de démonſtration, puiſqu'elles ſont terminées par des lignes paralleles; il eſt donc indifferent de prendre fd pour $Pf9$, om pour 98, $7e$ pour $8t$, ſur le plan horiſontal, & do pour fg, $m7$ pour $g9$, & ef pour $9Pf$; ainſi l'on peut reconnoître une entiere uniformité entre la méthode du Sieur BLANCHARD & celle-ci.

C'EST à celui qui fait le Trait d'une coupe de Bois ou de Pierre à éviter la confuſion des lignes pour ne pas s'embroüiller; mais auſſi on peut dire à la faveur des lignes entieres, qui donnent les points qu'on cherche ſans tranſpoſition, qu'elles guident plus ſûrement; car dans une longue operation, on eſt ſujet à prendre une ligne pour l'autre, ou à les tranſporter où l'on ne doit pas; par exemple, une horiſontale au Profil, ou une verticale au plan horiſontal; c'eſt pour cette raiſon que nous avons cru devoir répeter les ſections planes primitives au plan horiſontal, & à l'élevation, pour que l'œil fut conduit dans la poſition des points de projection depuis leur origine.

Application à l'Uſage.

LORSQU'ON a la baſe d'une ſurface Cylindrique, ſur laquelle eſt l'Aréte courbe que l'on veut former, on en applique le Panneau ſur un parement, c'eſt-à-dire, une ſurface plane que l'on dreſſe ſur le Bois ou la Pierre que l'on veut tailler, pour en tracer exactement le contour. Enſuite on abat le bois à l'Equerre ſur cette baſe, en ſuivant ſon contour, ce qui fait une portion de cylindre Droit; lorſque cette ſurface Cylindrique eſt formée, on éleve des perpendiculaires à la baſe par les points qu'on a marqué dans ſon contour, par exemple, z, z, y de la Figure; enſuite on porte ſur chacune de ces perpendiculaires la hauteur que l'on a trouvé dans l'élevation, comme $p^7 z$, $p^5 z$, Cz, $p^3 z$, &c. qui donnent ſur la ſurface Cylindrique des points, par leſquels on trace la Courbe de l'Aréte du Bois ou de la Pierre qu'on taille; ce que l'on entendra mieux par les Traits particuliers au IV. Livre.

POUR s'épargner cette ſuite d'operations de tirer des perpendiculaires à la baſe, & d'y porter les hauteurs qui leur conviennent; ſoit auſſi pour tracer le contour de la Courbe à double courbure plus régulierement, on fait des développemens des ſurfaces Cylindriques, qu'on trace ſur des corps flexibles, comme du Carton ou du Fer-blanc, des lames de Plomb, & on les applique enſuite ſur les ſurfaces qu'on veut tailler, c'eſt un des grands ſecours de l'art, dont nous allons parler.

Digitized by Google

CHAPITRE III.

De l'Epipedographie, ou Deſcription des Surfaces des Solides, déployées ſur des Plans,

En termes de l'Art.

DU DEVELOPPEMENT.

LES Surfaces des corps qui compoſent les voutes, ſont preſque toujours en partie planes, & en partie courbes.

Les planes ſont les *Lits* & quelquefois les *Têtes*; les Courbes ſont toujours les Doeles, quelquefois les Têtes, & quelquefois auſſi les Lits. L'art de faire le développement de toutes ces ſurfaces conſiſte à les réduire toutes en planes, même les Courbes, quoiqu'elles ne puiſſent le devenir ſans changer de nature, & que cet artifice ſoit encore inconnu à la Geometrie, qui ne peut rectifier les cercles, ni les Ellipſes qui ſont les baſes des ſurfaces courbes.

Nous n'avons pas beſoin dans la pratique de pouſſer cet art à la perfection Geometrique; premierement, parce qu'avant que de creuſer ou arondir un corps, on fait, ſuivant la méthode des ſuppoſitions dont nous venons de parler, une ſurface plane, qui paſſe par la Corde de l'arc concave de ſa baſe, ou par la tangente d'un arc convexe, réduiſant ainſi les corps ronds en Polyedres.

Secondement, parce que, lorſqu'il s'agit de rectifier un arc de cercle ou d'Ellipſe, comme il arrive quelquefois, par exemple, aux Portes en Tour Ronde aux Trompes ſur une ligne Droite, & à quelques Enfourchemens, on le fait d'une maniere aſſez juſte, quoique Méchanique, pour n'en pas ſentir l'erreur dans l'operation. Il ne s'agit que de prendre avec le compas, pluſieurs parties à volonté, ſi petites que les Cordes ſoient ſenſiblement égales aux arcs, dont elles ſont les ſouſtendantes, & ajoûter ces Cordes de ſuite ſur une ligne Droite pour en avoir la ſomme.

Cependant, comme il y a une maniere Geometrique de parvenir à une préciſion plus parfaite que celle où l'operation peut atteindre, nous croyons devoir inſerer ici le Problême que nous devons à Mr. Saurin de l'Academie Royale des Sciences, par lequel on peut approcher infiniment de la quadrature du Cercle, dont on parle tant dans le monde, laquelle dépend de la rectification de ſa circonference.

PROBLEME V.

Trouver une ſuite de Lignes Droites qui approchent de plus en plus de la rectification d'un arc de Cercle donné, tant en deſſus, qu'en deſſous.

PLA. 22.

Fig. 255. SOIT [*Fig.* 255.] l'arc donné AD, moindre que la demi-circonference ADB. Ayant fait AT perpendiculaire ſur le diametre AB, on tirera la Corde BD qu'on prolongera juſqu'à la rencontre de la ligne AT en T, enſuite on diviſera l'arc AD en deux également en F, & l'arc AF encore par le milieu en G, & ainſi de ſuite, autant que l'on voudra approcher de l'exactitude de la rectification de l'arc AD. Après quoi on tirera la Corde AF, qu'on prolongera juſqu'à ce qu'elle rencontre BT au point H, par lequel on menera HI perpendiculaire à AH: on tirera de même la Corde AG qu'on prolongera juſqu'à ce qu'elle rencontre la ligne H au point K, par lequel on menera auſſi KL perpendiculaire à AK; on peut réïterer cette operation juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à la plus petite diviſion de l'arc donné.

JE dis que l'arc AD eſt plus grand que la ligne AH, & plus petit que la ligne AI, plus grand que AK, & moindre que AL, & ainſi de ſuite. De ſorte que dans le cas préſent, l'excès & le défaut de la ligne Droite ſur la Courbe, eſt déja dans la difference des lignes AK & AL, qui ſont preſque ſenſiblement égales entr'elles, & par conſéquent pourroient être priſes dans la pratique pour égales à l'arc ſans erreur ſenſible; de ſorte qu'il eſt preſque inutile de pouſſer l'operation plus loin, quoiqu'on le puiſſe.

DEMONSTRATION.

SI l'on tire par le point D la tangente MDN, on reconnoîtra que les lignes DM, AM, MT ſont égales entr'elles; car l'angle MDT, ou ſon oppoſé au ſommet NDB, qui a pour meſure la moitié de l'arc BD (par la 32. du III. Livre d'EUCLIDE) ſera égal à l'angle ATB, puiſque les triangles BDA, TDA ſont ſemblables, parce qu'ils le ſont au triangle TAB, avec lequel ils ont chacun un angle T & B commun, & un angle Droit en D; par conſéquent l'angle BTA ſera égal à l'angle BAD; or BAD a auſſi pour meſure la moitié de l'arc BD, donc le triangle DMT étant iſoſcele, le côté MD ſera égal à MT, & il ſera auſſi égal à MA, parce que MD & MA ſont des tangentes aux points D & A (par la 3.e du III. Liv. d'EUCL.) donc l'arc AD qui eſt moindre que ces deux tangentes AM, MD, ſera moindre que AT, qui eſt égal à leur ſomme.

SI l'on tire enſuite par le point F, moitié de l'arc AD la Corde BF, & qu'on la prolonge juſqu'à ce qu'elle rencontre AT en P, on prouvera de

Digitized by Google

de même que l'arc AF eſt moindre que AP ; or menant du centre C la ligne CE perpendiculaire à la Corde AD, elle diviſera cette corde & ſon arc en deux également, de ſorte qu'elle paſſera par F qui eſt le milieu de l'arc AD par la conſtruction, & il ſe formera deux triangles ſemblables AFE, AHD, & APF, AIH, qui font voir que AH eſt double de AF, & AI double de AP, puiſque AD eſt double de AE, donc la ligne droite AH, qui n'eſt égale qu'aux deux Cordes des deux moitiez de l'arc AD, ſera moindre que cet arc, & la ligne AI ſera plus grande que l'arc, parce qu'elle eſt égale à quatre tangentes de ſa moitié AF, comme AI eſt égale aux deux tangentes du tout AM, MD. On prouvera de même que l'arc AD eſt plus grand que la Droite AK, qui n'eſt égale qu'à quatre fois la Corde de l'arc AG, quart de AD, & que AL eſt plus grande, parce qu'elle eſt égale à huit tangentes aux deux extremitez de cet arc AG, priſes comme AM & MD.

Du développement des Corps compris par des Surfaces Planes.

Developper un corps, c'eſt étendre ſur une ſurface plane toutes celles, dont il eſt enveloppé, pour en voir d'un coup d'œil le rapport & l'étenduë.

D'ou il ſuit qu'il ne ſuffit pas de les aranger de ſuite en toute ſorte d'ordre & de combinaiſon.

1.° Parce qu'on ne pourroit diſtinguer le rapport des côtez qui doivent être communs à deux ſurfaces contigues, & ſe réunir dans l'enveloppement.

2.° Parce qu'etant raſſemblez ſans intervales, lorſque la ſomme des angles des ſurfaces contigues deviendroit égale à quatre Droits, ils compoſeroient une ſurface plane, qui ne pourroit plus être pliée pour envelopper le corps d'où elles ont été tirées, ſans être diviſée & ſeparée en pluſieurs morceaux.

3.° Qu'on ne pourroit connoître la plus grande longueur & largeur que l'arrangement naturel de toutes les ſurfaces doit occuper, par exemple, dans le développement du Cube, (*Fig.* 263. qui eſt une croix) la plus grande longueur du développement eſt de quatre quarrez de ſuite, & ſa plus grande largeur de trois; mais ſi l'on mettoit deux rangs de trois quarrez de ſuite, ils compoſeroient une ſurface plane qui ne pourroit plus être pliée, parce que quatre angles Droits ſeroient raſſemblez aux mêmes points *a*, *b*, *c*, *d*; or il eſt démontré dans les Elemens de Geometrie, (Eucl. Liv. II. pr. 21.) que la ſomme des angles plans qui en compoſent un ſolide, eſt moindre que quatre Droits.

4.° Il pourroit arriver dans l'enveloppement, que deux ſurfaces tomberoient l'une ſur l'autre, & que l'une des deux manqueroit ailleurs, comme ſi l'on rangeoit celles du cube en façon d'Equerre, le dernier quarré d'une branche tomberoit ſur le pénultieme de l'autre; il faut de plus examiner de combien d'angles plans eſt compoſé l'angle ſolide du corps qu'on veut développer, pour voir ſi le développement peut être replié ſans diviſion ni tranſpoſition des ſurfaces; ainſi pour le Tetraedre, qui eſt le premier corps régulier, il ne faut pas raſſembler plus de trois angles des ſurfaces de ce corps en un point; parce que ſi l'on en joignoit quatre comme à la Figure 259. elles formeroient, étant pliées, un angle ſolide qui ſeroit celui de l'Octaedre.

D'ou il ſuit que le développement du Tetraedre ne ſouffre que deux combinaiſons, ou comme à la Figure 257. ou comme à la Figure 258. il en eſt de même du développement du cube, dont l'angle ſolide n'eſt compoſé que de trois angles plans; mais parce qu'on ne peut joindre quatre de ſes ſurfaces enſemble, comme au Tetraedre, ſans joindre auſſi quatre angles égaux à quatre droits; il ſuit que ſon développement ne ſouffre que trois combinaiſons qui forment, l'une la croix Latine comme on voit, [*Fig.* 263.] l'autre un T. Suivant ces principes le développement des corps réguliers ſera très facile; car il ne s'agit que de répeter la même ſurface, dont il eſt compoſé, dans l'ordre qui convient à la nature de leurs angles: mais le nombre de ces corps eſt très petit comme l'on ſçait, il n'y en a que cinq, ſçavoir.

Le Tetraedre, qui eſt enveloppé de quatre triangles équilateraux.

Le Cube, de ſix quarrez égaux.

L'Octaedre, de huit triangles équilateraux.

Le Dodecaedre de douze Pentagones égaux.

Enfin l'Icoſaedre de vingt triangles équilateraux; nous ne donnons point les Figures de ces développemens, elles ſont faciles à faire, après ce que nous venons de dire, & d'ailleurs ſe trouvent dans tous les Livres de Geometrie.

Il eſt d'autres corps ſolides régulierement irréguliers formez par les ſections des angles ſolides des réguliers coupez par des plans, qui les émouſſent, ce que l'on peut faire à tous les corps réguliers & irréguliers, & qui produira differentes Figures par la ſection, & differens Poligones qui ſeront les reſtes de ces ſections. Ainſi en coupant les angles du Tetraedre, on aura un ſolide enveloppé de quatre triangles, & d'autant d'Ex. gones réguliers, ou irréguliers ſi l'on veut. Le Cube coupé de même deviendra compoſé de ſix Octogones réguliers, ou irréguliers, & de

huit triangles équilateraux. L'Octaedre qui deviendra compoſé de huit Exagones réguliers ou irréguliers & de ſix quarrez, &c. Et ſi l'on coupe encore leurs angles ſolides, on formera de nouvelles Figures de ſurfaces & de nouveaux Poligones des reſtes; ce qui n'eſt pas d'uſage pour notre ſujet, mais qui ſert à nous mener à la connoiſſance de l'impoſſibilité de faire un développement d'un Polyedre, qui ſeroit enveloppé d'une infinité de ſurfaces infiniment petites & differentes, tel qu'on peut ſe le repréſenter dans la ſphère; car ſans pouſſer bien loin la ſection qu'on pourroit appeller *l'Emouſſement* des angles ſolides des Polyedres, ſi l'on émouſſe les angles de l'Icoſaedre également par des ſections planes, qui formeroient dix Pentagones réguliers & des reſtes quadrilateres, d'où réſulte un Polyedre de trente ſurfaces inégales; on trouvera déja une Figure qui approchera tellement de la ſphérique, qu'on la jugera telle, lorſqu'on la regardera d'un peu loin; en effet elle eſt déja propre à rouler comme une Boule.

Les ſolides qui nous intereſſent ici pour en faire le développement, ſe réduiſent principalement aux Pyramides & aux Priſmes, parce qu'ils nous conduiſent à la connoiſſance de celui des Cônes & des Cylindres, qui ſont les Figures les plus ordinaires aux voutes, que nous avons toûjours pour objet dans cet Ouvrage; d'autant plus qu'ils nous fourniſſent auſſi les moyens de développer la ſurface de la ſphère, quoiqu'imparfaitement, mais ſuffiſamment pour les beſoins de la pratique; comme on l'enſeignera au IV. Livre.

Probleme V.

Faire le Développement d'une Pyramide quelconque, Droite ou Scalene.

On ſuppoſe premierement, que le Polygone de la baſe eſt connu; ſecondement, que l'on connoît la hauteur du ſommet de la Pyramide ſur le plan de la baſe, & ſa projection ſur ce plan.

Si la Pyramide eſt droite, il eſt évident que la projection du ſommet eſt au centre du Polygone, qu'elle a pour baſe, parce qu'elle ne panche d'aucun côté, ſuivant ſa définition.

D'ou il ſuit qu'il n'y a de Pyramide exactement droite, que celle qui a pour baſe un Polygone régulier; car ſi ce Polygone n'a pas tous ſes côtez égaux, quoiqu'inſcrit dans un cercle, la projection du ſommet ſera plus près d'un côté que de l'autre; par conſéquent la face qui a pour baſe le côté qui en approche le plus, ſera plus inclinée, & celle qui en approche le moins, ſera plus couchée; c'eſt-à-dire, en termes de l'art que l'une aura plus, l'autre moins de Talud, ainſi elle paroîtra plus pan-

cher d'un côté que de l'autre, quoique ſon ſommet ſoit à plomb ſur le centre du cercle, dans lequel ſa baſe eſt inſcrite.

Que les côtez d'une telle baſe approchent plus ou moins du centre; cela eſt démontré dans la 15.e prop. du III. Livre d'Euclide, puiſque ce ſont des Cordes inégales d'un cercle.

Ce ſera encore pis ſi la baſe de la Pyramide eſt un Polygone irrégulier, qui ne puiſſe être inſcrit dans un cercle, parce qu'alors non ſeulement les faces, mais encore les Arêtes auront des Taluds inégaux; de ſorte que la Pyramide panchera de tous côtez.

Cette obſervation fournit la raiſon d'une ſingularité qu'on fait remarquer aux Voyageurs qui paſſent à Soleurre en Suiſſe; une des Tours de l'enceinte qui eſt en forme de petit Baſtion à cinq côtez, & couverte d'un comble en Pyramide extrémement haute, comme les éguilles des anciens Clochers, paroît toujours pancher du côté où on la regarde; les gens qui ne ſont pas Geometres attribuent cette Merveille à la grande induſtrie de l'Ouvrier, qui en a fait la Charpente. Je fus en effet frappé de cette apparence, mais je reconnus bientôt que c'étoit une ſuite neceſſaire de l'irrégularité & de l'imparité du Polygone de la baſe, où par la nature du Pentagone, un angle eſt diametralement oppoſé à une face; ce qui préſente un grand Talud d'Aréte contre un moindre Talud de la face, ſi le Spectateur eſt placé ſur la perpendiculaire à ce diametre, & s'il s'en écarte, l'apparence du Talud d'une Arête s'alonge, & l'autre ſe racourcit. Revenons à notre ſujet, ſi la Pyramide eſt Droite réguliere, la hauteur étant donnée, il ſera aiſé de trouver les longueurs des Arêtes qui ſont les côtez qui comprennent ſes ſurfaces; car, [*Fig.* 260.] il n'y a qu'à quarrer le Rayon *c d* de la baſe, & la hauteur CS, & tirer la racine quarrée de leur ſomme, on aura le côté S*d*, lequel étant donné, ſuffit pour tous les autres qui lui ſont égaux, alors le développement d'une Pyramide Droite ne conſiſte qu'à répeter & ranger de ſuite autant de triangles iſoſceles qu'il y a de côtez à la baſe, & ajoûter la ſurface de cette baſe, comme on voit à la Figure 261. qui eſt le développement de la Pyramide pentagone, 260.

Fig. 260. & 261.

Si la Pyramide eſt ſcalene, c'eſt-à-dire, oblique ſur ſa baſe, l'operation devient un peu plus compoſée, parce que les triangles de ſes ſurfaces étant inégaux, il en faut chercher les côtez; & pour y parvenir, ce n'eſt pas aſſez d'avoir la hauteur du ſommet ſur le plan de la baſe, il faut encore le point de ſa projection.

Fig. 262. Soit [*Fig.* 262.] la Pyramide triangulaire ABCS donnée, s'il s'agiſſoit d'operer ſur le ſolide, il faudroit abaiſſer du ſommet S la perpendiculaire

Digitized by Google

SP ſur le plan de la baſe prolongée, ou par le moyen de deux Equerres, ou par le Problême de la 11.e prop. du XI. Livre d'Euclide, pour avoir le point P, qui eſt la projection du ſommet S, dans la diſtance où il doit être à l'égard du côté BC de la baſe de la Pyramide tracée ſur un deſſein à part. Puis ayant tiré de ce point une droite PD à volonté, on lui ſera une perpendiculaire PS égale à la hauteur donnée ; enſuite du point P pour centre & des diſtances PA, PB, PC pour Rayons, on décrira des arcs A*a*, B*b*, C*c* qui couperont PD aux points *a*, *b*, *c*, par leſquels tirant les lignes *a*S, *b*S, *c*S au point S, on aura les points que l'on cherche. Par le moyen de ces côtez & ceux de la baſe, on décrira trois triangles de ſuite qui formeront le développement de la Pyramide, en y ajoûtant pour quatriéme celui de la baſe.

Demonstration.

Puisque la ligne SP qui doit être ſuppoſée en l'air, eſt perpendiculaire au plan de la baſe ABC prolongé, elle ſera perpendiculaire à toutes les lignes menées dans ce plan par le point P (par la 5.e du 11. d'Eucl.) donc les triangles APS, *a*PS, ſont rectangles en P, mais par la conſtruction AP = *a*P & PS eſt commun, donc l'hypotenuſe AS eſt égale à *a*S, & par la même raiſon *b*S = BS & *c*S = CS, *ce qu'il falloit faire.*

Nous pouvons appliquer cette ſolution à toute autre Pyramide Polygone de quelque nombre de côtez que ſa baſe puiſſe être, puiſqu'il eſt évident qu'elle pourra être réduite en triangles.

Corollaire.

De-la on tire la maniere de *faire le développement d'un Cône quelconque*, droit ou ſcalene ; car on peut le conſiderer comme une Pyramide, dont la baſe a une infinité de côtez infiniment petits ; ainſi le Cône Droit étant enveloppé d'une infinité de triangles iſoſceles, il eſt viſible que ſon développement ſera un ſecteur de cercle par la comparaiſon de celui de la Pyramide pentagone de la Fig. 261. qui l'imite déja beaucoup, quoiqu'en ſi petit nombre de côté A*b*, *bc*, *cd*, *de*, *ef*, ce qui eſt connu de tout le monde.

Mais ſi ce Cône Droit étoit coupé par une baſe oblique à ſon axe, il eſt clair qu'il ſe formeroit une ſection differente du cercle, & par conſéquent qu'il en réſulteroit un contour de développement different du ſecteur.

Pareil changement arriveroit ſi le Cône étoit droit ſur une baſe Elliptique, ou ſcalene ſur une baſe Circulaire ; en ce cas ſi le Cône eſt ſcalene, les longueurs de ces côtez étant inégales, donneront pour con-

tour de la baſe développée une Courbe qui ſera toujours inégalement éloignée du ſommet S, excepté dans les points correſpondans, oppoſez non pas diametralement, mais ſuivant les perpendiculaires menées au diametre qui paſſe par le plus grand, & le plus petit côté du Cône; de ſorte que cette courbe ne peut plus être un cercle, comme elle étoit dans le Cône Droit.

On demandera peut-être comment on peut connoître le plus long & le plus petit côté de la ſurface d'un Cône ſcalene le voici.

Probleme VII.

La Baſe, la hauteur & la projection du Sommet d'un Cône ſcalene étant données, déterminer le plus long & le plus petit côté de ſa Surface.

Fig. 264. Soit [*Fig.* 264.] le cercle ADBR, la baſe du Cône dans le plan de laquelle [prolongé s'il le faut] eſt donné ou trouvé le point P pour la projection du ſommet S, ayant mené de ce point P par le centre C de la baſe ADBR la ligne PC, on fera PS perpendiculaire ſur PCB, & égale à la hauteur donnée; ſi du ſommet S on mene une ligne au point A, où la ligne PB coupe le cercle de la baſe, je dis que SA ſera le plus petit côté du Cône.

Et ſi du même ſommet S on mene SB, où la même ligne coupe le cercle de la baſe, je dis que la ligne SB ſera le plus long côté du Cône.

Demonstration.

Par la 8.e du III. Livre d'Euclide, la ligne PA eſt la plus courte de toutes celles qu'on peut mener au cercle du point P; donc le triangle PSA eſt le plus petit de tous les rectangles, qui auront pour côté commun la hauteur PS.

Donc SA eſt l'hypotenuſe qui approche le plus de la perpendiculaire SP, par conſéquent qui eſt la plus courte.

Par la même propoſition d'Euclid. la ligne PB étant la plus longue de toutes celles qu'on peut mener du point P à la circonference concave DB3. il eſt clair que la ligne SB eſt celle qui s'éloigne le plus de la perpendiculaire SP, par conſéquent qu'elle eſt la plus longue de toutes celles qu'on peut mener du point S à la circonference du cercle ADBR, qui eſt la baſe du Cône.

Donc SA eſt le plus petit côté du Cône ſcalene, & SB eſt le plus long; *ce qu'il falloit trouver.*

Cela ſuppoſé, il ſera facile de faire le développement d'une moitié

Digitized by Google

du Cône ſcalene à laquelle l'autre doit être égale, & abreger ainſi l'operation de moitié; en ſuivant la même pratique que nous avons donnée pour la Pyramide triangulaire.

L'on diviſera le demi cercle ARB en autant de parties égales ou inégales qu'on voudra avoir de côtez du Cône, par exemple, ici en 4, aux points 1, 2, 3, & l'on menera du point P à toutes ces diviſions des droites P 1, P 2, P 3, que l'on tranſportera par des arcs de cercles faits du point P pour centre en P 1^b, P 2^b, P 3^b; ſi du ſommet S on mene des lignes à ces points, il eſt clair, par le Problême précedent que les lignes S A, S 1^b, S 2^b, S 3^b, S B ſont autant de côtez du Cône, qui paſſent par les points donnez à la baſe A, 1, 2, 3, B; ainſi il ne s'agit plus que d'en faire uſage pour le développement.

Ayant porté à part [*Fig.* 266.] la ligne SB de la Fig. 264. en S^d, B^d pour premier côté d'un triangle, on prendra la Corde A 1, de laquelle comme Rayon, & du point B^d pour centre, on décrira un arc 3 *x*; enſuite ayant pris la longueur S 3^b de la Fig. 264. pour Rayon, & du point S^d pour centre, on décrira un arc 3 *y*, qui coupera le précedent au point 3, lequel eſt un de ceux du développement de la baſe. *Fig.* 266.

De la même maniere on trouvera le point 2. en faiſant le triangle S *d*, 3, 2, ſur le côté S^d 3 pour baſe, avec les deux autres donnez dans la Fig. 264. ſçavoir, S 2^b, & la Corde 1, 2, & en continuant ainſi de ſuite, on formera le Polygone S^d, B^d, 3, 2, 1, a^d, S *d*, qui ſera le développement de la moitié de la Pyramide, Octogone inſcrite dans le Cône; & ſi au lieu des lignes droites B^d 3, 3, 2, 2, 1, 1 a, on trace à la main une Courbe B^d *ef*R*g* a, on aura le contour de la baſe du Cône, laquelle ſera d'autant plus parfaite que le Polygone inſcrit dans la baſe du Cône aura de côtez, ce qui eſt évident, puiſqu'on aura un plus grand nombre de points. Il paroît par exemple, dans la Figure préſente, qu'il auroit été neceſſaire que ce Polygone au lieu de 8. eut eu ſeize côtez pour tracer l'arc B^d *e* 3, parce que la Courbure de l'arc B^d 3 eſt conſiderable à l'égard de la Corde B^d 3, & qu'il auroit été à propos qu'il eut été de 24. côtez pour tracer l'arc 3 *f* 2, pour avoir deux points dans cet arc, à cauſe du changement de la courbure, mais que l'Octogone ſuffit pour la partie 21, dont l'arc differe peu de la Corde, ainſi du reſte, ſuivant le plus ou le moins d'exactitude qu'on ſe propoſe.

Corollaire.

De-la on tire la maniere de *faire le développement de toutes les Courbes des ſections Coniques ſur la ſurface d'un Cône quelconque*, lorſque leurs axes ſont donnez dans le triangle par l'axe, & les plus grand & plus petit

Digitized by Google

côtez du Cône, ſuppoſant les plans des ſections perpendiculaires à ce triangle par l'axe ASB.

ig. 264. Car, *Fig.* 264. 1.° *pour l'Ellipſe*, ſuppoſant un des axes donné en E*b*, & la baſe du Cône diviſée, comme on l'a dit aux points 1, 2, 3, on menera par ces points des perpendiculaires à la ligne AB, qui la couperont aux points *p*C*q*, par leſquels & par le ſommet S on menera les lignes *p*S, CS, *q*S qui couperont E*b* aux points *fgb*, d'où menant des paralleles à AB juſqu'à la rencontre des côtez correſpondans S 1^{b}, S 2^{b}, S 3^{b} qui les couperont aux points *x*, *y*, *z*, je dis que les côtez S*x*, S*y*, S*z* ſeront terminez en E, *x*, *y*, *z*, *b*, à la circonference de l'Ellipſe, & que ſi chacun de ces côtez ſont portez à la Fig. 266. ſur ceux du développement du Cône, qui paſſent par les points B^{4}, 3, 2, 1, *a*^{4}, ils donneront les points *b*^{4}, *x*^{4}, *y*^{4}, *z*^{4}, E^{4}, par leſquels traçant à la main une ligne courbe, on aura la moitié de l'Ellipſe, qui a pour un de ſes axes la ligne donnée E*b* [*Fig.* 264.]

On en fera de même pour la deſcription de la Courbe qui eſt le développement d'une Parabole ou d'une Hyperbole, dont l'axe ſera donné dans le triangle par l'axe du Cône ASB.

2.° *Pour la Parabole*, ſoit [*Fig.* 264.] l'axe donné P^{b}*r*, lequel dans la Figure préſente eſt coupé par quatre lignes SB, S*q*, SC, S*r*, par le moyen deſquelles on trouvera autant de points de ſa circonference de chaque côté non compris celui du ſommet P^{b}; or ces points doivent être répandus ſur la ſurface du Cône développé, comme nous venons de le dire pour l'Ellipſe dans l'exemple précedent ſur les lignes SB, S^{4}3, S^{4}3, S^{4}2, S^{4}R; ainſi portant la longueur S P^{b} de la Fig. 264. en S^{4} P de la Figure 266. on aura ſur S^{4}, B^{4}, le ſommet P de la Parabole développée. S*x*^{3} porté en S^{4}, *x*^{3}, ſur S^{4}3, donnera le point 3. provenant de la diviſion de la baſe 3, à cauſe de la perpendiculaire 3*q*, ſur AB; de même on portera S*n* en S^{4}*n* ſur S^{4}2, qui donnera le point *n* provenant du point 2. de la baſe, à cauſe de 2C perpendiculaire ſur AB; de même enfin S*r* en S^{4}R^{4} provenant du point R, à cauſe de R*r* perpendiculaire ſur AB; la Courbe P^{4}, *x*^{3}, *n*R^{4} ſera le développement de la Parabole propoſée.

3.° *Pour l'Hyperbole*, on operera de même que pour la Parabole, mais dans la Figure préſente où la demi-baſe du Cône n'eſt diviſée qu'en quatre parties, & l'axe de l'Hyperbole eſt donné en H*r*, on n'aura qu'un point à ſa circonference entre ſon ſommet H & celui de ſon amplitude R*r* à la baſe, parce que l'axe H*r* n'eſt coupé que par la ligne *p*S provenant du point 1. à la circonference de la baſe du Cône. De ſorte qu'on n'aura que trois points pour la moitié du développement de cette Hyperbole;

Digitized by Google

bole; ſçavoir, le ſommet H, en portant SH de la Figure 264. en $S^d b$ de la Fig. 266. 2.° On aura le point u en portant Sv en $S^d u$ ſur S^d, & enfin le point R à la baſe comme à la Parabole où on les ſuppoſe communs, par hazard.

Nous n'ajoûterons rien ici de la deſcription du cercle produit par une ſection du Cône coupé par un plan parallele à la baſe, parce qu'il eſt aiſé de voir que les côtez du Cône qui le coupent, & par conſéquent qui en donnent les points ſur la ſurface conique développée, doivent être proportionels à ceux qui ſont continuez juſqu'à la baſe du Cône $S^d B^d$: $S^d b$ :: $S^d a^d$: $S^d a$, & de même ſur les autres côtez $S^d 3$, $S^d 2$, $S^d 1$. Or ces proportions ſont toutes trouvées à la Fig. 264. où la ligne ab coupe proportionellement les côtez SB, Sb, Sq, SC, $S2^b$, St, $S1^b$, SA, aux points b, m, n, o, a; mais ſi le cercle provenoit d'une ſection ſous-contraire, il tomberoit alors dans le cas du développement de l'Ellipſe.

Remarque ſur certains Points des Courbes développées ſur le Cône.

Puisque le côté SA du Cône eſt le plus petit de tous ceux qu'on peut tirer du ſommet S, comme nous l'avons démontré ci-devant, & que le côté SB eſt le plus grand; il ſuit que tous les points de la demi-circonference de la baſe A2B, ſont tous inégalement éloignez du ſommet S ou S^d de la Fig. 266. au développement de la ſurface du Cône, *Fig.* 264. & que les points B^d & a^d ſont comme les termes du plus grand, & du moindre éloignement de la Courbe B^d, R^d, a^d. D'où vient qu'on les appelle *Points de Station*; car dès qu'elle eſt parvenuë en a^d, elle ceſſe de s'approcher de S^d, & dès qu'elle eſt parvenuë en B^d, elle ceſſe de s'en éloigner, & recommence à s'en approcher.

Il en ſera de même pour toutes les autres ſections Coniques, dont les axes Eb, Pr, Hr ſont dans le triangle par l'axe ASB.

On peut encore remarquer dans la Courbe de développement de la baſe du Cône, qu'elle change de contour par une inflexion ſemblable à celle d'une S; en ſorte qu'elle paſſe du contour concave $a^d g$R, à l'égard du point S^d au convexe R^d, 2, 3, B^d, le point R^d qui eſt le terme & la jonction de ces deux contours differens, eſt appellé *point d'inflexion*. Lequel partage inégalement la Courbe, en ſorte que la partie concave à l'égard du ſommet eſt toujours la plus grande.

Pour trouver ce point à la baſe ARB [*Fig.* 264.] il faut tirer du

point P, projection du ſommet du Cône S, une tangente PR, le point d'attouchement R ſera celui que l'on cherche; ce qui fait voir que la partie A 1 R convexe à l'égard de P eſt toujours plus petite que R 3 B concave à l'égard de ce même point; puiſque la tangente ne pourroit toucher la baſe au point du milieu 2, que lorſque le point P ſeroit infiniment loin ſur la direction B*p* prolongée.

Du Développement des Priſmes.

Les Priſmes auſſi bien que les Cônes peuvent être droits ou obliques ſur leurs baſes.

Il eſt évident que le développement des Priſmes Droits eſt un Parallelograme rectangle compoſé de tous ceux des ſurfaces, dont il eſt enveloppé; puiſque les parties priſes enſemble ſont égales à leur tout, & que les baſes étant paralleles, les hauteurs ſont toujours égales.

Il n'en eſt pas de même des Priſmes ſcalenes, dont les côtez ne ſont pas perpendiculaires au plan de leur baſe; car quoiqu'ils ſoient compris entre deux plans paralleles, comme nous le ſuppoſons; premierement, il ſuit bien de-là qu'étant paralleles entr'eux, ils ſont tous égaux, mais non pas qu'ils faſſent des angles égaux avec les côtez de leur baſe; d'où il réſulte que chaque ſurface, dont le Priſme eſt enveloppé, peut être un Parallelograme different, excepté ceux qui ont pour baſe les côtez du Polygone de la baſe du Priſme, qui ſont paralleles & égaux entr'eux.

Pl. 23. *Fig.* 268. Soit [*Fig.* 268.] le Priſme AC, oblique ſur ſa baſe BCDE, de l'obliquité marquée par la ligne PB, diſtance d'une perpendiculaire HP abaiſſée ſur le plan de la baſe prolongée. Ayant pris à volonté ſur un de ces côtez, comme ſur HB, un point *d*, on lui menera la perpendiculaire *d*K, qui coupera le côté ſuivant GC au point K, par lequel on tirera de même une perpendiculaire KL, & ainſi de ſuite; juſqu'à ce qu'ayant parcouru le contour, on ſoit revenu au point *d*.

Fig. 269. On fera enſuite à part [*Fig.* 269.] une ligne droite *d*N⁴, ſur laquelle on portera de ſuite les longueurs *d*K, KL, LM, MN⁴ égales à celles des diſtances perpendiculaires des côtez du Priſme AC, & par tous les points *d*KLMN⁴, on tirera des perpendiculaires à *d*N⁴, comme *bb*, *gc*, *id*, *ae*, HB, ſur leſquelles on portera de part & d'autre de la ligne *d*H⁴ les longueurs qui expriment les diſtances de cette ligne aux angles du Priſme; ainſi prenant *d*H de la Fig. 268. [on la portera en *db*] de la Figure 269. KG en *kg*; LI en *li*, &c. d'un côté; & de l'autre *d*B en *db*, KC en *kc*, LD en *ld*, &c. & l'on aura les points *bgia*H vers une baſe, & *bcde*B, vers l'autre; par leſquels menant des lignes droites

Digitized by Google

de point en point, on aura la Figure *hiag*FB*edcbb* pour le développement des côtez du Priſme, à laquelle joignant les deux baſes X & Q, on aura celui de ſa ſurface entiere, qui eſt ici celle d'un Parallelepipede obliquangle compris par ſix ſurfaces, qui ſont autant de Parallelogrames, comme le cube l'eſt par ſix quarrez.

Il eſt clair que de quelques nombres de ſurfaces que puiſſe être ce Priſme, le développement ſe fera toujours de même; fût-il d'une infinité de côtez, ce qui le rendroit alors très ſemblable au Cylindre ſcalene, qu'on peut mettre au rang des Priſmes en conſiderant ſes ſurfaces comme infiniment étroites.

Corollaire I.

De-la on tire la maniere de *faire le développement de la ſurface du Cylindre ſcalene.*

Soit [*Fig.* 270.] le Parallelograme BAFD la ſection d'un Cylindre ſcalene par ſon axe, & le diametre de ſa baſe dans la plus grande obliquité, comme on voit à la Figure 271. [quoique plus petite] le diametre BA paſſant par le point R de la perpendiculaire DR abaiſſée ſur le plan de cette baſe. *Fig.* 270.

Sur ce diametre BA ayant fait le demi cercle B*b*A, on le diviſera en tel nombre de parties qu'on voudra égales ou inégales, il n'importe, mais les égales ſont plus commodes, & l'on menera par les points de diviſion des perpendiculaires à ce diametre, comme 1*p*, 2*p*, 3*p*, 4*p*, qui le couperont aux points *p* & *p*, par leſquels on menera autant de paralleles au côté BD, comme *p*5, *p*6, *p*7, *p*8.

Ensuite par un point E pris à volonté ſur BD, on lui tirera la perpendiculaire ER qui coupe les paralleles à BD aux points *nopq*, qui ſont ceux des abſciſſes de l'arc-Droit ou ſection perpendiculaire à l'axe qui eſt ici une Ellipſe, dont ER eſt le petit axe, & BA le grand axe par le moyen deſquels on tracera cette Courbe, dont le contour rectifié, ſera le développement de celui du Cylindre ſcalene; mais ſi l'on ſe contente du développement des Cordes compriſes entre les diviſions de l'arc-Droit, on les trouvera en portant, ſur les paralleles à l'axe, les hauteurs *p*1, *p*2, *p*3, *p*4 ſur les paralleles correſpondantes, comme *p*1 en *n*I, *p*2 en *o*K, *p*3 en *p*L, *p*4 en *qm* les longueurs E1, 1K, KL, L*m*, *m*R jointes enſemble ſur une ligne droite, comme E*e* de la Figure 272. feront le développement du contour du Cylindre, qui ſera d'autant plus exact, que les parties des diviſions du demi cercle B*b*A ſeront en plus grand nombre.

Presentement pour avoir le développement du contour des baſes, *Fig.* 272.

ayant porté ſur la ligne E*e*, que j'appelle la Directrice, les longueurs des Cordes R*m*LKIE, on menera par tous ces points des perpendiculaires à la Directrice, ſur leſquelles on portera les avances du Profil de la Figure 270. comme RA de ce Profil en RA de la Fig. 272. *qp* en *m*1, *pp* en L2, *op* en K3, *np* en I4, EB en *e*B, & par les points A1234B, on tracera à la main une Courbe qui ſera le développement du contour de la baſe, qu'on répetera de l'autre côté en A*b*, & de même façon au deſſous en D*f*, ou bien ſi les baſes ſont paralleles, on trouvera la ſeconde, en portant ſur toutes les paralleles à AD la même longueur AD en 1 11, 2 12, 3 13, &c. ce qu'on appelle en terme de l'art jauger.

Si enfin on ajoûte de part & d'autre les deux cercles des baſes *b*3A, D3*f*, on aura le développement de la ſurface totale du Cylindre.

Le développement par les Cordes eſt plus uſité dans les Traits de la coupe des Pierres, que celui du contour, parce qu'on commence par les Doeles plates, dont les Cordes ſont les largeurs à l'arc-Droit.

Nous ſuppoſons ici que le Profil qui ſert à faire le développement eſt fait ſur le diametre de la plus grande obliquité de l'axe ſur ſa baſe, pour n'avoir aucun égard aux obliquitez des voutes compoſées de pluſieurs inclinaiſons de biais, deſcente, talud & ſurplomb; parce que nous avons donné la maniere de les réduire toutes à une ſeule, lorſque nous avons donné les Régles du Profil.

Quand nous parlons de l'obliquité de l'axe ſur ſa baſe, il eſt évident que nous parlons auſſi de celle des côtez du Cylindre ſur le même plan de la baſe, par un Corollaire de la 8.e du II. Livre d'Euclide, qui dit que ſi une ligne eſt perpendiculaire à un plan, toutes ſes paralleles le ſont, & ſi elle lui eſt inclinée, toutes ſes paralleles le ſont d'un même angle d'inclinaiſon; mais comme les côtez ſont coupez inégalement par un plan perpendiculaire à l'axe, il réſulte que les meſures de leurs longueurs au deſſous ou au deſſus de ce plan, ſont inégales entr'elles, mais égales à celles du Profil fait ſur le diametre de plus grande obliquité, comme à la Figure 270. au deſſus & au deſſous de la ligne ER.

Corollaire.

D'ou il ſuit qu'au Cylindre ni au Cône les differentes compoſitions d'obliquitez ne doivent rien changer au développement de leurs ſurfaces, mais ſeulement aux termes d'où on les commence, ou auſquels on les termine; par exemple, ſi le développement avoit été commencé ſur le côté 3, 13. les courbures A*b*F & A4B n'auront pas été également

igitized by Google

étenduës de part & d'autre; mais ce qui auroit été retranché de la courbure convexe 3 4 B d'un côté, auroit été ajoûté de l'autre; ce qu'il eſt à propos de remarquer pour ſentir la raiſon des inégalitez que l'on trouve dans les développemens des Doeles, dans les Traits des voutes d'obliquitez compoſées, qu'on verra au IV. Livre.

Corollaire II.

De la maniere de faire le développement du contour des baſes des Cylindres, on tire aiſément celles de tracer ſur leurs ſurfaces développées les cercles & les Ellipſes qu'on y peut décrire; il ne s'agit que d'avoir les diametres de ces ſections (ſituées comme elles doivent être) dans le Profil ou ſection du Cylindre par l'axe, comme LE ou *b*G dans le Parallelograme BAFD; leſquels diametres ſeront coupez par les paralleles à l'axe provenant des diviſions du contour de la baſe 1, 2, 3, 4, comme EL aux points *t*, *t*, *t*, *t*, & les diſtances *tn*, *to*, *tp*, *tq*, LR étant portées ſur les perpendiculaires à la Directrice [*Fig.* 272.] aux points correſpondans en deſſus ou en deſſous de cette Directrice, donneront ſur les côtez des points par leſquels on tracera à la main une Courbe FLI, qui ſera le développement de l'Ellipſe, qui a pour diametre EL, & la Courbe *bg*H celle qui a pour diametre au Profil la ligne *b*G.

Corollaire III.

Il ſuit de la poſition des axes donnez dans la ſection qui eſt le Parallelograme par l'axe & par le point P, lequel eſt la projection du ſommet de l'axe ſur une de ſes baſes, que l'on connoît les points d'inflexions des Courbes, qui ſont les développemens des circonferences des cercles & des Ellipſes qu'on décrit à la ſurface du Cylindre par des ſections obliques à l'axe; car prenant pour exemple l'Ellipſe, dont le diametre eſt EL, il eſt viſible que la diſtance RL étant la plus grande de toutes les autres *qt*, *pt*, &c. lorſque la Courbe EL ſera parvenuë au point L, elle commencera à ſe rapprocher de la ligne E*e*, & qu'étant parvenuë en E où elle la touche, elle commencera à s'en éloigner; il en ſera de même des points A & B, *b* & *b*, comme il a été dit à l'égard des développemens des ſections Coniques ſur la ſurface du Cône développée. *Fig.* 270. & 271.

Demonstration.

La raiſon pour laquelle on prend une perpendiculaire ſur les côtez d'un Priſme pour en copier les ſurfaces, c'eſt pour en abreger l'operation; car on ſçait que pour faire une Figure ſemblable & égale à une

autre, il n'y a que deux manieres, ou de la réduire en triangles, ou de meſurer les diſtances de ſes angles à une ligne donnée par des perpendiculaires, ce qui eſt proprement & équivalemment réduire tous les triangles en rectangles; de ſorte qu'un angle Droit ſert pour tous. Or on peut bien mettre la premiere maniere en pratique pour les Priſmes ordinaires, mais non pas pour les Priſmes d'une infinité de côtez, tels que ſont les Cylindres; car la largeur des Parallelogrames, & par conſéquent des triangles qui en ſont les moitiez, eſt réduite à rien; il ne reſte donc de leur dimention que la longueur, & l'on ne peut conſiderer ces ſurfaces comme ayant de la largeur courbe, ſans reconnoître que les Diagonales de ces Parallalogrames mixtes ne ſeroient plus des lignes droites, mais courbes proportionellement à la courbure de leurs baſes, ce qui eſt évident.

Il eſt inutile de rendre raiſon pourquoi on prend une perpendiculaire à l'axe du Cylindre pour avoir le développement de ſon contour; car il eſt clair que toute autre ſection que ER augmentant le diametre par ſon obliquité, augmente auſſi le contour, les circonferences des cercles & des Ellipſes étant entr'elles comme leurs diametres; or de toutes les lignes qu'on peut mener entre deux paralleles, la perpendiculaire eſt la plus courte; donc la circonference eſt auſſi la moindre, laquelle eſt la ſomme de l'infinité des perpendiculaires tirées aux côtez, infinis en nombre, du Priſme cylindrique.

Des Développemens compoſez de deux ou trois eſpeces de Surfaces d'un corps coupé en pluſieurs parties dans ſon épaiſſeur, comme ſont dans les Voutes celles des Doeles & des Lits, & même des Extrados.

Les Architectes & les Auteurs de la coupe des Pierres ont coûtume de raſſembler dans un même deſſein de leur Epure le développement de la ſurface interieure de la voute, qu'ils appellent la Doele, & les ſections planes qui ſont les intervales de ſon épaiſſeur entre deux vouſſoirs qu'ils appellent les *Lits*, pour en voir d'un coup d'œil la difference & le rapport.

Ce genre de repreſentation eſt un aſſemblage du développement de la Doele fait ſans interruption, comme il convient aux ſurfaces Cylindriques & Coniques, & de celui de l'Extrados, qui eſt de même nature, mais interrompu au milieu, où il eſt diviſé en deux parties ſeparées; & enfin couvert en partie de celui des ſurfaces des Lits de chaque rang de vouſſoir, leſquelles ſont couchées dans toute leur étenduë ſur le développement de la Doele, laquelle doit être conſiderée en ces endroits

comme double, partie en Doele, & partie en Lit, & même ſi l'on veut, encore comme triple ſi l'on y conſidere l'Extrados, dont nous parlerons peu, parce qu'on en fait rarement uſage.

Pour rendre cette explication plus ſenſible, nous donnerons pour exemple un Berceau qui ait une double obliquité, l'une de direction de face ſur celle de ſon axe horiſontal, ce qu'on appelle biais, & l'autre d'inclinaiſon de face à un plan vertical, ce qu'on appelle Talud.

Soit [*Fig.* 274.] ABFE le plan horiſontal de la Doele d'un Berceau biais, dont C*x* eſt la ligne du milieu, c'eſt-à-dire l'axe, qui eſt biais à l'égard de la ligne AB, baſe de la face qui eſt couchée en Talud ſur cette baſe, ſuivant une inclinaiſon connuë ou donnée, par exemple *b*T à l'égard de *ab*, avec laquelle elle fait un angle obtus *ab*T. *Fig.*

Sur AB comme diametre interieur, & *ab* exterieur, on décrira deux demi-cercles *a*H*b*, A*b*B qui comprendront l'épaiſſeur du Berceau, auſquels on menera par les ſommets H & *b* deux tangentes HT, *bt* paralleles à *ab*, qui couperont le Profil du Talud *b*T aux points T & *t*, & pour connoître combien ces points s'écartent de *l'aplomb*, on fera la verticale V*b* perpendiculaire à *ab*, qui coupera ces tangentes aux points V & *u*, les diſtances VT, *ut* ſeront celles dont les ſommets de la Doele & de l'Extrados s'écartent de l'aplomb aux Arêtes de la face.

Presentement pour connoître combien les *aplombs* de ces points s'éloignent de la baſe *ab*, diametre de la face, on la prolongera vers L, puis on menera par les points T & *t* des paralleles à V*b*, qui la couperont aux points L & K; les longueurs *b*L & *b*K ſeront les diſtances que l'on cherche, & KL l'intervale horiſontal des Arêtes de la Doele & de l'Extrados au milieu de la chef que l'on portera perpendiculairement ſur le milieu de AB en CK & CL pour avoir les demi-axes conjuguez aux premiers *ab*, AB, par le moyen deſquels on décrira (par le Problême VII. du Livre II.) les demi-Ellipſes AKB, *a*L*b* qui ſeront les projections des Arêtes de la face à la Doele & à l'Extrados.

Cette projection étant faite, on diviſera l'arc A*b*B en tel nombre de vouſſoirs qu'on voudra, comme ici en cinq aux points 1, 2, 3, 4, par leſquels on tirera du centre C les joins de tête 1. 1′, 2. 2′, 3. 3′, 4. 4′, & des mêmes points des perpendiculaires à la baſe *ab* qu'on prolongera juſqu'aux demi-Ellipſes de la projection AKB, *alb* qu'elles couperont aux points 11, 12, &c. 21, 22, &c. par leſquels on tirera du centre C les projections des joins de tête ^{11} ^{12}, ^{21} ^{22}, par leſquels on menera des paralleles à l'axe C*x*, ^{11}q, ^{21}q, ^{12}q, ^{22}s, les trapezes ^{12}q, s^{22}, & ^{11}q, s^{21} ſeront les projections des Lits, dont on veut chercher la

vraye étenduë pour l'appliquer ſur le développement de la Doele.

Il s'agit preſentement de faire ce développement de la même maniere que nous l'avons dit pour la Figure 270. en commençant par former l'arc Droit D R, & étendant ſon contour D 1^r, 2^r, 3^r, 4^r R ſur une Directrice *dd* de la Figure 280. & portant ſur les diviſions dD^d, 1, 2, 3, 4 R *d* les longueurs de la projection i^{11}, d^{21}; i^{12}, i^{22} d'un côté, & les reſtes *iq*, *is*, &c. de l'autre, ce qui donnera les quatre angles des trapezes qui ſont les ſurfaces de chaque Lit, comme a^d A^d, d^e E, $e\,1^a$ QS, $e\,2^a$ FS, $3^d e$ NG, &c. dont les deux premiers a^d E & B^d K ſont égaux en tout à ceux des Impoſtes de la Figure 274. marquez des Lettres *a*E, BN. *Fig.* 280.

Si l'on joint les extremitez exterieures de ſes trapezes par une ligne courbe, on aura le développement du contour de l'Arête de la Doele, & de la face, telle eſt la ligne A 1^d, 2^d, 4^dB, & la ligne EQFGHI pour le développement du contour de la Doele de la face poſterieure qu'on ne ſuppoſe pas parallele à la premiere AKB qui eſt en Talud, mais à plomb ſur la ligne *d*N; ce qui fait que ces contours courbes du développement ſont inégaux, provenant de celui de deux Ellipſes inégales.

Pour éviter la confuſion de ce développement, on a coûtume de diſtinguer les Lits par une hachure laiſſant le développement de la Doele en blanc. La même Figure donnera le développement de l'Extrados ſi l'on joint par une ligne courbe les angles exterieurs des Lits comme *aee*, b^d, *oo*, mais non pas entierement dans ſes meſures, car il reſte au milieu un intervale *eo* qui eſt beaucoup plus grand que celui de la clef, parce que les Lits prennent leurs origines exterieures, partie d'un côté de la clef, partie de l'autre. Pour en faire un contour ſuivi, il faudroit les ranger tous de ſuite ſur un même côté, comme on a fait à la Figure 280. en tranſportant le point a^d en Æ, *c* en *e*, &c. alors on auroit une courbe d'Extrados qui croiſeroit celle de la Doele Æ 1^r, $2^r oo b^d$; ce qui n'eſt point uſité dans les Traits, n'étant d'aucune utilité.

Nous ne nous arrêterons pas davantage à l'explication de cette eſpece de deſſein, parce qu'on en trouvera pluſieurs exemples dans la conſtruction des Traits au IV. Livre, il ſuffit d'en avoir donné une bonne notion pour établir les principes de *l'Epure*.

Remarque ſur les Développemens compoſez.

Les Auteurs des Traitez de la coupe des Pierres ont accoûtumé d'accompagner preſque tous les Traits d'un développement des *Doeles* joints à ceux des *Lits* dans l'ordre que nous venons de l'expoſer. Ce genre de deſſein

Digitized by Google

deſſein n'eſt pas inutile dans les Traits en petit ſur le papier pour voir d'un coup d'œil la Figure & la grandeur des Panneaux de Lit & de Doele; mais comme il ſeroit trop incommode & de peu d'utilité de les tracer en grand dans toute l'étenduë de l'Epure, particulierement lorſque les voutes ſont un peu grandes, on peut dire que cette pratique n'eſt pas neceſſaire pour l'exécution. Il ſuffit de ſçavoir faire les Panneaux de chacun des Lits en particulier ſans les aſſembler, ce qui cauſeroit infailliblement de la confuſion, lorſqu'il y a beaucoup de Lits plus larges que les Doeles, parce qu'ils croiſeroient les uns ſur les autres; c'eſt pourquoi nous n'avons pas imité ces Auteurs dans notre IV. Livre, pour ne pas multiplier les lignes inutiles, & donner trop d'étenduë aux Figures des Planches, où il ne s'en trouve déja que trop qui embaraſſent & fatiguent l'attention du Lecteur.

On trouvera peut-être une difference conſiderable entre le contour de ce développement de la Figure 280. & de celui de la Figure 272. mais ſi l'on y fait attention, elle n'eſt qu'apparente, parce qu'à cauſe de la double obliquité du Berceau de la Fig. 274. le point de Station ne ſe trouve pas au milieu du développement, comme à la Figure 272. provenant du Cylindre oblique 270. où l'on n'a conſideré qu'une ſeule obliquité de *biais*; pour s'en convaincre, il faut réduire la double obliquité du Berceau 274. en une ſeule, ce que l'on peut faire comme il ſuit.

On menera par le point *x* extremité de l'axe, une perpendiculaire *x* Y ſur A B, ſur laquelle on portera la diſtance du Talud V T de Y en *z*, ſi l'on tire du centre C la ligne C*z*, elle donnera la direction de la plus grande obliquité, qui réduit celle du biais C Y, & celle du Talud Y Z en une ſeule C Z, ce qui eſt clair.

Pour en concevoir la raiſon, il faut ſçavoir; 1.° Que l'axe d'un Cylindre ſcalene, de même que celui du Cône ſcalene, dont nous avons parlé, n'eſt pas incliné également à tous les diametres du cercle de ſa baſe; 2.° Que la ſection par l'axe faite par un plan perpendiculaire à celui de la baſe, forme le Parallelograme le plus oblique; 3.° Qu'une autre ſection perpendiculaire à celle-ci forme un Parallelograme rectangle, & par conſéquent que les autres ſections ſont des Parallelogrames plus ou moins obliques, ſelon qu'ils s'approchent ou s'éloignent de ces deux premiers; ainſi le Parallelograme A B F E n'étant pas dans un plan perpendiculaire au plan de la baſe *a d b*, n'eſt pas le plus oblique de toutes les ſections par l'axe, c'eſt celui qui paſſe par C *z*, où eſt le plus grand biais; ce que l'on peut démontrer comme il ſuit. Pour éviter la confuſion des lignes dans la Figure, on tranſportera la longueur Y *z* en Y Z, comme ſi, à talud ou plûtôt à pente égale, le Berceau étoit incliné en ſur-

plomb, & ayant tiré CZ, on lui menera la perpendiculaire Z8; enſuite ayant pris la longueur Cx de l'axe pour Rayon d'un arc 98, qui coupera Z8 au point 8, on tirera 8C, qui repreſentera la poſition de l'axe à l'égard d'un plan qui couperoit le Cylindre par l'axe, & le diametre 7Z, lequel repreſente, par notre ſuppoſition dans le changement de la Figure, celui qui paſſeroit par Cz. Il faut démontrer que l'angle 8CZ que fait l'axe avec ce diametre, eſt plus aigu que celui que ce même axe conſideré en Cx fait avec un autre diametre AB.

Les deux triangles CYz & CZ8 ſont tous deux rectangles, l'un en Y, l'autre en Z: ils ont tous deux une hypotenuſe égale [par la conſtruction C8 = Cz] & le côté Cz plus grand que CY; donc l'autre côté Z8 ſera plus petit que xY, par conſéquent l'angle oppoſé 8CZ, ſera plus petit que xCY; *ce qu'il falloit démontrer.*

D'ou il ſuit que le point de Station de la Courbe du développement qui repreſente le cercle de la baſe *adb*, ou *aHb* étant au point Z, comme nous l'avons dit de la Figure 272. les parties de cette Courbe ne ſont pas égales de part & d'autre du milieu, qui repreſente la clef, comme lorſqu'il n'y a qu'une ſeule obliquité de biais ſans Talud; mais elles pourront l'être ſi on les conſidere à égale diſtance du point de Station correſpondant au point z, où eſt la plus grande obliquité du Cylindre ſur ſa baſe.

Du Développement des Polyedres & de la Sphère.

Parmi les cinq Corps réguliers le Dodecaedre qui eſt compris par douze ſurfaces égales qui ſont des Pentagones, eſt le premier qui commence à approcher de la ſphère, enſuite l'Icoſaedre qui eſt compris par vingt triangles Equilateraux, eſt déja aſſez rond pour être propre à rouler comme une boule; mais on ne ſçauroit augmenter le nombre de ſes ſurfaces, & en conſerver l'égalité entr'elles; de ſorte qu'il n'eſt point de plus gros Polyedre régulier que l'on puiſſe comparer à la ſphère; mais il n'eſt pas difficile d'en faire d'irréguliers qui en approchent infiniment, car ſi l'on diviſe par la penſée un demi cercle en un Poligone d'une infinité de côté, la révolution qu'il fera ſur ſon diametre formera un ſolide, qui ſera compoſé d'une infinité de Cônes tronquez formez par la révolution des Cordes de ce demi cercle, qui ſont inclinées à ſon diametre, comme les côtez du Cône ſont inclinez à leur axe. Et ſi l'on diviſe les baſes de chacun de ces Cônes tronquez en Polygones, on aura des Pyramides tronquées inſcrites dans ces Cônes tronquez; de ſorte que leurs côtez ſeront autant de Trapezes qui viennent en ſe rétreciſſant vers les Poles, comme on voit à la Figure 276. & ſe

Fig. 276.

Digitized by Google

réduiſent enfin en triangles aux deux Poles de la ſphère, où les Pyramides ſont entieres, comme 2P3.

L'arrangement de cette ſuite de Trapezes qui forment une ſuperficie de Polyedre comparable à celle de la ſphère circonſcrite, peut ſe faire de deux manieres, ou ſuivant les Meridiens, c'eſt-à-dire, les plans coupans la ſphère par ſes Poles, comme à la Figure 277. & alors les Trapezes de ces ſurfaces deviennent tous inégaux de part & d'autre de l'Equateur juſqu'au Pole P, où ils finiſſent par un triangle 2p2, & parce que cette Figure approche de celle d'un Fuſeau à filer, on appelle ce développement de la ſphère en *Fuſeaux*. *Fig.* 277.

L'autre maniere d'arrangement des Trapezes, dont nous faiſons un plus grand uſage, eſt ſuivant les paralleles à l'Equateur en forme de Zones, & alors tous les Trapezes égaux ſont rangez de ſuite, comme à la Figure 278. où l'on ſuppoſe la circonference du parallele diviſée en dix parties; en ſorte que la Zone de cercle AB étant pliée, & le Trapeze A étant joint au Trapeze B par leur côté O1, O1, il ſe forme une Pyramide peu differente d'un Cône tronqué, dont le ſommet eſt en S [*Fig.* 276.] parce que le point S eſt la rencontre de l'axe xS du Cône, & des Cordes O1, 54 prolongées, leſquelles Cordes ſont les côtez du Polygone inſcrit dans les quarts de cercle C*o*P, C5P, dont la révolution a formé l'Hemiſphère *o*P5; de ſorte que ſi l'on prend la longueur S*o* pour Rayon, & que d'un centre x pris à volonté, on fait deux arcs de cercles concentriques *o*5O, 141 éloignez de l'intervale de la Corde O1 de la Fig. 276. & que l'arc *o*5O ſoit fait égal à la circonference du cercle, qui a pour diametre *o*C5, & l'arc 141 égal à la circonference du cercle, qui a pour diametre 14, on aura le développement de la Pyramide tronquée *o*145 en dix Trapezes égaux, rangez ſur une même Zone de ſphère, ou plûtôt ſur une portion de Couronne de cercle, comme on voit dans la Figure 278. la même choſe ſe fera pour le Cône tronqué 1, 2, 3, 4 inſcrit dans la ſphère par la révolution de la Corde 1, 2 autour de l'axe S²C, & l'on aura la portion de Couronne de cercle $1^a\,4\,1^b\,2,3,2$, laquelle étant pliée en rond, faiſant joindre les Trapezes *a* & *b* formera la Zone du Cône tronqué 1, 4, 3, 2 inſcrit dans la ſphère. Enfin, parce que la Corde 2P aboutit au Pole P, elle décrira un Cône, dont le ſommet ſera en P, & dont le développement ſera le ſecteur $2^a\,3\,2^b$, dont la circonference approchera beaucoup de celle du cercle entier, parce qu'elle doit être égale à celle du cercle qui a pour diametre 2, 3 de la Fig. 276. par où l'on voit que chacune des Couronnes de cercle doit contenir le même nombre de Trapezes, quoique leur circonference diminuë à meſure qu'on approche du Pole, parce qu'ils diminuent auſſi de largeur. *Fig.* 278.

Remarques ſur l'Uſage de ce Développement.

L'on fait uſage de tous ces arrangemens de développemens des Polyedres inſcrits dans la ſphère, ſoit en la réduiſant ſimplement en Cônes tronquez, ſoit en ſubdivifant ces Cônes, & y inſcrivant dans chacun une Pyramide tronquée, alors on range leurs ſurfaces qui ſont des Trapezes ſur les paralleles à l'Equateur de la ſphère, comme à la Figure 278. en forme de Couronne de cercle, ou ſur les Meridiens, comme à la Fig. 277. ce qui forme une Figure de Fuſeaux.

L'on peut dire que ce principe eſt celui de la coupe de toutes les voutes ſphériques faites par Panneaux.

Mais parce que les Cordes des premieres diviſions en vouſſoirs à la naiſſance des voutes, comme *o 1* donnent des lignes ſi peu inclinées à l'axe de la ſphère, que le ſommet du Cône formé par leur prolongation juſqu'à la rencontre de l'axe, eſt ſitué fort loin de ſa baſe; il arrive que le Rayon qui ſert à faire le développement du Cône tronqué devient extrêmement long & incommode pour tracer un arc de cercle; j'ai pourvû à cet inconvenient par le Problême ſuivant.

Probleme VIII.

Le Diametre AB de la baſe d'un Cône Droit tronqué, & l'inclinaiſon du côté EB ſur ce Diametre étant donnez, trouver autant de points que l'on voudra à la circonference de la Couronne de cercle qui en exprime le Développement, ſans en avoir le centre, ou ce qui eſt la même choſe, le ſommet du Cône.

Fig. 275. Soit [*Fig. 275.*] AB le diametre de la baſe inferieure du Cône tronqué, DE celui de la ſuperieure, qui eſt donné par l'inclinaiſon du côté BE vers l'axe SC, lequel eſt perpendiculaire ſur le milieu du diametre donné AB; & EB, DA les côtez qui ſont partie de ceux du triangle par l'axe ASB, ſi l'on acheve le Cône en prolongeant ſes côtez, CX ſera une partie de l'axe CS.

Ayant pris à volonté le point F ſur le côté EB, on menera FG parallele à XC, ou perpendiculaire à CB, & l'on diviſera l'angle EFG en deux également par la ligne FL, à laquelle, par le point B, on menera la parallele BY, qui rencontrera XC prolongée en Y. Je dis que le point Y ſera la circonference de la baſe de la Couronne de cercle qui donnera le développement du Cône tronqué.

De même ayant pris à volonté ſur CB le point H, & mené par le Problême I. du III. Livre la ligne HN, laquelle étant prolongée con-

Digitized by Google

courre au même point S que la ligne BE ; ſur cette ligne HN ayant pris un point K à volonté, & mené, comme ici-devant, KI parallele à SY, on diviſera de même l'angle NKI en deux également par la ligne MK, à laquelle par le point Y on menera la parallele Yγ ; le point γ ſera à la même circonference que le point Y. On trouvera en répetant une pareille operation, autant de points que l'on voudra, dont on pourra placer les correſpondans entre YA, ſans le ſecours du centre ou ſommet S.

Ce que l'on dit de la baſe AB du Cône tronqué pourra s'appliquer à la baſe ſuperieure DE du même Cône.

Demonstration.

Soient prolongez les côtez BE, AD juſqu'à ce qu'ils concourrent au point S, où ſera le ſommet du Cône.

A cauſe des paralleles FG, SY les angles GFB, YSB ſont égaux entr'eux ; & à cauſe des autres paralleles LF, YB, les alternes LFG, FGB, & XYB ſont auſſi égaux, de même que LFE & YBE ; donc les triangles SYB, SYA ſont iſoſceles, donc SY peut être le Rayon du même cercle, que celui qui aura pour Rayon les côtez SB & SA, donc le point Y eſt à la circonference du cercle, *ce qu'il fallois démontrer.*

On démontrera de la même maniere que le triangle SYγ eſt iſoſcele, par conſéquent que le point γ, eſt à la circonference du même cercle, qui paſſera par B & par γ, & qui aura pour Rayon la ligne SB ou SY ; donc on pourra trouver autant de points que l'on voudra à cette circonference ſans le ſecours du centre, *ce qu'il fallois faire.*

Usage.

Ce Problême ſert à rendre praticables quelques Traits de la coupe des Pierres, que le P. Deran & M. de la Rue ont donné ſans rémedier aux inconveniens de la Pratique ; par exemple, pour faire le développement de la baſe d'une Porte en Tour ronde, & en Talud, parce qu'une telle Tour eſt un Cône tronqué, dont le ſommet eſt très loin ; car ſuppoſant qu'elle n'eût que trente pieds de diametre, & un ſixiéme de Talud, qui eſt un des plus grand qu'on leur donne, ſi elle eſt à trente pieds de haut, elle ne ſera rétraillie à ſon ſommet que de dix pieds ; ſçavoir, cinq de chaque côté ; ainſi les côtez du Trapeze par l'axe ne ſe rencontreront qu'à la hauteur de 90. pieds, laquelle ne ſera pas encore égale à la longueur du Rayon, qui eſt le côté du triangle par l'axe du Cône entier, puiſque cette hauteur eſt verticale, & que le côté eſt incliné à l'horiſon. Or une longueur de 93. pieds ou environ, demande une

grande place commode pour y tracer un arc avec une corde ou une chainette, qui ne peuvent donner un contour juſte, à cauſe de leur extenſion qui varie, ſoit en s'alongeant, lorſqu'on tire plus ou moins, ſoit à cauſe du frotement ſur une étenduë de ſurface auſſi grande, ſur laquelle il y a toûjours quelques inégalitez; cette longueur étant d'ailleurs trop conſiderable pour faire avec une perche un compas à verge, il en faudroit joindre pluſieurs bout-à-bout, & les faire ſoûtenir par pluſieurs hommes, qui ſe meuvent d'un mouvement de Rayon, chacun plus ou moins vite, comme il convient à leur diſtance du centre.

L'AUTRE cas où ce Problême ſeroit encore très neceſſaire, eſt pour la formation des Panneaux de développement des Doeles, des premieres retombées des vouſſoirs des Voutes ſphériques, dont les diviſions du ceintre de hauteur ſont d'un petit nombre de degrez de ſon contour; c'eſt-à-dire où il y a un grand nombre d'aſſiſes ou rangs de vouſſoirs; mais alors le moyen le plus court eſt de les tailler par ſuppoſition de Doeles plats, comme nous le dirons au IV. Livre.

APRE'S avoir trouvé trois points de la circonference de la baſe du Cône tronqué, ſuivant ce Problême on peut prendre l'angle que font les lignes menées de l'un à l'autre, & par le Problême I. du II. Livre s'en ſervir pour tracer, par un mouvement continu, le ſegment du cercle, dans leſquels ils ſont.

Du Développement des Helices.

Nous avons expliqué au II. Livre ce que nous entendons par le mot d'Helice. Il convient d'ajoûter ici qu'on peut en diſtinguer differentes eſpeces, rélativement aux corps ſur leſquels on peut les décrire.

SUIVANT ce ſiſteme, nous appellerons Helice *Cylindrique Droite*, celle qu'on pourra décrire ſur la ſurface d'un Cylindre Droit; *Cylindrique ſcalene*, celle qui ſera décrite ſur un Cylindre de baſe Elliptique, ou incliné à ſa baſe. Helice conique ou ſphérique celle, qui ſera décrite ſur la ſurface d'un Cône ou d'une ſphère; nous comprendrons ces deux dernieres ſous le nom de Limace, parce qu'elles approchent de plus en plus de leur axe.

Nous diviſerons encore les Helices Cylindriques en régulieres & irrégulieres.

PAR le mot de *Réguliere*, nous entendons la Courbe qui s'éleve au deſſus de ſa baſe d'un mouvement oblique toûjours égal, ſans s'approcher ni s'éloigner de l'axe, autour duquel elle fait des révolutions égales, comme une vis de Preſſoir.

Digitized by Google

Par le mot d'irréguliere, nous entendons celle qui fait des révolutions inégales autour de ſon axe.

Cette inégalité de révolutions peut encore être conſiderée de deux manieres ; 1.° En ce que la Courbe s'éloigne & s'approche de ſon axe, comme lorſqu'elle eſt à la ſurface d'un Cylindre de baſe Elliptique, ou de quelqu'autre Courbe qui rentre en elle-même ; 2.° Ou en ce que l'intervale de la hauteur de ſes révolutions augmente ou diminuë.

Lemme.

Le Développement d'une Helice Cylindrique réguliere ſur la ſurface du Cylindre Droit développé, eſt une ligne Droite ; celui des irrégulieres de la ſeconde eſpece, & des Limaces, eſt une ligne courbe.

La premiere partie de ce Theoreme eſt claire par la définition ; car puiſque nous ſuppoſons le mouvement de l'Helice autour de ſon axe d'une obliquité toûjours égale ſur la ſurface d'un Cylindre, elle n'eſt pas plus inclinée en un endroit au plan de la baſe, qu'en un autre.

Pour rendre cette verité plus ſenſible, on doit conſiderer le Cylindre comme un Priſme d'une infinité de côté, dont le développement forme un Parallelograme rectangle, ſi le Cylindre eſt droit, lequel Parallelograme eſt compoſé de tous les petits rectangles infiniment étroits, qui enveloppent le Priſme, parce que les parties priſes enſemble ſont égales à leur tout.

Soit, par exemple, [*Fig.* 281.] une demi-révolution d'Helice A*b* ſur le Cylindre A E, dont la moitié de la baſe eſt le demi cercle A 1 2 B, ayant rectifié ſon contour en une ligne Droite A K ſur le diametre B A prolongé ; ſi l'on diviſe cette ligne en parties égales, par exemple, ici en trois, & la hauteur de la demi-révolution B*b*, ou ſon égale A I, auſſi en trois parties égales, & qu'on mêne par chacune de ſes diviſions des paralleles aux côtez A K & A I ; il ſe formera neuf rectangles égaux entr'eux, & ſemblables au grand A H, qui exprime le développement de la moitié du Cylindre, dont la Diagonale eſt commune à celles des petits A*y*, *yx* & *x*H, leſquelles expriment chacune l'obliquité de l'Helice qui ne change point, ſuivant la définition. Or la Diagonale A H eſt une ligne Droite, par conſéquent la ſomme ou l'addition de toutes les parties de l'Helice infiniment petites rangées ſur la ſurface du Cylindre développé, forme une ligne Droite ; *ce qu'il falloit démontrer.* *Fig.* 281.

La démonſtration de la ſeconde partie de ce Theoreme ſuit naturellement de la premiere ; car ſi les révolutions ſe font d'un mouvement inégal en direction d'inclinaiſon qui augmente ou diminuë les intervales

Digitized by Google

de chaque révolution, les contours & les hauteurs n'étant plus proportionels, les petits Parallelogrames ne ſeront plus ſemblables au grand A 6, *Fig.* 282. qu'on peut conſiderer comme un développement de Cylindre, & par conſéquent que ſa Diagonale ne ſera plus commune à celles des petits, infiniment petits, leſquelles faiſant auſſi par la ſuppoſition des angles inégaux avec la baſe AB, où ſes paralleles 1 *x*, 2 *y*, 3 *z* feront auſſi des angles eutr'elles, & par conſéquent ſeront rangées en ligne courbe; *ce qu'il falloit ſecondement démontrer.*

COROLLAIRE I.

D'ou il ſuit qu'autour du même Cylindre, on peût former une infinité d'Helices differentes, dont les développemens ſeront toûjours des lignes courbes, ſoit que le Cylindre ſoit droit ou ſcalene; car les révolutions peuvent augmenter ou diminuer en hauteur, ſuivant telle progreſſion que l'on jugera à propos, ou laiſſant les hauteurs égales, on peut augmenter ou diminuer la viteſſe du mouvement parallele à la baſe; ce qui eſt repreſenté à la Fig. 282. par la difference des longueurs des Parallelogrames AK, K*l*, *lm*, *mn*, &c.

COROLLAIRE II.

SECONDEMENT, que le développement d'une Helice Cylindrique ſcalene, quoique réguliere ſera encore une ligne courbe, parce que le développement de la baſe du Cylindre ſcalene n'étant pas une ligne droite, comme celle du contour de la baſe du Cylindre Droit, mais une Courbe comme on voit à la Figure 272. il ſuit que les diviſions qui donnoient des Parallelogrames ſur le développement de ſa ſurface, en tirant des paralleles à la baſe & à la hauteur, ne donneront pas des Figures rectilignes, mais des quadrilignes mixtes, dont les paralleles à la baſe ſeront courbes, & leurs Diagonales de même, mais un peu moins en ce qu'elles participent de la courbure parallele à la baſe, & de la ligne droite du côté parallele à l'axe; c'eſt pourquoi nous demandons pour le développement en ligne droite, que le Cylindre ſoit Droit ſur ſa baſe. Je n'ai point ajoûté dans l'expoſé du Theoreme, que la baſe fut Circulaire ou Elliptique, parce que de quelque courbe qu'elle ſoit, il eſt toûjours évident que ſi l'axe du Cylindre eſt perpendiculaire au plan de la baſe, le développement de la ſurface Cylindrique ſera toûjours un Parallelograme rectangle, qui pourra être diviſé en une infinité d'autres ſemblables, comme AH de la Figure 281. par conſéquent, dont la Diagonale ſera le développement d'une Helice.

COROL-

Digitized by Google

Corollaire III.

De ce que nous venons de dire au Corollaire précedent, on tire naturellement la démonſtration de la troiſiéme partie du Theoreme, qui dit que les développemens des Helices en Limaces ſont toûjours des lignes courbes, ſoient qu'elles ſoient coniques, conoïdes, ſphériques ou ſphéroïdes ; car toutes ces Figures ne pouvant être développées qu'en les prenant par parties de Cônes tronquez inſcrits dans leur ſurface, & les développemens des Courbes quelconques tracées ſur la ſurface du Cône développée étant neceſſairement des lignes courbes, comme nous l'avons démontré aux Figures 266. & 267. il eſt évident que toutes les eſpeces de Limaces qu'on y pourra décrire, étant développées ſur la ſurface du Cône, ſeront des lignes courbes, parce qu'en diviſant le contour du Cône développé en parties égales, & la hauteur de même, on aura au lieu de Parallelogrames mixtes, comme nous venons de le dire ſur le Cône ſcalene, des Trapezes mixtes, dont les petites parties de l'Helice ſeront les Diagonales, participant de la courbure du cercle de la baſe développée ſur le Cône, & de la Droite qui eſt le côté du Cône.

Probleme IX.

Faire le Développement d'une Helice quelconque ſur une Surface Cylindrique ou Conique développée.

Premierement, ſi l'Helice eſt cylindrique réguliere, ce développement eſt très facile, puiſqu'il ne conſiſte qu'à trouver les extremitez d'une ligne Droite.

Soit [*Fig.* 281.] une Helice A*b*GE qui fait une révolution & demie autour du Cylindre droit DB, on rectifiera le contour du cercle de ſa baſe, qu'on portera une fois & demi ſur le diametre AB prolongé en A^2, ou ce qui eſt la même choſe, on prendra trois fois le contour du demi cercle A 1 2B de B en A^2, & par le ſommet du Cylindre E, on tirera au point A^2 la ligne Droite EA^2, qui ſera le développement demandé.

Il eſt viſible que ſi on n'avoit propoſé que celui d'une demi-révolution, on auroit tiré *ba* du point *b*, tiers de la hauteur BE au point a, qui eſt à diſtance de B de la longueur de l'arc A 1 2B développé.

Si on avoit demandé une révolution entiere, la ligne F*b* y auroit ſatisfait ; d'où on peut inferer, 1.° comment on doit faire le développement de telle partie qu'on voudra ; 2.° que ſi l'on enveloppe le Cylindre d'un triangle iſoſcele comme AHG, il y tracera deux Helices qui ſe croiſeront en *b*.

Secondement, ſi l'Helice eſt cylindrique irréguliere ou conique; ayant rectifié le contour de la baſe, auquel elle répond, on diviſera la hauteur de chaque révolution en parties proportionelles à la difference qui regne de l'une à l'autre, en croiſſant ou en diminuant, & l'on diviſera le développement du contour de la baſe en un même nombre de parties égales, qu'on a diviſé la hauteur de révolution, que nous avons ſuppoſé inégales, puis on menera par chaque diviſion des paralleles à la baſe, qui ſeront droites, au Cylindre Droit, & courbes au Cylindre ſcalene, leſquelles ſeront croiſées par des lignes droites, paralleles à l'axe dans le Cylindre, & tendant au ſommet dans le Cône, la ligne courbe menée d'une interſection à la ſuivante en Diagonale ſera le développement de l'Helice demandée.

La même choſe ſe fera pour avoir le développement de l'Helice en Limace ſur un cône. Mais ſi la Limace comme une Loxodromie ſur une ſphère, étoit propoſée à développer, on ne le pourroit ſans interruption; parce que la ſphère ne pouvant être développée que des deux manieres, dont nous avons parlé, ou comme à la Figure 277. en Fuſeaux, ou comme à la Figure 278. en portions de couronnes de cercle, qui laiſſent des intervales entr'elles, encore plus grand que les Fuſeaux; on ne pourroit avoir le développement de l'Helice en Limace, que par petites parties qui ſeroient les Diagonales des Trapezes mixtes formez dans differentes Zones coniques inſcrites à la ſurface de la ſphère.

Voila ce me ſemble les principales Régles pour faire les *Plans*, Profils, Elevations & Développemens des corps comparables aux voutes uſuelles; il nous reſte à faire voir de quel uſage elles ſont pour leur conſtruction, c'eſt ce que nous allons montrer par deux Problémes Generaux.

Probleme X.

Les Elevations de deux Faces oppoſées dans des Plans paralleles entr'eux, étant données en projection ſur un même Plan vertical, & la projection Horiſontale de leurs intervales étant donnée, trouver la Figure de chaque partie de Développement des Surfaces d'une voute diviſée en pluſieurs Vouſſoirs, tant apparente, qu'interieure,

En termes de l'Art.

Une double élevation de face anterieure & poſterieure, le Plan & le Profil d'une voute réguliere étant donnez, *trouver les panneaux de Lits, de Doele & de Tête.*

Si les faces oppoſées de l'entrée & de la ſortie d'une voute, ſont

égales & perpendiculaires à une même direction; il eſt évident qu'elles ſeront confonduës dans l'élevation qui ſera réduite à un même ceintre Circulaire, Elliptique ſurhauſſé ou ſurbaiſſé, telles ſont les deux faces d'un Berceau droit, projettées ſur un même Plan vertical; alors une ſeule élevation eſt équivalente à deux; ſçavoir, à l'anterieure & à la poſterieure, ſi les faces ſont inégales, ou inégalement ſituées à l'égard du plan Horiſontal, comme ſont celles des deſcentes, dont l'une eſt plus haute que l'autre, ou inégalement ſituées à l'égard du plan vertical, comme dans les voutes biaiſes, ou qu'elles participent de l'un & de l'autre, comme les deſcentes biaiſes, l'élevation commune aux deux faces ſera exprimée par des contours differens qui ſe croiſeront, ou qui ne ſeront paralleles que dans les voutes coniques droites, quoique les Cordes de leurs arcs correſpondans aux mêmes diviſions puiſſent être paralleles, mais ſoit que les contours ſoient paralleles ou non; s'ils ſont tracez par la même projection verticale ſur un même Plan, ils conſerveront toûjours un certain rapport de diſtance entr'eux, qui ſervira à trouver tous les côtez des ſurfaces planes qui terminent les parties de la voute diviſée en ſes vouſſoirs.

Pour faire voir l'étenduë, & pour ainſi dire la generalité de ce Problême, nous choiſirons deux exemples de voutes coniques, l'une droite, l'autre oblique, leſquels étant bien entendus, ſerviront à la conſtruction de toutes les voutes. Premierement à celle des Cylindres qui ſont plus ſimples, & plus faciles que les coniques; ſecondement aux coniques, dont ils expoſent toutes les difficultez, & en troiſiéme lieu, aux ſphériques, leſquelles doivent être réduites, ou en portions de Cônes tronquez, ou en Polyedres, qui ſont pluſieurs parties de Pyramides tronquées, dont nous donnons ici les exemples par la réduction des Cônes en Pyramide.

Premier exemple des Voutes Coniques droites.

Soient [*Fig.* 283.] les deux ceintres de face pris à la Doele BLD exterieur, GKH interieur, que nous appellons face anterieure & poſterieure, réunis par la même projection ſur un même plan avec leurs Extrados ALE & FKI, décris du même centre C. Ayant diviſé ces ceintres en leurs vouſſoirs, par exemple en cinq *q* aux points 1, 2, 3, 4, & tiré les joins de Tête par ces points du centre C, 1 : 5, 2 : 6, 3 : 7, 4 : 8. on fera la projection horiſontale de la voute & de ſes joins de Lit, ſuivant les Régles ordinaires, laquelle ſera le Trapeze *afie*, dans lequel les deux Parallelogrames *afgb* & *dhie* ſeront les ſurfaces Horiſontales des Piedroits à l'Impoſte, dans leurs juſtes meſures; il n'en ſera pas de même des autres lignes qui ſont la projection des joins de Lit elles ſe- Plan. 24. *Fig.* 283.

ront plus courtes que ces joins, parce qu'elle eſt horiſontale, & que ces joins ſont inclinez à l'horiſon dans le même plan vertical.

Il faut commencer par chercher la veritable longueur des joins de Lit, parce qu'ils ſont les côtez communs aux portions des ſurfaces de la Doele, & aux ſurfaces des Lits. Ce qui ſe fait par des Profils particuliers qu'on peut faire de differentes façons, qui donnent toûjours la même longueur, on peut choiſir la plus commode.

Premierement, on peut élever ſur la projection horiſontale d'un joint de Lit donnée comme $1p^1$ un plan vertical de toute la hauteur du vuide qui eſt entre la projection ſur le plan horiſontal & le veritable joint, ainſi on élevera ſur la ligne $1p^1$ au point 1 une perpendiculaire 1T, égale à la hauteur $1t$, de l'élevation qui eſt celle de la *Retombée*, & au point p^1 la perpendiculaire p^1V égale à celle de la retombée oe^1, la ligne VT ſera le Profil & la veritable longueur du joint de Lit, dont $1p^1$ eſt la projection.

Secondement, on peut faire le même Profil en ſupprimant la hauteur de la retombée du point le plus bas, par exemple, 2 du joint de Lit, dont la projection verticale eſt la ligne $2e^2$, & mettant ſeulement à un des bouts p^2 de la projection horiſontale $2p^2$ la hauteur e^2n au deſſus du point 2, qu'on portera de p^2 en 2e perpendiculairement à la projection horiſontale donnée p^22.

Troisie'mement, on peut faire le même Profil, en tranſportant toutes les hauteurs par des lignes paralleles à la baſe AE de l'élevation, ſur une ligne qui lui ſoit perpendiculaire comme fL, fC, que toutes les paralleles menées par les points 2 & 1 de l'élevation de la face poſterieure, & e^1, e^2 de la face anterieure, couperont en des points f^2, f^1, u qui donneront les hauteurs ſuperieures & inferieures des joins de Lit, dont il ſera facile de trouver les inclinaiſons, en portant ſur ces paralleles les projections horiſontales données, par exemple, $1p^1$ en $u41$, & $2p^2$ en $f^1 3^2$, les lignes inclinées menées par les points 4^1, f^1, 32, f^2, ſeront les Profils & les vraies longueurs des joins de Lit.

Il faut remarquer que ſi la vonte eſt portion d'un Cône Droit tronqué, dont les faces anterieure & poſterieure ſont paralleles entr'elles, comme dans cette exemple, il eſt inutile de faire des Profils pour trouver les longueurs des joins; parce qu'en ce cas ces joins ſont tous égaux à ceux des Impoſtes, comme ici à bg ou hd; ainſi dans cette derniere conſtruction de Profil, par le moyen des paralleles à la baſe AE, il ſuffira de prendre la longueur gb d'un point à l'Impoſte avec un com-

Digitized by Google

pas, & des points f^1 & f^2 pour centres, faiſant des arcs de cercle, qui couperont les paralleles $1\,u$ & $2\,f^1$ prolongées, aux points 41, 32, on aura les mêmes longueurs, que par la maniere précedente; mais ſi la voute eſt biaiſe, c'eſt-à-dire, portion d'un Cône ſcalene, on ne peut les trouver que [comme on vient de le dire] en portant les longueurs de la projection horiſontale ſur les paralleles correſpondantes.

Les longueurs des lignes inclinées aux plans des élevations des faces anterieures & poſterieures étant trouvées, la réſolution du Problême ne conſiſte *qu'à faire des triangles rectangles, dont une jambe eſt donnée par l'élevation, & dont l'hypotenuſe trouvée, doit être adaptée à l'autre jambe inconnuë* par une ſection d'arc de cercle qui en eſt le *lieu*, & qui en détermine la poſition; ce qu'on concevra mieux par des exemples.

Pour former un panneau de Doele plate par exemple, du ſecond vouſſoir, laquelle eſt marquée dans l'élevation par le Trapeze 1. $e1$. $e2$. 2. ayant tiré la Corde 1, 2; on la prolongera de part & d'autre vers y & vers z, & des points de diviſion de la face anterieure $e1$ & $e2$, on abaiſſera ſur cette Corde les perpendiculaires $e1\,y$ & $e2\,z$, enſuite on tranſportera à part où l'on voudra la ligne y, z par exemple, ici à la Fig. 284. & ayant élevé aux points y & z deux perpendiculaires indéfinies $y\,21$, $z\,22$, on prendra la longueur d'un des joins de Lit, comme bg ou db ou au Profil 41, $f1$, ou 32, $f2$; car toutes ces lignes ſont égales, parce que le Cône eſt Droit; mais s'il ne l'étoit pas on prendroit la longueur de la ligne 41, $f1$, & du point 1 pour centre, on fera l'arc 8^{21}, qui couperoit la ligne $y\,21$ au point 21, & enſuite la longueur de la ligne 22, $f2$, & du point 2 de la Fig. 284. pour centre on fera l'arc de cercle 9 22, qui coupera la perpendiculaire $z\,21$ au point 22; enfin par les points trouvez, on tirera les lignes 21 1, 21 22, 22 2, & l'on aura le panneau de la ſeconde Doele repreſentée au plan horiſontal par le Trapeze, 1 p^1, p^2 2, & à l'élevation par 1 $e1$, $e2$ 2; il en faudroit faire autant pour les autres Doeles, ſi elles n'étoient pas égales, comme elles ſont dans le cas preſent. *Fig.* 284.

A l'égard des panneaux de Lit, puiſqu'ils ſont tous égaux à ceux de l'Impoſte *afgb* ou *dhie*, il eſt inutile de les chercher, on verra dans l'exemple ſuivant la maniere de les trouver, lorſqu'ils ſont inégaux.

Il reſte à faire voir comment on peut appliquer cette méthode aux voutes, dont les faces ſont inclinées aux plans verticaux, ſur leſquels on doit faire l'élevation, comme par exemple, s'il s'agiſſoit d'une voute *ſur le Coin* ou *dans l'angle*, dont le plan horiſontal ſeroit *amd*, *o*M*z*, ou compoſée de deux portions droites, comme *am* & *o*M, ou de deux arcs de cercle, comme M*z* & *md*.

Il faut par le Chapitre IV. de ce III. Livre circonſcrire à la Figure irréguliere du plan horiſontal un Trapeze *afie*, dont les côtez oppoſez *ae* & *fi* ſoient paralleles entr'eux, & operer comme ſi la voute étoit réguliere, ſuivant ce que nous venons de dire, pour trouver les panneaux réguliers des Lits & des Doeles, & retrancher de leurs côtez ce que la projection horiſontale du plan irrégulier retranche des parties du régulier, ſuivant la Régle que nous avons donné.

Fig. 283. & 284. Ayant donc fait le panneau de Doele de la voute Conique réguliere 21, 22, 2 1, [*Fig.* 284.] pour le ſecond vouſſoir, on élevera des perpendiculaires ſur les points *s*, *q*, *r*, *t*, où les projections des joins de Lit 1p^1, 2p^2 ſont coupées par celles des faces *o*M, *am*, leſquelles perpendiculaires *q*Q, *s*S, *r*R, *t*T, couperont les Profils VT & 2e 2 aux points QS & RT qui donneront les excès VS, QT, 2^{e}T, R2 des côtez du panneau de Doele réguliere ſur l'inſcrite irréguliere ; ainſi on portera la longueur VS en S 21 de la Fig. 284. Q1 en Q1 de la même Figure, 2R en 2R, T 2e en T 22, & par les points trouvez STQR, on tirera des lignes droites ST, QR, qui formeront le Trapezoïde QSTR, lequel ſera le panneau de Doele du ſecond vouſſoir de la voute Conique biaiſe ou dans un angle, ſuivant qu'elle eſt déſignée dans la projection horiſontale de la moitié *a o* M *m*, ou P *p* M *m*.

On en feroit autant pour la voute Ebraſée, qui ſeroit dans une Tour ronde, dont la projection eſt déſignée par ſa moitié M Y *dm*. La ſeule difference qu'il y auroit, c'eſt qu'au lieu des lignes droites ST, QR que nous avons tiré au panneau de Doele, *Fig.* 284. pour les faces anterieures & poſterieures ; il faudroit tirer des portions de ces Courbes, qui ne ſont pas planes, c'eſt-à-dire, qui ne peuvent être décrites dans un plan, deſquelles on pourroit approcher par la circonſcription d'un Polygone dans le cercle de la projection de la Tour ronde & creuſe; mais parce que nous devons donner ce Trait dans le Livre ſuivant, nous ne nous étendrons pas davantage ſur cette difficulté, il ne s'agit ici que de donner une méthode generale pour tous les Polyedres, ſans entrer dans le développement des Corps ronds Cylindriques, Sphériques ou Coniques conſiderez comme tels, mais ſeulement comme compris & enveloppez par un grand nombre de ſurfaces planes inſcrites dans les Courbes convexes, ou circonſcrites aux convexes.

Digitized by Google

Second exemple des Voutes Coniques, Scalenes à double Obliquité,

Comme en termes de l'Art.

Deſcente Biaiſe Ebraſée en Canoniere.

Soit [*Fig.* 285.] le Ceintre de face anterieure à l'Arête de la Doele GF*g*, & celui de la face poſterieure IE9, avec leurs Extrados AB*b*, & HD*z* diviſez en leurs vouſſoirs LR34 & PS78 projettez ſur la même ſurface verticale, ce que nous pouvons ſuppoſer comme fait, & donné, ſuivant l'énoncé du Problême; mais parce que la conſtruction de cette projection eſt la même que celle de la ſolution du Problême, pour trouver chaque ſurface des Vouſſoirs en particulier, il eſt à propos de la mettre ici tout au long pour rendre la choſe plus facile à comprendre; parce que la conſtruction tient lieu d'explication.

Soit le Trapeze *abzy* le plan horiſontal de la voute Æ*x* la projection de ſon axe ou ligne du milieu Cc^2, p^1, l^1 la projection horiſontale du joint de Lit LP, S^2 R^2, celle du Lit RS; nous ne prendrons que cette moitié de voute pour éviter la multiplicité des lignes dans la Figure.

On commencera par tirer du point X une perpendiculaire XC ſur AÆ*z*, & ayant porté ſur la même AÆ la hauteur Æ c^2 de la deſcente ou montée; c'eſt-à-dire, de la difference du niveau de la face anterieure AÆ, & de la poſterieure H c^2, du point C pour centre & des intervales CG, CA ou XC*p*, X*a*, on décrira les cercles concentriques GF*g* & AB*b*, l'un pour la Doele, l'autre pour l'Extrados de la face anterieure. Enſuite par le point c^2 ayant mené H2 parallele à A*b*, du point c^2 pour centre, & pour Rayons les longueurs Æ*i*, Æ*b*, on décrira les deux cercles concentriques IE9, HDZ, l'un pour la Doele, l'autre pour l'Extrados de la face poſterieure, laquelle ſera ainſi projettée ſur le même plan vertical que l'anterieure. Enſuite ayant diviſé ces ceintres en nombre de vouſſoirs égaux, par exemple en 5 aux points LR34 & PS78, on joindra les points correſpondans par des lignes droites, qui exprimeront ſur l'élevation les joins de Lit, telles ſont GI pour celui de l'Impoſte LP pour le premier au deſſus, & RS pour le ſecond.

On tirera auſſi à l'ordinaire les joins de tête L*m*, R*t*, de leur centre C, de même que P*q* & ST de leur centre c_2.

Cette préparation étant faite, il ſera aiſé de trouver tous les côtez des ſurfaces, qui comprennent chaque vouſſoir.

Premierement pour les panneaux de Tête, il n'y à point de difficulté, ils ſe prendront ſur les élevations. Par exemple, ceux du ſecond

vouſſoir ſeront les portions de Couronnes de cercles *m*LR*s* pour la face anterieure, & *q*PST pour la face poſterieure.

Secondement, pour les panneaux de Lit, par exemple, pour le premier à l'Impoſte marqué au plan horiſontal par le Parallelograme *abi*G*p*, & à l'élevation par le Parallelograme AHIG, on commencera par en chercher la veritable longueur par le Profil, comme nous l'avons dit à l'exemple précedent, parce que les côtez AH & GI de l'élevation ou projection verticale ſont trop courts, puiſqu'ils le ſont encore plus que ceux de l'horiſontale A*bi*G*p*, laquelle eſt plus racourcie que la deſcente qu'elle repreſente. Pour y parvenir, on y élevera une verticale ÆE ſur la baſe horiſontale AÆ où l'on voudra. Nous faiſons ici ſervir la ligne du milieu de la face poſterieure, enſuite menant des paralleles indéfinies à cette baſe par les points de diviſion des Docles LP, RS, qui couperont la verticale aux points 1, *p*, 2, *s*.

On portera ſur les lignes provenant des joins inferieurs LR, comme L*l*, R*r*, les projections des joins de Lit; ſçavoir, *i*G*p* en Æ*z*, *p*', *l*', en 1*l*, S² R² en 2*r*, & par les points trouvez *z*, *l*, *r*, on tirera les inclinées *z c*², *lp*, *rs* qui ſeront les veritables longueurs des joints de Lit. Si l'on avoit un grand nombre de ces joins, on pourroit trouver tous les points des baſes intermediaires, en faiſant ſeulement Æ*z* égal à *i*G*p*, & E*e* égal à ÆX, en tirant la ligne *ze*, elle couperoit toutes les baſes aux points *l* & *r*, qui ſe trouveroient entre deux; ce qu'il eſt facile d'appercevoir par la ſeule inſpection du plan horiſontal, où elles ſont compriſes & terminées par deux lignes droites *i*Æ, G' X.

Apre's avoir trouvé, par les Profils, les lignes inclinées qui ſont égales aux joins de Lit, il ne s'agit plus que de les adapter aux triangles rectangles, dont elles doivent être les hypotenuſes, pour trouver les angles qu'elles font avec les joins de Tête.

On prolongera les joins de Tête du petit ceintre du côté de ceux du grand ou au dehors comme P*q* en *n*, ou au dedans comme TS en V, & par les points *m* & L, *t* & R des diviſions de la face anterieure, on tirera aux joins prolongez des perpendiculaires *mn*, LN, *tu*, RV qui formeront pluſieurs rectangles, dont cette conſtruction donnera un côté dans ſa juſte meſure; ſçavoir, celui qui ſera ſur le joint de Tête prolongé, les autres deux côtez demeurant raccourcis par la projection; mais parce qu'on a déja trouvé la valeur de l'hypotenuſe par le Profil, on a de quoi achever les triangles que ceux de la projection repreſentent, comme on le verra dans les exemples.

Pour le premier joint de Lit, qui eſt celui de l'Impoſte, on tranſportera

portera la ligne *i*A ou ſon égale IQ avec ces diviſions H & *e* où l'on voudra, comme à la Figure 288. en *ih*, *e*Q, & l'on tirera les perpendiculaires indéfinies Q*x*, *eu* par les points *e* & Q, enſuite des points *h* & *i* pour centres, & de l'intervale $c^2 z$ du Profil, on fera deux arcs de cercle qui couperont ces perpendiculaires aux points *x* & *u*, par leſquels ayant tiré les lignes droites *xh*, *ui* & *xu*, on aura le Parallelograme *xhiu* pour le premier Lit de l'Impoſte, lequel eſt non ſeulement plus grand que celui de la projection horiſontale *ahi*G*p*, mais encore inégal dans ſes angles qui ſont un peu moins aigus, comme il paroît dans cette Figure, où celui de la projection horiſontale eſt ponctué en $b a^1 g^1 i$.

Le ſecond & le troiſiéme panneau de Lit ſe trouveront de même en changeant les triangles rectangles *mm*R, LNP, *tu*T, RVS, en d'autres triangles rectangles plus alongez ſur les mêmes baſes *n*R, NP, *u*T, VS. Par le moyen des hypotenuſes trouvées *p l*, S*r*, ainſi ayant tranſporté où l'on voudra la ligne P*n* avec ſes diviſions N*q*, comme à la Figure 286. on lui fera les perpendiculaires *n*M, NL, & des points *q* & *p* pour centres & de l'intervale *p l*, pris au Profil, on fera des arcs de cercle en M & en L qui couperont ces perpendiculaires aux points M & L, par leſquels on fera paſſer des lignes droites qui ſont les côtez du Parallelograme M*qp*L, lequel ſera égal à la ſurface du ſecond Lit marqué dans l'élevation par le Parallelograme raccourci *mq*PL.

La Figure 287. fait auſſi voir le troiſiéme Lit formé ſur la baſe VS*u*T tranſportée pour établir deſſus un Parallelograme plus alongé que celui de l'élevation *t*TSR, ſuivant les mêmes Régles de décompoſition de la projection.

Il ne reſte plus à preſent qu'à trouver les ſurfaces des panneaux de Doeles plates qui doivent paſſer par les Cordes des arcs des diviſions des ceintres de face anterieure & poſterieure; ce qui ſe fera de la même maniere, dont on s'eſt ſervi pour trouver les Lits en abaiſſant des perpendiculaires ſur ces Cordes prolongées, s'il le faut, par les diviſions du ceintre oppoſé.

Par exemple, pour trouver la Doele plate du premier vouſſoir marquée dans la projection horiſontale par le Trapeze G*p i*, p^1, l^1, & à l'élevation par le Trapeze GIPL, ayant tiré la Corde I*p* de l'arc poſterieur I*p*, on abaiſſera du point L de la diviſion de l'arc anterieur ſur cette Corde la perpendiculaire LK. On tranſportera enſuite où l'on voudra la Corde PI avec la diviſion K, comme en $I^4 k p$ au deſſus de la Fig. 288. & on élevera ſur le point *k* la perpendiculaire indéfinie $k^2 l$; enſuite du point *p* pour centre, & de l'intervale *p l* pris au Profil, de l'autre côté on décrira un arc qui coupera la perpendiculaire $k^2 l$ au point $^2 l$. Enſuite des points $^2 l$

& I^4 pour centres, & de l'intervale de la Corde L G & du joint de Lit $c^2 z$, on fera une interſection d'arcs qui ſe couperont au point ^2G, duquel ayant tiré les lignes $^2G\,^2l$, $^2G\,I^4$, on aura le trapezoïde $^2G\,^2l$, $^2p\,I^4$ qui ſera la ſurface de la Doele plate du premier vouſſoir, laquelle doit couvrir la portion concave du Cône G L P I, & toucher ſes quatre angles.

Pour avoir la ſeconde Doele plate marquée au plan par p^1, S^2, R^2, l^3 & à l'élevation par le Trapeze L R S P on prolongera la Corde S P vers x, & du point R on abaiſſera la perpendiculaire Rx, enſuite ayant tranſporté à volonté la ligne Sx avec ſa diviſion P, comme à la Figure précedente, on élevera ſur l'extremité x une perpendiculaire indéfinie $x\,^2r$, à laquelle on a adaptera la ligne du joint de Lit sr, priſe au Profil. Avec cette ligne priſe pour Rayon & du point ^2S pour centre on décrira un arc qui coupera $x\,^2r$ au point ^2r, duquel comme centre & de l'intervale de la Corde R L, on fera un arc de cercle $^3l\,y$; de même du point ^2p pour centre & de l'intervale du joint de Lit pris au Profil en pl, on décrira un arc de cercle qui coupera le précedent $^1l\,y$ au point ^1l, par lequel ayant tiré les lignes $^3l\,^2r$, $^3l\,^2p$, on aura le trapezoïde ^3l, ^2r, ^2s, ^2p, qui ſera le panneau de Doele plate, propre à couvrir la portion concave du Cône que comprend le ſecond vouſſoir, ainſi des autres.

Ou il faut obſerver que pour avoir les longueurs des joints de Lit de l'autre moitié de voute F E 9 g, dont la projection horiſontale eſt Æ i o, g X, il faut faire de nouveaux Profils, parce que les lignes 23, 33; 24 34 10 g p & $z\,y$, que nous ſuppoſons être les projections des joins de Lit, ſont toutes inégales, & parce que leurs hauteurs ſeront toûjours les mêmes que celles de l'autre moitié, ſi les Lits correſpondans ſont de niveau, il ſuit qu'elles ſeront plus inclinées, & par conſéquent plus courtes que celles qui leur correſpondent dans l'autre moitié de la voute; ce qui eſt évident par la ſeule inſpection du plan horiſontal; puiſque la ligne $z\,y$ approchant plus de la perpendiculaire C X, que $a\,b$ de l'autre Impoſte, elle ſera plus courte, & toutes les projections des Lits entre les deux Impoſtes, ſeront inégales, plus courtes vers y, & plus longues vers a; ce qui n'arriroit pas à la Fig. 283. où elles ſont égales, à diſtances égales de l'axe du Cône qui eſt Droit.

Il faut remarquer que ſi les deux ceintres de faces oppoſées, n'étoient pas de même nature, que l'un fut Circulaire, & l'autre Elliptique, ou l'un ſurbaiſſé, & l'autre ſurhauſſé, l'on ne pourroit trouver une Doele plate, dont les quatre angles touchaſſent les quatre coins du vouſſoirs, qui ſeroit portion de ce Cône irrégulier; mais parce que nous ne traitons ici que des Figures régulieres, cette exception n'empêche pas que le Problême ne ſoit géneral, parce qu'alors la Doele plate, au lieu d'être pla-

ne quadrilatere, ſeroit compoſé de deux triangles qui ſeroient dans differends plans; nous donnerons au Livre ſuivant la maniere de remedier à ces irrégularitez.

Demonstration.

Il eſt viſible par la conſtruction de ce Problême que nous réduiſons toutes les ſurfaces planes, qui comprennent le ſolide appellé *vouſſoir*, en triangles, la plûpart rectangles, dont nous trouvons un côté ſur les élevations projettées & raſſemblées ſur un même plan vertical, par le moyen de la perpendiculaire, que nous abaiſſons d'un des angles de cette ſurface, ſur le côté oppoſé, prolongé, s'il le faut. Nous avons trouvé l'hypotenuſe ſuivant les régles du profil par un autre triangle rectangle, dont la projection horiſontale nous donne un côté, la hauteur de l'extrémité ſuperieure de la ligne inclinée donne l'autre; ayant les deux jambes d'un triangle rectangle on a facilement l'hypotenuſe, qui exprime la deſcente; or la même eſt commune à un autre triangle rectangle dont nous ne connoiſſons qu'un côté par ce Problême, ſçavoir la diſtance des points de diviſion des joints de tête correſpondant dans les faces anterieure & poſterieure; mais parce qu'un côté & l'hypotenuſe ſuffiſent pour trouver le troiſiéme côté, dont l'angle droit détermine la poſition & l'hypotenuſe la longueur, l'arc de cercle dont elle eſt le rayon eſt le *Lieu* du ſommet de l'angle qu'il doit faire avec ſon hypotenuſe: enfin connoiſſant les côtez des deux triangles rectangles, & les diſtances de leurs hypotenuſes paralleles, nous avons formé le quadrilatere compris entre les hypotenuſes, qui eſt ordinairement pour les lits ou un parallelograme ou un trapeze & quelquefois un trapezoïde pour les doeles plates, où l'on à vû qu'une même hypotenuſe nous ſert à deux triangles, dont l'un eſt rectangle & l'autre peut ne pas l'être; mais parce que dans celui qui n'eſt pas rectangle nous connoiſſons tous les côtez, il eſt bien aiſé dele former.

On trouve donc les panneaux de lit par l'intervale des hypotenuſes de deux triangles rectangles poſez ſur une même ligne de baſe & les panneaux de doele par une ſuite de deux ou trois triangles, dont le prepremier eſt toujours rectangle, par la conſtruction, de même que le ſecond, lorſque la ſurface eſt diviſée en trois triangles, comme il peut arriver.

Si nous rappellons ici nos principes de projection, nous connoîtrons que toutes les lignes qui ſont paralleles à l'objet projetté ſont dans leurs juſtes meſures; ainſi les cordes des arcs de face GL & IP, LR PS, qui ſont dans des plans paralleles, ne ſont ni diminuées ni augmentées, donc elles peuvent être priſes ſur l'Elevation; d'où il ſuit qu'à

chaque doele on a toujours deux côtez à prendre ſur l'Elevation, qui ſont les cordes des arcs de têtes, & deux ſur le profil, qui ſont les joints de lit; mais comme ces quatres côtez peuvent faire entr'eux des angles differends, parce que la diagonale du trapeze n'eſt pas connuë, on abaiſſe une perpendicnlaire LK ſur le côté IP pour en déterminer la poſition à l'égard de ſon oppoſé LG par le moyen des deux triangles rectangles LKP & LKI, leſquels déterminant la poſition des points L & I donnent la diagenale LI de la doele, troiſiéme côté du triangle LGI, que l'on ne connoiſſoit pas auparavant; donc la *Doele plate* eſt exactement trouvée; *ce qu'il falloit faire & démontrer.*

A l'égard des panneaux *de tête* il eſt clair qu'ils ne ſont en rien alterez ni racourcis, ni ralongez ſur l'élevation.

Il ne reſteroit plus qu'à trouver les panneaux de l'*Extrados*, ſi l'on en avoit beſoin pour avoir les ſix ſurfaces du vouſſoir, mais il n'eſt pas néceſſaire pour l'éxecution de les réduire à des ſurfaces planes; parce que par le moyen du contour des Têtes, qui ſont les arcs *Am*, *Hq* donnez ſur l'élevation & leurs côtez *mq*, AH auſſi donnez par les panneaux de lit, on peut former les extrados convexes du premier coup, ſans s'y diſpoſer par des ſurfaces planes, qui ne pourroient être que des tangentes au Cône ou au Cylindre, dont les angles ſeroient hors du vouſſoir, bien loin de les y déterminer.

Ce Probléme peut ſuffire à trouver toutes les ſurfaces planes des polyedres & de leurs diviſions par le moyen de l'Elevation des deux faces projettées ſur un même plan; il eſt encore une maniere plus ſimple où l'on peut ſe paſſer de la double projection des faces anterieures & poſterieures.

Probleme XI.

La Projection Horiſontale d'un Polyedre & de ſes Diviſions étant donnée avec l'Elevation de ſes Faces, trouver toutes les Surfaces dont chacune de ſes parties eſt enveloppée.

Ou en Termes de l'Art.

Le Plan & l'Elevation des Têtes étant donnez trouver les Panneaux de Tête de Lit & de Doele Plate de toutes ſortes de Voutes.

Nous ſuppoſons dans ce Probléme, comme dans le précedent, que toutes les voutes, quoique parties des corps ronds cylindriques, côniques, ou ſphériques, ſont réduites par les Doeles plates en Polyedres, c'eſt-à-dire, les Cylindres en Priſmes, les Cônes en Pyramides, & les

Digitized by Google

Sphères & Sphéroides en portions de Pyramides tronquées. Cela ſuppoſé tout l'art de ce Problême conſiſte à décompoſer la projection horiſontale en *réduiſant toutes les Surfaces en triangles, & cherchant dans l'Elevation des Faces les hauteurs des lignes inclinées pour en trouver les véritables longueurs.*

Il n'eſt donc queſtion que de trouver les hypotenuſes des triangles rectangles, dont un des côtez eſt connu dans l'Elevation, & l'autre à la projection horiſontale ou au profil des lignes projettées, ſoit qu'elles ſoient réelles ou ſimplement ſuppoſées pour ſervir de diagonales à des Parallelogrammes ou à des Trapezes ou Trapezoides, dont on ne connoït pas les angles, ce qu'on entendra mieux par les exemples.

Premiere Exemple d'un Berceau Droit ou Biais.

PLAN. 25. Fig. 290.

Soit ABFG la projection horiſontale d'un Berceau biais, dont *AbB* eſt le ceintre de face diviſé en ſes vouſſoirs aux points 1, 2, 3, 4, & dont les projections des joints de lit ſont les lignes I K ^{1}pP ^{2}pp LN. Pour trouver la premiere *Doele plate* dont la projection horiſontale eſt le parallelograme AIKG, on le diviſera en deux triangles par une diagonale AK ou IG, il n'importe laquelle, on tranſportera enſuite une de ces diagonales comme IG en I*g*, pour former un triangle rectangle I1G, l'hypotenuſe 1*g* ſera la vraye longueur de la Diagonale de la premiere doele, dont la projection horiſontale eſt GI. Si au lieu de cette diagonale on avoit pris l'autre AK, on auroit pû tranſporter la lougueur AK en I*k*, la ligne *k*1 auroit été la longueur réelle de la diagonale de la doele plate, dont AK eſt la projection, ou bien au lieu de tranſporter AK en I*k* on peut tranſporter A1 en A11 à angle droit ſur AK, & tirer la ligne 11 K, qui ſera celle qu'on cherche; mais il y a moins de commodité en cette maniere; parce qu'il faut faire un angle droit 11 AK, au lieu qu'en la précedente on en trouve un tout fait 1 I*g*, qui eſt celui de l'aplomb 1I ſur la baſe AB, qu'on eſt obligé de faire pour avoir la projection du point 1, & du joint de lit IK.

Une des deux diagonales de la Doele plate étant trouvée, on a la ſurface de cette Doele, parce qu'on a tous les côtez de chacun des triangles, par leſquels on l'a diviſé par les diagonales; car la corde A1 eſt le côté qui eſt dans le plan de la face, lequel n'eſt point changé dans l'Elevation, & les côtez GA ou KI de la projection ne ſont pas alterez dans leurs meſures; parce que le joint de lit de la voûte eſt parallele à IK, & que GA eſt celui de l'impoſte; donc on a les trois côtez de chacun des triangles, qui ſont les moitiez de la doele, ainſi faiſant à part la ligne $I^{1}g^{1}$ égale à la ligne 1*g*, ſi des points i^{1} & g^{1} pour centre & pour rayon des longueurs A1 & AG, on fait une in-

Digitized by Google

terſection d'arc de cercle en a & en k de part & d'autre de la diagonale $i^1 g^2$, on aura les points $^2a\ ^2$, par leſquels tirant les lignes $a g^2$, $a 1^2$, $k g^1$, $k i^1$ on aura un parallelograme qui ſera la ſurface de la doele plate dans toute ſon étenduë ; & avec les angles que font ſes côtez. On peut ſe ſervir de la ligne K11 pour rectifier l'operation; parce qu'elle doit être égale à la diagonale ak.

Si au lieu de la premiere doele on avoit voulu tracer la ſeconde, on auroit de même diviſé ſa projection KI ^2p P par une diagonale I P ou K ^1p, dont on auroit trouvé la véritable longueur en portant à angle droit ſur une de ſes extremitez la longueur $d2$, qui eſt la difference des hauteurs des diviſions des joints de lit 1 & 2, & l'hypotenuſe K ^1d auroit donné la véritable longueur de la diagonale de la ſeconde doele, ſur laquelle on auroit formé de part & d'autre deux triangles avec la corde 1 2, & le joint de lit KI, comme à l'exemple précedent, ce qui eſt clair de ſoi-même, Ou pour s'épargner la peine de faire un angle Droit on auroit profité de celui de l'aplomb 2 d1 ſur la ligne 1d, en tranſportant la longueur de la diagonale ^2pK en dz, la diſtance de z à 2 auroit donné la même longueur $z2$ que K ^1d. Ou encore par une maniere plus abregée, pour trouver tout d'un coup la difference de niveau des deux points 1 & 2, & profiter de l'angle Droit que fait *l'Aplomb* 2 ^2p ſur le diametre AB, il n'y a qu'à prendre le plus petit aplomb 1I, & le tranſporter ſur le plus grand en 2V, & la longueur de la diagonale ^2pK en ^1py, la ligne yV ſera celle que l'on cherche ; car il eſt viſible que les triangles $y\ ^1p$V & $zd2$ ſont egaux entr'eux, de même que les triangles $zd2$ & $^2p\ ^1d$K ; puiſque les jambes qui comprennent l'angle Droit ſont égales, par la conſtruction.

Les Panneaux de Lit ſe feront auſſi facilement par la même méthode. Premierement celui de l'impoſte eſt tout fait dans la projection horiſontale, parce qu'il eſt de lui-même horiſontal, c'eſt le parallelograme BIDEF, les autres lui ſeroient égaux ſi le Berceau étoit Droit; mais parce qu'on le ſuppoſe biais, quoiqu'ils ſoient tous compoſez de côtez égaux, ils ſont inégaux par leurs angles, ceux qui approchent le plus de la clef ſont toujours moins obliquangles.

Soit propoſé à faire le panneaux du premier lit marqué à l'élevation par le joint de tête $4q$, & au plan par le parallelograme NLOR, que l'on diviſera en deux triangles par une diagonale ON, laquelle repréſente celle du lit, qui eſt une ſurface inclinée à l'horiſon; par conſéquent cette diagonale eſt plus longue que ſa projection ON. Il en faut trouver la meſure, comme nous avons fait pour la doele, en portant ſur le plus grand aplomb qO, qui a ſervi à faire la projection, le

Digitized by Google

petit 4 L de q en Q, enſuite ayant tranſporté la longueur ON en On, on en tirera nQ qui ſera la longueur effective de la diagonale NO.

Presentement ſi l'on porte cette longueur nQ en quelqu'endroit à part comme à la fig. 291. en n^1 o^1, & qu'on forme de part & d'autre deux triangles avec les côtez 4 q & RO, on aura le parallelograme $n^1 l.\ o^1 r$, qui ſera la ſurface du premier lit dont les angles ſont déja moins aigus que ceux de l'impoſte; ainſi des points n^1 & o^1 pour centres, & de l'intervale NL pour rayon, on fera les arcs $l7$, $r8$, & des mêmes centres, & de l'intervale 4q on fera des arcs qui couperont les précedens aux points l & r, par leſquels tirant les lignes nr, ro, nl, lo, on aura le parallelograme $n^1 l o^1 r$, qui ſera la ſurface du lit de deſſus du premier rang de vouſſoirs, & celle du lit de deſſous du ſecond. On voit encore ici qu'au lieu de porter la longueur 4 L en qQ pour avoir la hauteur exterieure du joint de lit ſur celui de la Doele on pouvoit faire $4o$ perpendiculaire ſur $q\,o$ & ſur $o4$, prolongée en n^2, porter la longueur ON de la projection de o en n^2, on auroit eu l'hypotenuſe $n^2 q$ égale à nQ.

On voit auſſi qu'au lieu de la diagonale ON on pouvoit tirer l'autre LR; & porter LR de O en r, la ligne rQ auroit donné la véritable longueur de cette diagonale, dont on pouvoit ſe ſervir comme de l'autre; il n'importe en quelque endroit qu'on faſſe ces triangles rectangles pourvû que leurs côtez ſoient des longueurs convenables; le plus ou le moins de facilité dans la conſtruction décident des moyens. On a toujours un côté donné ſur l'Elelvation, qui eſt le joint de tête 4q ou 3 : 6, & l'autre à la projection NL ou OR.

Si les Faces du Berceau n'étoient pas paralleles entr'elles, comme ſi GY en étoit une, on pourroit toujours les ſuppoſer paralleles, & après avoir fait les panneaux on en retrancheroit les longueurs 9 N d'un côté, & 10 R de l'autre, ſuivant les régles de la circonſcription, & le panneau ſeroit réduit au trapeze 9 l O 10, comme on a vû au premier exemple du Problême précedent, ce qui peut s'appliquer à une face courbe en la renfermant dans un Poligone par ſa projection horiſontale.

Second Exemple d'un Berceau en Deſcente.

La difference qu'il y a de ce ſecond Exemple au premier conſiſte en deux choſes.

Premierement en ce que la projection horiſontale ne fournit point de meſure des joints de lit de la voûte comme au Berceau de Niveau;

parce que ces joints étant inclinez à l'horiſon, ſont racourcis dans la projection, où ils ſont repreſentez par une ligne horiſontale; mais cette ligne fournit le moyen de trouver l'inclinée en ce qu'elle eſt la baſe d'un triangle rectangle, dont l'autre jambe, qui eſt la hauteur de la deſcente, eſt donnée; par conſéquent il eſt aiſé de former le triangle rectangle, qui eſt le profil de la deſcente, & trouver ſon hypotenuſe, qui eſt la ligne inclinée que l'on cherche.

Fig. 293. Ainsi [*Fig.* 293.] puiſque B*a*, KL & autres projections des joints de lit ſont trop courtes on élevera à une extrémité *a* une perpendiculaire *a* a^2, que l'on fera égale à la hauteur de la deſcente qu'on ſuppoſe être ici la ligne *a*A, & du point B par a^2 ayant tiré B a^2, cette ligne ſera la véritable longueur de tous les joints de lit, qu'on ſuppoſe dans cet exemple paralleles & égaux.

Si les projections des joints de lit n'étoient pas paralleles, comme il arrive dans les voutes coniques, dont nous avons donné des exemples au problème précedent; il eſt viſible qu'il faudroit faire un profil pour chacun; parce qu'ils ſont tous inégaux, ſi le cône eſt ſcalene.

La ſeconde difference de cet exemple d'une voûte en Berceau biaiſe & en Deſcente eſt, que les longueurs des diagonales ſont un peu plus difficiles à trouver, en ce que leur hauteur n'eſt pas égale, de ſorte qu'on ne peut tirer ces hypotenuſes de même ſommet ſur une même baſe, comme à l'exemple précedent, d'un Berceau de niveau; mais de deux ſommets differens, & pour la commodité de l'execution, ſur deux differentes lignes de baſe.

Pour concevoir la raiſon de cette difference il faut faire attention que la ſurface de la doele d'un Berceau horiſontal, étant diviſée en deux triangles par deux diagonales; chacune d'elle va de bas en haut, com-
Fig. 292. me [*Fig.* 292.] de *n* en *b*, & de *r* en *l* à hauteur égale *lb nr*; mais que ſi cette ſurface eſt inclinée ſuivant ſes joints de lit comme à la Fig. 296. la doele IqBA, on verra que les deux diagonales BI A*q* ne ſont plus également inclinées à l'horiſon, celle qui part du point I le plus élevé deſcend plus qu'elle ne faiſoit de toute la quantité de la hauteur de la deſcente AB, & l'autre qui part du point A peut monter ou deſcendre ſuivant la difference qu'il y a entre la hauteur verticale ID de la ſurface, & la hauteur de la deſcente AD ou être de niveau comme A*q*.

Si *l'Aplomb* de la retombée marquée à la fig. 293, par la ligne 2D eſt plus grande que la hauteur A*a* de la deſcente du Berceau, la dia-
Fig. 294. gonale LQ [*Fig.* 293.] ou AL [*Fig.* 294.] au lieu de deſcendre du point

A

A monte encore en L de la quantité *d* L ; donc *l'Aplomb* A2 ou ſon égal *b*L excede la deſcente A*a* ; mais ſi la deſcente A*e* étoit plus grande que l'Aplomb de retombée 2A, ou ſon égal F*g* la diagonale LQ ou A*g* deſcendroit du point A de la difference *g* D de l'Aplomb de la retombée 2A & de la deſcente A*e*.

Pour prendre une idée nette de ces differences, nommons la hauteur A*a* ou A*e* de la deſcente *a*, celle de la retombée 2A, *b*, leur difference *d* ; il eſt clair que la diagonale qui partant du ſommet 2 vient au bas de la deſcente a toujours pour unique hauteur $a + b$, ce qui eſt invariable ; mais celle de l'autre diagonale qui part du point A ſera variable ſuivant le raport d'*a* à *b*, à ſon extremité oppoſée au point A ; car lorſque *a* ſera plus grand que *b* elle ſera deſcendante, parce que la hauteur totale $a + b = 2b + d$ eſt diminuée de $b + d = a$, qui eſt par la ſuppoſition, plus grand que *b*, c'eſt-à-dire $a - d$; mais ſi *a* eſt plus petit que *b*, cette diagonale ſera aſcendante, parce que la hauteur totale $a + b$, qui eſt alors égale à $2a + d$ ne ſera diminuée que de la hauteur *a* qui eſt moindre que *b* par la ſeconde ſuppoſition ; il reſtera donc $a + d$ plus grand que *a*, cela ſuppoſé

Soit [*Fig.* 293.] le plan horiſontal B*a* IE du Berceau en deſcente, avec la projection de ſes joints de lit faite, à l'ordinaire par les aplomb abaiſſez des diviſions de ſon ceintre 1, 2, 3, 4. Soit la hauteur de la Deſcente l'intervale A*a* pour former le panneau de doele, par exemple du ſecond vouſſoir 1 : 2, dont la projection horiſontale eſt le paralograme KL ^2pQ, on le diviſera en deux triangles par une diagonale LQ ou ^2pK il n'importe, une ſuffit ; nous n'en mettons ici deux que pour faire voir qu'il n'eſt pas indifferend de prendre l'une ou l'autre pour en trouver la juſte longueur. *Fig.* 293.

On commencera par chercher la valeur de la projection du joint de lit KL égale à B*a*, qui eſt trop courte, & qu'on trouvera en faiſant la ligne *a* a^2 perpendiculaire ſur *a*B & égale à la hauteur A*a*, la ligne Ba^2 ſera déja un côté d'un des triangles que forment les diagonales LQ ou K ^2p ; enſuite on cherchera la valeur de l'autre côté L ^2p ou ſon égale KQ, qui eſt auſſi trop court, parce qu'il repréſente la corde 1 2 qui eſt inclinée à l'horiſon, & comme cette corde eſt dans ſa juſte meſure à l'élevation, elle ſera le ſecend côté de chacun de ces triangles. Il ne reſte plus qu'à trouver le troiſiéme qui eſt la valeur d'une diagonale, laquelle n'eſt point inclinée ſuivant la pente a^2 B, comme nous l'avons fait voir, mais l'une plus & l'autre moins ; celle qui vient du point 2 plus haut que le point 1, eſt plus inclinée que la ligne Ba^2, & ſa hauteur eſt comme nous l'avons dit la ſomme

de l'aplomb 2D & de la deſcente $^2t\ ^2p = A_a$; il faut donc porter la hauteur 2D en I ^2t pour avoir cette ſomme I ^2p, & la longueur de la diagonale ^2pK, en ^2pk & tirer la ligne 1 k qui ſera ſa juſte meſure.

Mais ſi l'on veut avoir la valeur de la diagonale LQ, qui a pour origine le point 1 projetté en L, lequel eſt plus bas que le point 2, il faudra porter la longueur 2D de ^2p en N, pour avoir la difference N ^2t de *l'Aplomb* 2D & de la deſcente $^2t\ ^2p$, & porter la longueur de la diagonale LQ de ^2t en O, la ligne NO hypotenuſe de ce triangle rectangle ſera la valeur de la ligne LQ.

Pour s'épargner la peine de faire une ligne 1D perpendiculaire ſur 2D, qui donne la difference 2D des hauteurs des points 1 & 2, il n'y a qu'à prendre avec le compas la hauteur 1L & la porter en 2N ſur l'aplomb le plus long, on aura tout d'un coup la difference N ^2p = 2D ; parce que l'angle L ^2p 2 eſt Droit, 1, 2 = LN côté du même parallelograme & 1D = L ^2p, donc N ^2p = 2D.

Par la même conſtruction on trouvera le panneau de lit marqué à l'élevation par le joint de Tête 3 ^{2}3, & au plan horiſontal par le parallelograme sRSr, dans lequel on tirera les diagonales Rr, ou Sr, une des deux ſuffit pour le diviſer en deux triangles, & on aura leur valeur par la même methode qu'on a employé pour trouver celle de la doele. On examinera quelle eſt celle qui vient du point le plus élevé ^{2}3, qui a donné le point S pour ſa projection, d'où l'on conclura que la diagonale Ss eſt la plus grande, qui doit avoir pour hauteur la ſomme de *l'Aplomb* ^{2}3d, & de la hauteur Os de la deſcente, c'eſt pourquoi l'on portera 3d en Ou, la ligne su ſera la hauteur de la diagonale Ss; ainſi en portant Ss en SV la ligne uV ſera ſa juſte meſure ; pour la diagonale Rr, il n'y a qu'à porter la hauteur ^{2}3d en RT pour avoir ſa difference yT avec celle de la deſcente Os, laquelle difference eſt ici preſqu'inſenſible, de ſorte que la ligne Rr eſt égale à la grandeur de projection, c'eſt-à-dire, que cette diagonale eſt horiſontale dans le panneau de lit ; par conſéquent égale à la projection Rr.

On peut ici comme à l'Article précedent trouver la difference ^{2}3d tout d'un coup, en portant la plus petite hauteur d'aplomb 3 R en ^{2}3 O.

Les longueurs des diagonales, tant de la la doele que du lit, étant trouvées, on les tranſportera en quelqu'endroit à volonté, comme en Kt^2 [*Fig.* 295.] & des points K & t^2, comme centres & pour rayons les intervales 1 2 & Ba^2, de la figure 193, on fera des interſections d'arcs de part & d'autre de la diagonale Kt^2, qui donneront

Fig. 295. *à gauche.*

Digitized by Google

les points t^1 & q, par leſquels tirant les lignes Kt^1, t^1t^1, qt^1, qK on aura un parallelograme égal à la ſurface de la doele plate.

De la même maniere ayant tranſporté la longueur V u en s S° [*Fig.* 295. *à droite.*] on prendra la longueur du joint de Tête 3 ^{2}3, & du joint de lit B a & de ces intervales pour rayons & des points s S° pour centres, on fera des interſections d'arcs en R^T & $r3$, qui donneront les points R^T & $r3$, par leſquels tirant les lignes $r3$ S°, r^3 s^3, R_TS°, R_T s^3 on aura un parallelograme qui ſera égal à celui de la ſurface du panneau de lit. *Fig.* 295. *à droite.*

Troiſiéme Exemple d'une Voûte en Canoniere en Deſcente, qui eſt une Conique Scalene Tronquée.

La difference de cet exemple au précedent conſiſte 1.° en ce que les projections des joints de lit étant toutes inégales, & plus courtes que les joints qui ſont inclinez à l'horiſon, il faut trouver la valeur de chacune en particulier par un profil ſemblable à celui de l'impoſte Da a^2, en élevant une perpendiculaire à une de leurs extrémitez égale à la hauteur de la deſcente aa^2, au lieu que dans l'exemple précedent un ſeul ſufiſoit pour tous. *Fig.* 297.

Secondement, en ce que les hauteurs des diagonales ſe trouvent encore differemment, quoique toujours ſuivant le même principe.

Soit donc [*Fig.* 297.] le plan horiſontal d'une deſcente en canoniere DabE, avec les projections de tous ces joints de lit Ol, Pn, &c. ſoit Aa la hauteur de la deſcente, AbB le ceintre de face de la partie poſterieure ébraſée; DSE celui de la face antérieure, l'un & l'autre diviſé en nombre égal de vouſſoirs aux points 1, 2, 3, 4, deſquels on a abaiſſé les aplomb 1L, 2N, & 1O 2P, leſquels ont donné les projections des joints de lit lO, nP ſuivant l'uſage ordinaire, & les trapezes DalO, & OLnP pour projection des doeles. On les diviſera en triangles par des diagonales nO lP [une ſeule ſuffit] & l'on en trouvera la valeur, à peu près comme dans l'exemple précedant, ayant égard à leur origine & à leur côté oppoſé pour trouver par le moyen de leur hauteur au deſſus du plan horiſontal leur inclinaiſon & leur longueur; ainſi pour avoir la véritable longueur de la diagonale nO, qui répond par le point n à la plus grande hauteur de l'aplomb 2n, & par le point O, à la plus petite hauteur de l'aplomb 10 de la face anterieure. On ôtera la plus petite de la plus grande, & leur difference ſera la hauteur d'une des extrémitez de cette diagonale au point n. Or il n'importe de prendre cette difference en haut ou en bas; ſi on

Digitized by Google

la prend en bas en portant O1 de *n* en 10, il faudra tirer une horiſontale par ce point 10; mais ſi l'on porte O1 ſur le haut du point 2 au point I la ligne *ab* ſervira d'horiſontale toute tracée ; de ſorte que ſi l'on porte la longueur de la diagonale *n*O de *n* en K, & qu'on tire la ligne KI , cette ligne ſera la valeur de la plus grande diagonale repréſentée au profil par la ligne 23 01, qui eſt trop courte par les raiſons que nous avons donné en parlant de profils des cônes.

CETTE ligne KI peut ſuffire pour trouver le panneau de la doele, dont la projection eſt O*l*nP, On la tranſportera où l'on voudra comme à la figure 298. en ^{2}n 2e, puis du point ^{2}n pour centre & de l'intervale de la corde 1, 2 de la figure 297. pour rayon, on fera un arc de cercle $l5$, & du point 2e & pour rayon l^{2}O valeur du joint de lit, dont la projection eſt lO, que l'on aura trouvé en faiſant l l^{2} égale à lL, & perpendiculaire à OI; on aura le triangle 2e 1L 2^{2} qui ſera la valeur de celui de la doele O l*n*. On trouvera de la même maniere la valeur de l'autre triangle O P *n*, en faiſant du centre 2e & de l'intervale de la corde 12 du ceintre DSE l'arc $6p^{2}$, & du point ^{2}n pour centre & pour rayon la valeur de P*n* que l'on n'a pas mis dans cette figure, on decrira un autre arc qui coupe le précedent en ^{2}p, le triangle 2e ^{2}p ^{2}n ſera la valeur de celui de la projection OP*n*.

Fig. 298.

SI au lieu de prendre la diagonale *n*O on avoit voulu prendre l'autre lP, on auroit pris la hauteur de *l'aplomb* 2 P du ceintre de face anterieure, & on l'auroit porté ſur l'aplomb 1L de l'autre ceintre A*b*B qui a donné la projection du point de l'extrémité oppoſée de cette diagonale, & on auroit eu le point *i* ; enſuite portant la longueur lP de l en *k*, la ligne *ik* auroit donné ſa valeur ou meſure, exprimée au profil par la ligne 14 p^{2}, qui étoit trop courte parce que c'eſt un profil de cône. Si l'on porte cette longueur 2P de bas en haut de l en 2*p*, on aura la hauteur de l'horiſontale 2P p^{2} terminée au point p^{2} du profil,

IL faut remarquer que les longueurs des diagonales trouvées ſont plus grandes que celles du profil 14 p^{2} & 23 01 ; parce que n'étant pas paralleles au plan vertical de ce profil, elles y ſont racourcies par la projection verticale; de ſorte qu'un tel profil eſt inutile pour les meſures; on ne l'a fait que pour indiquer le raport des lignes cherchées & pour en faire voir l'inclinaiſon & la poſition, afin qu'on conçoive plus facilement les raiſons de la conſtruction.

IL n'eſt pas néceſſaire d'expliquer la maniere de faire le panneau de lit, on s'y prendra de la même maniere que pour la doele, en diviſant ſa projection QR*s* en diagonales, dont on trouvera les longueurs réelles

Digitized by Google

par le moyen de leur hauteur ſur l'horiſon à l'extrémité élevée, laquelle hauteur ſera la difference de celle des retombées, par exemple, du joint de Tête 36, qui eſt V*t*, ſi l'on porte de *t* en *q* la longueur de la projection de la diagonale *t*Q on aura pour ſa valeur la ligne V*q*, de même que *ur* eſt celle de la ligne *s*R de la projection. Ces diagonales tranſportées à part comme à la fig. 299. avec les joints de Tête 3. 6, & la valeur des joints de lit *s*Q *t*R, donneront une parallelograme *t*6, R6, Q3, *s*3, qui ſera le lit du joint 36, de la même maniere qu'on a trouvé celui de la doele dans l'exemple précedent de la fig. 293, avec cette ſeule difference, qu'il faut faire un profil pour chaque projection de joint de lit Q*s* R*t*; parce que ces lignes étant la projection de lignes inégales une ſeule hypotenuſe ne peut ſervir pour tous les joints de lit, comme dans la fig. 293, ce que nous avons déja fait remarquer, mais que nous n'avons pas fait à la fig. 297. pour éviter la multiplicité des lignes.

Quatriéme Exemple d'une Voûte Sphérique réduite en Polyedres par des Doeles plates.

Nous avons fait voir, en parlant des Dévelopemens, que la ſphère pouvoit être réduite en portions de cônes tronquez, & ces cônes en Pyramides tronquées, de ſorte qu'on pourroit renvoyer le Lecteur à l'exemple précedent; puiſque ſi l'on ſuppoſe le demi cercle B*b*E [*Fig.* 300.] diviſé en cinq parties aux points 1, 2, 3, 4, & qu'ayant tiré les cordes B1, 1·2; 2·3; 3·4; 4E l'on faſſe mouvoir ce demi cercle autour de ſon rayon C*b*, les cordes B1, 1·2 produiront par leur révolution deux cônes tronquez, dont la ſection par l'axe du premier eſt le trapeze B1 4E, & le trapeze 2 4 3 2 celle du ſecond, & ſi ces trois cônes tronquez inſcripts dans la ſphère ſont réduits en Pyramides tronquées, nous retombons dans le cas de l'exemple précedent, avec cette difference que celui-ci eſt plus facile & plus ſimple; parce que ces Pyramides ſont droites ſur leurs baſes, & que nous en ſuppoſons les axes en ſituation verticale; au lieu qu'au précedent nous avons ſuppoſé l'axe incliné à l'horiſon. *Fig.* 300.

Soit cependant pour une plus ample explication de la fig. 300. le demi cercle ACFS la projection d'une hemiſphère, ou plûtôt d'un quart de ſphère, dont les cercles concentriques BME, GNL & IOK ſont les projections des joints de lit de la dole réduite en portions de cônes tronquez, dans leſquels on inſcrira un Polygone d'un nombre de côtez égal à celui de la quantité des vouſſoirs que l'on doit mettre à chaque rang en faiſant ces vouſſoirs égaux ou inégaux, il n'importe; la *Fig.* 300.

Digitized by Google

régnlarité de ce poligone n'eſt pas néceſſaire ; parce qu'il doit enfin être réduit au cercle pour derniere operation.

Fig. 300. Soit, par exemple, B G N M la projection d'une doele d'un vouſſoir du premier rang, l'ayant diviſé par la diagonale GM en deux triangles, on cherchera la véritable longueur de cette diagonale, qui eſt plus courte que la ligne inclinée qu'elle repréſente. On portera comme dans les exemples précedens la longueur GM en G*m* ſur l'horiſontale A F au pied de la hauteur de l'aplomb 1 G, la ligne *m* 1 ſera la longueur réelle dont MG eſt la repréſentation. On peut donc former un trapez *b g n m* [*Fig.* 302.] qui ſera égal à celui de la Doele plate, dont la projection eſt BGNM [*Fig.* 300.] parce qu'on a tous les côtez des deux triangles inégaux dans leſquels il a été diviſé par la diagonale GM ; car les côtez égaux BG & MN ſont donnez par la corde B1 de l'élevation qu'ils repréſentent, & que les cordes BM & GN ſont données dans la projection de leur longueur naturelle ; parce que ces cordes ſont celles des cercles des joints de lit qu'on ſuppoſe horiſontaux ; par conſequent paralleles & égaux à ceux du plan horiſontal de la projection, où ils ſont raſſemblez.

Fig. 300. & 302. Ayant porté la longueur de la ligne *m*1 de la fig. 300. en quelqu'endroit à part comme en *g m* [*Fig.* 302] du point *g* pour centre & de l'intervale de la corde GN de la fig. 300. on fera un arc de cercle vers *n*, & du point *m* pour centre & de l'intervale de la corde B 1 de l'élevation pour rayon on fera un autre arc de cercle *n*1, qui coupera le précedent au point *n*, par lequel tirant les lignes *n g*, *n m* on aura le plus petit des deux triangles *g n m* de la diviſion du trapeze par la diagonale MG. La méme corde B1 ſera le rayon d'un arc *b* 5 fait du centre *g*, & la corde MB de la fig. 300. ſera le rayon d'un autre arc fait du point *m* pour centre, lequel arc coupera le précedent *b* 5 au point *b*, qui ſera le ſommet du ſecond & plus grand triangle *mbg*.

On trouvera de même la ſurface de la Doele d'un vouſſoir du ſecond rang, dont la projection horiſontale eſt le Trapeze GION, en portant I N en I*n* ſur l'horiſontale AF & la hauteur de la retombée 2D en *i*I, la ligne *in* ſera la longueur réelle, dont la diagonale IN eſt la projection ; de ſorte que le Trapeze GION deviendra plus alongé, comme on le voit à la fig. 302. en *g i o n*.

Par la même méthode on trouvera les ſurfaces des lits, que l'on pourroit auſſi réduire à des trapezes rectilignes, ſi l'on vouloit tirer une tangente *p t* ſur le milieu *t* de l'arc *Qq*, qui eſt la projection du joint de lit de l'extrados d'un vouſſoir, dont la projection ſeroit la por-

Digitized by Google

tion de couronne de cercle L Q *q r*; mais cette circonſcription eſt inutile pour l'execution; il ſuffit que le panneau de lit ſoit rectiligne de trois côtez Q L, L *r*, *r q*, quoique ſon quatriéme côté *q*Q ſoit une portion de cercle, il ne fait aucune difficulté pour l'uſage de la coupe des pierres.

Ayant fait la projection du lit dont la ligne 4 14 de l'élevation repréſente exactement la largeur & l'inclinaiſon, on prendra avec le compas la longueur de l'aplomb 4L qu'on portera ſur le plus grand 14 Q en 14 *u*, & l'on portera la longueur Q*r* de la diagonale qu'on aura tiré dans la projection de Q en V, la ligne V*u* ſera ſa juſte longueur, laquelle étant miſe à part [*Fig.* 301.] ſervira de baſe pour former les deux triangles du trapeze qui exprime la ſurface du lit, dont tous les côtez ſont donnez. Les côtez Q*l* & *rq* ſont égaux au joint de Tête 4 14, le côté *lr* égal au côté L*r* de la projection horiſontala, & le côté Q*q* égal auſſi à celui de la projection, ſoit qu'on le prenne par la corde de ſon arc, pour lui circonſcrire l'arc; ſoit qu'on le prenne par ſa tangente, ſoit qu'on le prenne par l'arc méme, qu'il eſt aiſé de tracer du premier coup, en prenant ſur le côté Q*l* prolongé la longueur du rayon FC, & alors au lieu d'un trapeze rectiligne on aura un trapezoide mixte *l r q* Q. *Fig.* 301.

Demonstration.

La conſtruction de ce Probleme & les explications que nous y avons mêlé portent leur démonſtration.

Premierement il eſt clair que toutes ſortes de figures rectilignes peuvent étre réduites en triangles, & que les curvilignes peuvent étre réduites en rectilignes par l'inſcription ou la circonſcription, par le moyen de quoi on peut, du moins par aproximation, connoître leurs excès ou leur défaut; mais toujours aſſez exactement pour la pratique.

Secondement il n'eſt pas moins clair qu'en trouvant la hauteur des lignes inclinées ſur un plan horiſontal, ſur lequel la projection les a racourcies, on ne fait que décompoſer cette projection; enſorte que l'on remet les côtez & les angles du ſolide dans la ſcituation où ils étoient avant qu'ils fuſſent projettez, & il eſt clair qu'on en trouve par ce moyen les juſtes longueurs. Or ayant les trois côtez d'un triangle il eſt évident qu'on a les angles de Trapeze ou de telle autre ſurface que l'on voudra, dont il eſt partie; car un de ſes angles devient un de ceux de la figure quadriligne ou poligone qu'il compoſe ou par ſa répetition, comme il arrive dans les parallelogrames, ou par ſa jonc-

Digitized by Google

tion avec celui d'un autre triangle mis de ſuite, car le tout eſt égal à ſes parties ; donc cette méthode eſt applicable à toutes ſortes de ſurfaces planes ; mais comme les courbes peuvent encore être inſcrites dans des Polyedres, comme nous l'avons dit de la ſphère, il ſuit que cette méthode eſt univerſelle, & que l'ayant bien compriſe on peut l'appliquer, & trouver par ſon moyen toutes les ſurfaces dont les ſolides ſont envelopez, ce qui étoit propoſé au Problême.

Remarque ſur l'Uſage.

Non ſeulement ce Problême peut ſervir à trouver les panneaux des Lits & des Doeles planes, mais encore ceux des Lits & des Doeles ou Têtes gauches, en inſcrivant leur projection dans des triangles, comme aux vis St. Giles & aux Arrieres-Vouſſures ; car on peut toujour faire paſſer une ſurface plane par trois points. Cependant comme la diviſion des Doeles donne des figures quadrilignes qu'il faudroit diviſer en deux, par des diagonales, pour les réduire en triangle, il arriveroit qu'il faudroit encore trouver l'inclinaiſon que les plans de ces deux triangles feroient entr'eux, ſuppoſant que le quadriligne ſoit Gauche, ce qui obligeroit à une ſeconde operation, qu'on peut s'épargner par des méthodes plus commodes & plus abregées, que nous donnerons au quatriéme Livre, lorſqu'il s'agira des Traits des voutes qui ont des lits ou des paremens de doele ou de Tête Gauches. Il ſuffit d'avoir établi une méthode generale & fondamentale. Il ne reſte plus qu'à trouver les angles des plans qui terminent & enferment les ſolides.

CHAPITRE V.

De la Goniographie, ou Deſcription des Angles.

En Termes de l'Art.

Des moyens de trouver les Biveaux

IL ſemble que lorſqu'on a la figure & la juſte grandeur des ſurfaces, qui comprennent un ſolide, il eſt inutile de chercher les angles qu'elles font entr'elles ; puiſque leur aſſemblage dans l'ordre où elles doivent être forme un ſolide d'une figure déterminée, dont les angles ne peuvent varier ſans le changement de quelques-unes de ſes ſurfaces ; mais il faut conſiderer ici que notre objet n'eſt pas de raſſembler

Digitized by Google

ſembler des ſurfaces pour en compoſer un ſolide ; mais de diviſer un ſolide en parties qui ayent leurs ſurfaces égales à celles qu'on a trouvé par les Régles & les Problêmes précedens, en retranchant d'une plus groſſe maſſe tout l'excès dont elle ſurpaſſe celui qu'on ſe propoſe de faire ; & parce qu'il faut abattre, tailler & creuſer ſucceſſivement une ſurface par le moyen de ſa Contiguë, qui doit en déterminer la poſition, il ſuit, qu'on ne peut leur donner l'inclinaiſon qu'elles doivent avoir entr'elles, ſans connoître les angles de leurs plans pour approfondir plus ou moins la place du modele qu'on doit y appliquer, lequel régle les angles de leurs côtez, & pour trouver par leur ſituation celle d'une troiſiéme, quatriéme & cinquiéme ſurface, dont elles ſont les termes.

La ſeconde raiſon qui nous oblige à la recherche des angles des plans, c'eſt qu'on ne fait pas des panneaux pour toutes les ſurfaces qui comprennent un vouſſoir. On fait rarement ceux des extrados, & s'il s'agiſſoit d'operer par la Syntefe, on ne pourroit ſe diſpenſer de les faire, lorſqu'ils ſont compoſez de pluſieurs ſurfaces, comme il arrive aux enfourchemens.

Nous ne croyons pas qu'il ſoit néceſſaire d'expliquer ici ce que nous entendons par les angles des plans ; la ſixiéme définition du unziéme Livre d'Euclide nous enſeigne, que l'angle de rencontre de deux plans qui ſe coupent eſt meſuré par celui que font deux lignes droites, perpendiculaires à leur commune ſection, menées au même point ; la raiſon nous fait ſentir que c'eſt le moyen le plus ſimple de connoître leur inclinaiſon mutuelle ; cependant comme cette régle eſt le fondement de l'uſage qu'on doit faire de ces inſtrumens propres à copier & tranſporter les angles qu'on appelle Beuveaux, ou ſelon moi, *Biveaux*, du Latin *Bivium*, un chemin fourchu, il ne ſera pas inutile d'en faire une propoſition generale, applicable aux ſurfaces courbes des corps réguliers, auſſi bien qu'aux droites.

Où il faut remarquer qu'on ne doit pas confondre les *Angles des Plans* avec *les Angles Plans* ; car quoique les angles d'inclinaiſons des plans ſoient dans des plans qui leur ſoient perpendiculaires, nous entendons par le mot *d'Angle plan*, celui des côtez d'une ſurface plane, & par *Angle des plans*, celui de deux ſurfaces.

LEMME.

L'Angle d'Inclinaiſon de deux Surfaces quelconques, Planes ou Courbes, meſuré par des Lignes obliques à leur commune ſection, eſt plus aigu que celui qui eſt meſuré par des Perpendiculaires à cette commune ſection, menées à un même point.

PLAN. 26. *Fig.* 303. SOIENT deux ſurfaces planes ABCD, BFED, qui ſont inclinées entr'elles, dont la commune ſection eſt la ligne droite BD; ſi d'un point *b* pris ſur cette ligne on lui tire deux perpendiculatres, ſçavoir *gb* dans un plan, & *ib* dans l'autre, & que d'un autre point K pris ſur la même ligne, on tire aux points *g* & *i* les lignes K*g* K*i*; je dis que l'angle *gbi* eſt plus grand que l'angle *g*K*i*.

DEMONSTRATION.

A cauſe des angles Droits en *b*, les lignes K*i* & K*g*, qui ſont les hypotenuſes des triangles rectangles *ib*K & *gb*K ſont plus grandes que les côtez *gb* & *bi*; donc ſi l'on applique ſur un même plan les deux angles *g*K*i* & *gbi*, qui ſont ici dans differens plans le ſommet *b* tombera au deſſous du ſommet K, & ſi l'on tire une ligne *gi* pour baſe commune de ces deux triangles *gbi*, *g*K*i*; on reconnoitra [par la 21. propoſition du premier Livre d'EUCLIDE] que l'angle *g*K*i* eſt plus aigu que l'angle *gbi*, *ce qu'il falloit démontrer* premierement pour les ſections des ſurfaces planes.

SECONDEMENT ſi les ſurfaces ſont l'une plane l'autre courbe ou toutes deux courbes des courbures régulieres des ſphères, cónes & cylindres, il ſera encore vrai que les lignes courbes qui ſeront dans des plans perpendiculaires à la commune ſection, c'eſt-à-dire, à une tangente de la courbe formée par cette ſection, ſeront plus courbes que celles qui s'éloignent de ce point d'atouchement.

Fig. 304. SOIT pour exemple une portion de Zone de ſphère K*b*GH*d*L, qui eſt coupée par un plan IFGK, telle qu'eſt la rencontre d'une doele avec ſon lit. Il eſt clair que ſi par le point *b* de la commune ſection des ſurfaces courbe & plane, on mene la tangente *b*T, & qu'on lui mene les perpendiculaires *ba* & *bd*, d'ont l'une *ba* ſoit dans le plan du Lit, & dont l'autre *bd* ſoit la corde de l'arc *bmd* portion de la ſphère, le plan qui paſſera par *bmd* paſſera par le centre de la ſphère, & ſi l'on prend un autre point comme E dans la ſection du lit & de la doele, & que l'on tire E*d*, le plan qui paſſera par E*d* ne paſſera pas le centre de la ſphère. Or dans le cercle, de toutes les lignes qui ſont tirées d'un point hors du centre à la circonference la plus courte & celle qui étant prolongée paſſe par le centre, de même dans la ſphè-

re l'arc le plus court entre deux cercles paralleles eſt celui du cercle majeur, dont le plan paſſe par le centre de la ſphère, & les poles de ces cercles, c'eſt-à-dire, qui coupe à angle droit leurs plans.

Pour concevoir cette vérité ſoit prolongée la ligne droite *ab* en C, puiſqu'elle eſt perpendiculaire à la tangente *b*T, elle paſſera par le centre C de la ſection circulaire K*b*G, & ſi du point *d*, que je ſuppoſe à la ſurface de la ſphère, on tire ſur la ligne *ab*C, la perpendiculaire *d*D égale à la hauteur du point *d* ſur le plan FGKI de la ſection plane de la ſphere, & du point D une ligne au point E. Il eſt clair [par la 15. du 3. L. d'Euclide] que la ligne D*b*, qui paſſe par le centre C ſera plus courte que DE, qui eſt dans le même plan & ne paſſe pas par le centre. Il ſe formera donc deux triangles rectangles perpendiculaires au plan de la ſection, ſçavoir *b d*D, E*d*D, qui ont pour côté commun *d*D; & puiſque le côté ED eſt plus grand que *db* l'hypotenuſe *d*E ſera auſſi plus grande que *d b*; donc l'angle a*bd* ſera plus grand que aED [par l'Article précedent] or l'arc *bnd* étant dans un plan perpendiculaire au plan FGKI, ſection de la ſphère, & paſſant par ſon centre paſſera auſſi par le Pole & ſera portion d'un cercle majeur, laquelle ſera plus petite que celle du cercle mineur E*nd*, comme nous le démontrerons au quatriéme Livre; donc l'angle mixte *abnd* eſt plus grand que l'angle mixte a*End*, *ce qu'il falloit demontrer.*

Cette démonſtration pourra s'appliquer aux autres ſections coniques, où il eſt démontré *de maximis & minimis*, que la perpendiculaire au point d'atouchement d'une tangente eſt la plus courte de toutes celles qu'on peut tirer d'un point donné à ſon contour, par ce qu'une telle ligne eſt un *minimum.*

De-là on peut inferer que non ſeulement aux angles mixtes, mais encore aux curvilignes, formez par la rencontre de deux ſurfaces courbes, il faut prendre la meſure de l'ouverture des branches du Biveau perpendiculairement à la tangente commune de l'une & de l'autre.

Corollaire.

Il ſuit de-là que l'art de former les Biveaux ou modeles des angles des ſurfaces qui ſe rencontrent, conſiſte à trouver une ſoutendente aux perpendiculaires menées ſur chaque ſurface à la ligne droite ou courbe de leur interſection, ce qui eſt aiſé dans les angles rentrans, mais qui ne ſe peut dans les angles ſaillans, que par le moyen de quelqu'inſtrument, ou en prolongeant ces perpendiculaires, par le moyen de quelques régles ou cordeaux.

L'INSTRUMENT propre à cet uſage eſt compoſé de deux branches mobiles, qui ſont aſſemblées à leur extrémité par un pivot & une charniere, dont le frotement eſt aſſez rude pour qu'elles demeurent immobiles à l'ouverture où on les a mis; on l'appelle *Sauterelle* ou *Fauſſe Equierre* ou *Compas d'Apareilleur*, comme on verra à la premiere Planche du quatriéme Livre; mais parce qu'on a beſoin de prendre des angles mixtes ou curvilignes, & qu'avec cet inſtrument on ne peut prendre que les angles rectilignes, ou ceux des cordes des ſurfaces Curvilignes Concaves, & point du tout des Convexes, on eſt obligé de faire un autre inſtrument pour chaque angle de cette eſpece, qu'on appelle *Beveau* ou plûtôt *Biveau*.

COMME il y a plus de difficulté à former des angles mixtes & curvilignes que des rectilignes, qui ſont aiſément déterminez par la connoiſſance de leurs Sinus, ou de leurs ſoutendantes, on doit toujours commencer par les angles rectilignes des ſurfaces planes ſuppoſées au devant des courbes, comme ſont les Doeles plates.

PROBLEME XII.

Trois Angles Plans, qui forment un Angle ſolide étant donnez, trouver les Angles d'Inclinaiſon de ces Plans entr'eux.

Ou en Termes de l'Art pour la Coupe des Pierres.

Trois Panneaux étant donnez trouver les Biveaux de leurs aſſemblages.

On peut réſoudre Méchaniquement ce Problême, en joignant les trois angles ou panneaux donnez, enſorte qu'ils forment l'angle ſolide, & en prenant avec la ſauterelle ou récipiangle les angles des plans, obſervant qu'il faut que les branches de la ſauterelle ſoient poſées ſuivant des lignes perpendiculaires à l'interſection des plans, ſi elle eſt en ligne droite, ou à ſa tangente en un point où l'on meſure l'angle, c'eſt pourquoi il faut ſe ſervir d'une équerre pour en placer un côté ſur l'interſection & faire ſervir l'autre à régler la poſition de la branche de la ſauterelle ſur chaque ſurface.

MAIS ces operations ne ſont bonnes que pour des Ouvriers, l'eſprit n'y trouve pas la même ſatisfaction que dans les Geometriques, ni la même ſûreté & commodité.

Fig. 305. & 306. SOIENT donc [*Fig.* 305.] les trois plans AB, AC, AD qu'il faut raſſembler, enſorte qu'ils faſſent un angle ſolide en A. Il faut trouver l'angle d'inclinaiſon du plan AD avec le plan AC, & celui du même plan AD avec le plan AB.

Digitized by Google

On décrira ſur une même ſurface plane les trois angles plans qui doivent former le ſolide, & on les rengera de maniere qu'ils ſoient contigus par les côtez AL & AK. Des points E & F pris ſur les autres côtez à volonté ou à diſtance égale du point A, on tirera ſur les côtez AL & AK, prolongez, s'il le faut, les perpendiculaires EG, FH, qu'on prolongera juſqu'à leur point de renconte en I, duquel pour centre, & de l'intervale HF pour rayon, on tracera un arc en K, qui coupera en ce point K le côté AH prolongé; je dis que ſi par les points I & K on mène la ligne IK, l'angle HIK ſera égal à celui de l'inclinaiſon des plans AC AD entr'eux.

De même que ſi du point I pour centre, & de l'intervale GE, on fait un arc de cercle qui coupe AG prolongée en L, & que l'on tire la ligne IL, l'angle LIG ſera égal à celui de l'inclinaiſon mutuelle des plans AB, AD.

Demonstration.

Supposons que les plans AC AB ſe meuvent autour des lignes AK, AL comme des couvercles des boëtes ſur leurs charnieres, juſqu'à ce que les lignes AF AE ſe raſſemblent en une ſeule, qui ſeroit en l'air mais que nous repréſentons dans la figure par une ligne AM, le plan AD reſtant immobile, les lignes MG, MH, qui ſeroient perpendiculaires aux interſections AL AK ſeroient les mêmes qui étoient auparavant en EG & HF; ſoit enfin tirée la ligne MI.

Puisque la ligne LG (*Fig.* 305.) ou LG [*Fig.* 306.] eſt perpendiculaire à la ligne GM qui eſt en l'air & à GI qui eſt dans le plan, elle ſera perpendiculaire au plan du triangle MGI [par la 4 du 11. d'Euclide] & réciproquement on démontrera de la même maniere que le plan du triangle MIH eſt perpendiculaire au plan AD, d'où il ſuit [par la 19. du 11. d'Eucl.] que la ligne MI ſera perpendiculaire au plan AD, & que le triangle MIH ſera rectangle en I, quoiqu'il ne le ſoit pas dans la figure, où l'on ne peut le repréſenter exactement; parce que la ligne IM eſt en l'air hors du plan du papier. Donc l'angle MHI eſt celui de l'inclinaiſon des plans AD AC, auquel l'angle HIK a été fait égal par la conſtruction; car l'on a fait HI perpendiculaire ſur AK pour avoir un angle droit en H, & HK = HF = IM; donc les triangles MIH ſuppoſé en l'air, & IHK ſont égaux en tout, puiſqu'ils ſont rectangles l'un en H l'autre en I, que le côté IH eſt commun aux deux, & que HK eſt égal à IM; donc l'angle MHI eſt égal à l'angle HIK, c'eſt-à-dire, à celui de l'inclinaiſon des plans AD AC, *ce qu'il falloit démontrer.*

On démontrera de même que l'angle GIL eſt égal à l'angle MGI, qui eſt celui de l'inclinaiſon des plans AB, AD. Les mêmes lettres dont on a marqué les lignes de la fig. 306. font voir l'application de ce Probléme à un vouſſoir de voûte en berceau biaiſe, répeté à la fig. 307. avec des ombres pour en mieux exprimer la figure.

Fig. 306. & 307.

Il faut remarquer qu'il peut arriver que le point I tombe hors du plan AD, ce qui ne change en rien la démonſtration, comme on peut le voir dans la fig. 306.

Seconde maniere en réduiſant les Plans donnez en Triangles pour en former des Pyramides.

La maniere précedente de réſoudre le Problême eſt la plus ſimple, car elle ne ſuppoſe que des angles plans donnez, quoique dans la figure on ait deſſiné des parallelogrames. On a pû remarquer que nous n'avons fait attention qu'à un de leurs angles. celle-ci ne ſuppoſe rien de plus que des baſes; mais elle ſe fait un peu differemment ſans le ſecours des triangles rectangles, dont le ſommet de l'angle Droit tombe hors des côtez des angles donnez; mais en cherchant les baſes triangulaires des Pyramides. C'eſt pourquoi nous repréſentons ici quatre triangles pour les quatre ſurfaces qui l'envelopent.

Fig. 308. Soient les trois triangles ABC, AEC, EDC donnez, qui ſont autant de ſurfaces d'une Pyramide triangulaire, leſquelles étant jointes enſemble forment un angle ſolide en C. Il faut pour trouver les angles que ces plans font entr'eux, commencer par chercher le quatriéme triangle, qui eſt la baſe ou une ſurface de la Pyramide, lequel triangle eſt formé par les côtez de chacun des trois autres oppoſez au ſommet C, tels ſont dans cet exemple BA, AE, ED deſquelles on formera un triangle AEb', qu'on rengera enſuite de AEC ſur le même plan.

Cette préparation étant faite en façon de dévelopement, on pourra chercher les angles de tels plans qu'on voudra. Suppoſons premierement qu'on demande celui que les plans AEC, CED font entr'eux. On prendra un point G à volonté ſur le côté commun EC, par lequel on lui tirera une perpendiculaire FH, qui coupera AE en F, & ED en H. On portera la diſtance EH de E en b ſur le côté Eb', puis ayant tiré bF, on aura trois lignes bF, FG, GH, avec leſquelles on fera un triangle, prenant ſi l'on veut FG pour baſe. Du point F pour centre & de l'intervale Fb pour rayon on fera un arc vers x, & du point G pour centre & GH pour rayon on en fera un autre auſſi

Digitized by Google

vers *x*, qui coupera le précedent au point *x*, l'angle FG*x* ſera celui des plans AEC, CED.

Presentement ſi l'on veut trouver celui des plans AEC, ACB, on prendra ſur le côté commun AC un point *i* à volonté, par lequel on menera ſur AC la perpendiculaire KL. On portera la diſtance AK ſur AB, en A*k* ſur A*b*, puis on tirera *k*L. On formera un triangle avec les trois lignes K*i*, *i*L L*k*, l'angle *y i*K, ſera celui que l'on cherche.

Il eſt viſible que pour trouver le troiſiéme angle des plans AEC, AE*b*, il faut tirer ſur le côté commun AE une perpendiculaire *m o*, faire EM égal E*m*, & un triangle *nmz* avec les trois lignes *nm no*, *o*M l'angle *mnz* ſera le propoſé.

Application à la Pratique.

Quoique les panneaux triangulaires ne ſoient pas fort communs dans la Coupe des pierres, il s'en trouve cependant dans les naiſſances des enfourchemens & aux doeles des Trompes. Mais parce que les angles trop aigus ſe caſſent facilement on les émouſſe pour creuſer le ſommet du cône, dans une ſeule pierre, qui raſſemble tous les angles des panneaux de doele triangulaire, que l'on réduit par ce moyen à des trapezes, mais ce qu'on ne fait pas en œuvre, on doit le faire dans l'Epure, parce qu'on retranche du panneau triangulaire ce que l'on juge à propos à chaque côté de l'angle aigu qu'on veut ſupprimer. L'operation en eſt plus ſimple & plus facile que ſi on cherchoit d'abord un trapeze.

Soit, par exemple, [*Fig.* 309.] un vouſſoir de trompe conique, *Fig.* 309. tel qu'on le voit deſſiné avec des ombres à la figure 310. dont les panneaux de Tête T, de doele plate D, & des lits L & L ſont donnez, on demande les angles qu'ils doivent faire entr'eux, afin qu'on en puiſſe prendre les ouvertures avec la fauſſe équerre, & s'en ſervir pour abbattre la pierre qu'il faut enlever pour y appliquer les panneaux donnez.

On commencera par réduire en triangles toutes les figures des panneaux donnez, qui ſont ici très-differentes ; car celui de la doele eſt triangulaire, ceux des lits ſont des trapezes rectilignes, & celui de la tête eſt un trapezoide mixte.

Ayant arrangé de ſuite les panneaux donnez, enſorte que ceux dont on cherche les Biveaux ayent un côté commun, on les diviſera en triangles par des diagonales, comme celui de tête ABDC par les lignes AD, BC, ceux de lit aCSX, BD*sx* par les lignes aS, B*s*.

Digitized by Google

PRESENTEMENT ſuppoſons qu'on demande le Biveau de lit & de doele. On prendra ſur le côté commun CS un point G à volonté, par lequel on lui tirera la perpendiculaire FH, puis du point S pour centre & de l'intervale S a pour rayon on fera un arc aE, & du point D pour centre & de l'intervale D A pour rayon, on décrira un autre arc AE, qui coupera le précedent au point E, d'où on tirera au point S la ligne ES.

ENSUITE du même point S pour centre, & de l'intervale SF pour rayon on décrira un arc F*f*, qui coupera la ligne ES au point *f*, duquel comme centre & de l'intervale FG, on decrira un arc vers *g*, & du point H pour centre & de la longueur HG pour rayon, on en décrira un autre, qui coupera le précedent au point *g*, les lignes *g*F & *g*H formeront l'angle du Biveau demandé *f g* H.

SUPPOSONS en ſecond lieu qu'on demande le Biveau de doele CDS & de tête CABD, ayant tiré par un point N, pris à volonté ſur le côté commun CD une perpendiculaire P*u*, on operera comme nous venons de faire.

Du point D pour centre & DS pour rayon on decrira un arc SO, & par le point P un autre P*q*, enſuite du point A pour centre & la diagonale aS pour rayon on décrira un arc *u*O, qui coupera le précedent au point O, d'où l'on tirera au point D la ligne O D, qui coupera au point *q* l'arc P*q*. Si du point *q* pour centre & de la longueur PN pour rayon on fait un arc vers *y*, & que du point *n* pour centre & de l'intervale N*n* pour rayon on en faſſe un autre qui coupera le précedent au point *y*, les lignes *ny* & *q y* tirées à ce point *y* donneront l'ouverture de l'angle des plans de tête & de doele plate.

ENFIN ſi l'on demande le Biveau de tête & de lit, ayant aſſemblé ces deux ſurfaces ACDB & *x*sDB ſur le joint de tête BD dans un même plan, on lui tirera par un point *m*, pris à volonté ſur ce côté commun la perpendiculaire 1 K, puis du point B pour centre & la diagonale B*s* pour rayon on fera un arc *s e*, & du point C pour centre, & de l'intervale C S pour rayon on en décrira un autre qui coupera le précedent au point *e*, d'où l'on tirera la ligne *e* B, puis du point B pour centre & de l'intervale BK où la ligne 1K coupe la diagonale B*s* on fera un arc K*k*, qui donnera ſur B*e* le point *k*, duquel pour centre & pour rayon *m*K on décrira un arc vers *z*, & du point 1 pour centre & de l'intervale I*m* pour rayon on en tracera un autre, qui coupera le précedent au point *z*, où l'on menera les lignes I*z*, *k z*, l'angle 1 *z k* ſera le Biveau de tête & de lit qu'on avoit demandé.

PRO-

Digitized by Google

Cette page devoir commencer par la Demonstration qui a été mise à la page 378. ligne 31.

Probleme XIII.

Deux Angles rectilignes ASB, DSP *Perpendiculaires entr'eux, qui ont leur Sommet* S *commun & un côté de l'un* SP *dans le Plan de l'autre* ASB, *trouver l'Angle des deux Plans qui peuvent passer par leurs côtez* AS, DS & BS, DS.

Soit [*Fig.* 311.] le triangle ASB, dans le plan duquel est la ligne PS, section d'un autre triangle PSD, qui lui est perpendiculaire, lequel est représenté ici en racourci de perspective, parce qu'il est en l'air, sur PS ayant fait PE perpendiculaire à PS & égale à PD, & tiré SE, on fera EC perpendiculaire sur ES, qui coupera SP prolongée en C, par C on tirera FG perpendiculaire à SC, qui coupera SA prolongée en F, & SB en G. On portera la longueur CE en C*e* sur SC prolongée, & l'on tirera les lignes F*e* G*e*. L'angle F*e*G est celui que l'on cherche. *Fig.* 311.

Demonstration.

Par la construction, les triangles FC*e*, GC*e* qui sont dans le plan FSG sont égaux aux deux FCD & GCD, qui sont en l'air, dans un plan perpendiculaire au plan CDS [par la 4.e du 11.e d'Eucl.] à cause que GC est perpendiculaire aux deux CS, CD ou CE, & parce que la ligne CE est perpendiculaire à ES, c'est-à-dire, dans la représentation en l'air, CD à DS, elle l'est à la commune section des plans. Or puisque SC est perpendiculaire à FG & SD à DC elle l'est [par la 4.e du 11. d'Eucl. & la 11.e du 11.] à toutes celles qui sont dans le même plan passant au point D; par conséquent à DF & DG, [par la def. 6. du 11. d'Eucl.] donc l'angle FDG est celui des plans, ou son égal F*e*G, *ce qu'il falloit démontrer.*

Je donnerai ci-après l'usage de ce Problême.

Corollaire.

De-là on tire la maniere de trouver l'angle d'un plan incliné avec un vertical, dont on a la projection sur un côté de l'angle horisontal, & la plus grande hauteur de l'incliné, ou l'angle de son intersection avec le vertical, & le côté de l'horisontal; parce que ce cas n'est que la moitié du précedent. Je veux dire une partie, ainsi au lieu de chercher l'angle des plans FDS, GDS, on ne cherche que celui du plan GDS incliné, avec le vertical PDS, auquel cas il est visible que l'angle cherché est l'angle G*e*C.

Soit, par exemple, donnée la ligne OS pour section d'un plan incliné avec l'horison, la ligne O*b* pour section de ce plan avec un vertical OH*p*, dont la base O*p* est dans le même plan que OS; on de- *Fig.* 312.

Digitized by Google

mande l'angle de ce plan incliné avec le vertical. Du point H pris à volonté dans la ligne d'interſection OH on lui menera une perpendiculaire HC, qui coupera l'horiſontale O*p*, prolongée en C, par où on tirera ſur OC la perpendiculaire CS, qui coupera OS au point S. On portera la longueur CH en C*b*, ſur OC prolongée, & l'on tirera S*b*; l'angle S*b c* eſt celui que l'on cherche, comme il eſt évident; par ce qui vient d'être démontré de la figure précedente, en prenant le point O de cette figure pour le point S de la précedente, & le point S de celui-ci pour le point G de l'autre.

De la ſituation des Angles des Plans, à l'égard de l'Horiſon.

LEMME.

Un angle rectiligne, en ſituation quelconque, eſt égal à la ſomme, ou au ſuplément à deux droits, des angles que ſes côtez prolongez font avec une ligne horiſontale, ou une verticale.

Fig. 313. Soient [*Fig.* 313.] deux lignes AD, DK, qui ſe coupent en D, ou G*e*, *e*V, ſi l'on tire par E une horiſontale EO & une verticale VE, je dis que l'angle ADK eſt égal à la ſomme des angles AEK du côté AD prolongé & DKE.

La démonſtration ſe préſente à la ſeule inſpection de la figure, où l'on voit que l'angle ADK eſt extérieur à l'égard du triangle DKE; donc il eſt égal aux deux intérieurs oppoſez. De même que G*e*T à l'égard du triangle *e*ET.

Par la même raiſon cet angle ADK eſt égal au ſupplement à deux droits des angles que ſes côtez prolongez font avec l'horiſon EO; car l'angle ADK eſt égal à ſon oppoſé au ſommet ODE, qui eſt le ſuplément à deux droits des angles à l'horiſon E*o*D *o*ED.

Corollaire.

D'ou il ſuit que l'angle que fait un joint de tête AD, avec une doele plate *o*D eſt le ſuplément à deux droits des angles, que la doele & les joints prolongez au-delà de ſon ſommet font avec une ligne aplomb VT, & que le même angle AD*o* de doele & de joint de tête, eſt égal à la ſomme de deux angles DE*o* D*o*E, que ſes côtez prolongez font avec une ligne de niveau,

Digitized by Google

Corollaire II.

De-la il ſuit encore que l'angle d'une doele plate avec l'horiſon donne facilement l'angle de cette doele avec un *aplomb*; car il n'y a qu'à lui ajouter l'angle droit *bop*, on aura un angle obtus D*op* égal à ſon alterne *o*D V de *l'aplomb* avec la doele; parce que la verticale E V eſt parallele à *o p*. *Fig.* 314.

Et par l'inverſe ſi l'on a l'angle *o*D E de l'aplomb avec la doele, on aura l'angle *o*D *r* = D *on* de la doele avec l'horiſon en y ajoutant l'angle droit.

Remarque ſur l'Uſage.

Les angles des doeles avec les *aplombs*, ou avec les lignes de niveau, particulierement ces derniers, facilitent beaucoup les operations des Traits; parce qu'un ſeul plan horiſontal A C eſt équivalent à pluſieurs BG, DF, E*e*, qui lui ſont néceſſairement paralleles. *Fig.* 315.

Il n'en eſt pas de même des plans verticaux, qui peuvent être tournez differemment, les uns au Midi, les autres au Levant, &c. ainſi le plan horiſontal dont la ligne AC eſt le profil, ſert pour régler l'inclinaiſon des joints de tête & des doeles comme ſes paralleles BG, DF, & y rapporter leurs parties par des *aplomb*, comme LF en *l*C, K G en *d*C, &c. Elle ſert auſſi à y tranſporter les angles des doeles des differens vouſſoirs avec l'horiſon, comme EDF, DBG en faitant *e d* parallele à ED & *d*B parallele à DB; mais à cauſe que les plans verticaux *b*C, E L, &c. peuvent avoir des directions variables, nous en faiſons moins d'uſage que des horiſontaux, comme on le verra par les pratiques ſuivantes.

Application des Propoſitions précedentes à la Conſtruction des Voûtes, pour trouver les Biveaux des Surfaces des Vouſſoirs ſuppoſées Planes, comme de la Doele plate avec ſes Lits, ou de la même Doele avec ſes Têtes.

Le moyen le plus ſimple de trouver les angles d'inclinaiſon des plans inclinez entr'eux, eſt de les conſiderer comme coupans un plan horiſontal ou un plan vertical, vrai ou ſuppoſé; parce que dans les ouvrages d'Architecture on n'a point de régle de conduite plus ſûre que celle du *plomb*, qui donne la poſition verticale, & celle du *niveau*, qui donne l'horiſontale; or nous avons démontré au Theoréme précedent qu'un angle en ſituation quelconque étoit égal à la ſomme de ceux que ſes côtez forment avec une ligne horiſontale, ou une ver-

ticale ou à leur ſupplement à deux Droits, lorſque les deux côtez étoient prolongez par le ſommet; donc par le moyen de la prolongation des côtez on peut parvenir à la connoiſſance des angles des plans des vouſſoirs, & les placer dans leur ſituation naturelle à l'égard de l'horiſon; en voici des exemples, qui fourniſſent une methode generale pour les biveau de doele & de lit, & de doele & de tête.

Fig. 317. PREMIEREMENT, ſi une voûte eſt conique, comme une Trompe droite, dont l'axe eſt de niveau, il eſt viſible que ſon plan BSA peut être pris pour un horiſontal, dans lequel il y a un point S, qui eſt le ſommet du cône, où toutes les ſurfaces de la Trompe; tant doeles que lits, doivent paſſer.

SECONDEMENT, que ſi la faſe B*b*A eſt circulaire, tous les plans des lits qui paſſent par les joints de tête 51, 62, ſe coupent auſſi au point C, de même qu'au point S; ainſi leur interſection commune eſt dans l'axe, qui eſt l'horiſontale CS.

TROISIE'MEMENT, que ſi la corde de la doele 21 eſt prolongée juſqu'à la rencontre de l'horiſontale BA en O, la doele plate qui paſſera par cette corde & par le point S coupera le plan horiſontal ſuivant une ligne SO.

COMME il peut arriver que la corde 21 étant peu inclinée à l'horiſonthale BA donneroit un point O hors du plan du deſſein, ce qui ſeroit incommode. Telle ſeroit, par exemple, 2'*k* plus encore *b*2, ſi le vouſſoir étoit étroit près de la clef, on peut, pour plus de commodité, au lieu de la ſection horiſontale, chercher celle qui ſe feroit avec un plan vertical C*b* ſans rien changer au fond de la conſtruction; puiſque au lieu de l'angle 2*n*C on auroit ſeulement ſon complement 2*z*C.

ENFIN ſi la corde de la doele devient horiſontale, comme celle de la clef 23, puiſqu'elle doit paſſer comme toutes les autres par le ſommet S, il eſt clair qu'en tirant par ce point S une ligne *fe* parallele à BA, on aura la ſection de cette doele avec l'horiſon.

J'AY dit que l'axe étoit la ſection commune de tous les lits avec l'horiſon, j'entends lorſque le cintre eſt circulaire; mais s'il étoit Elliptique & les joints de tête 86, 97 perpendiculaires à cette courbe 67E, leurs ſections ne ſeroient plus réunies; parce que les joints de tête prolongez couperoient l'horiſontale BA aux points *z z*, & comme les lits paſſeroient cependant encore par le point S les ſections de lits avec l'horiſon ſeroient les lignes *z* S, *z*.

Digitized by Google

Présentement ſi l'on cherche les ſections des doeles plates d'un berceau avec l'horiſon, il eſt viſible que ſi ce berceau eſt Droit ſur ſa face, ce ſeront des perpendiculaires menées à la ligne de face, comme [*Fig.* 316.] la ligne OQ ſur OC ; mais ſi les berceaux ſont biais, la ſection de chaque doele avec l'horiſon ſera parallele au Piedroit, telle eſt OE à l'égard du Piedroit AB. *Fig.* 316. *Fig.* 262.

Quant au ſections des lits avec l'horiſon, il en ſera comme des coniques, ſi le cintre eſt circulaire elles ſe réüniront à l'axe C*c*, & ſi le cintre eſt Elliptique, ce ſeront des paralleles à l'axe, comme *x y*, provenant du joint L ς prolongé en *x* pour l'arc Elliptique *b* ς I.

A l'égard des doeles plates des cleſs, il eſt viſible qu'elles ne peuvent couper l'horiſon; puiſqu'elles lui ſont paralleles.

Plan. 26.

Il nous reſte à trouver les ſections des doeles plates des Berceaux en deſcente avec l'horiſon, on peut le faire de deux manieres. *Fig.* 318.

Premierement par le profil. Soit, par exemple, le plan horiſontal de la deſcente, ou ſeulement ſa moitié ACDB, ſon profil CHKR, ſur lequel le point F marque la hauteur du joint 1 de la doele plate 12. Ayant tiré FE, qui coupera l'horiſontale OC prolongée en *x*, on portera la diſtance C*x* ſur la projection horiſontale de ce joint PI, de P en S, & l'on menera par le point O la ligne O S, qui eſt la ſection de cette doele plate avec l'horiſon.

Secondement, on peut faire une ſuppoſition, que le berceau, au lieu d'être incliné, ſoit horiſontal, que la ligne R C*q* eſt une horiſontale, à l'égard de laquelle la face HC eſt inclinée en ſurplomb. Alors il ne s'agit que de changer le cintre, par exemple, le circulaire, dont le rayon eſt CH, en un Elliptique ſurbaiſſé H*vu*T, dont le petit demi axe eſt *q*H & le grand axe le double de CH, ce qui eſt aſſez clair après ce que nous avons dit des ſections des cylindres, mais que nous expliquerons plus au long dans le quatriéme Livre, où nous parlerons des Deſcentes. Voici la pratique pour tous les cas.

PROBLEME XIV.

Fig. 319. ***Trouver les Biveaux de toutes ſortes de Voûtes ſans former le Cintre de l'Arc-Droit.***

Premierement ceux de Lit & de Doele.

La projection Horiſontale du joint de Lit & l'Elevation de la Face étant donnée.

Premier Cas pour les Voûtes en Berceau de niveau.

Soit le parallelograme ABED, le plan horiſontal d'un berceau biais, dont le cintre de face eſt le demi cercle AHB, & la ligne PN la projection du joint de lit paſſant par le point 2 de ce cintre; on cherche l'angle des plans de la doele plate, qui paſſe par la corde 12, & par le joint de tête 26.

On prolongera la corde 21 juſqu'à ce qu'elle rencontre l'horiſontale AD au point O, par où on menera OS parallele à PN, ou ce qui eſt la même choſe à l'axe CM, enſuite par le point P, projection du point 2, on élevera ſur PN la perpendiculaire PR, qui coupera OS en R, & on la prolongera vers Q juſqu'à ce qu'elle coupe l'axe MC prolongé en Q. On prolongera auſſi NP pour porter la hauteur de la retombée P2 en P 2^x. on tirera du point R la ligne R 2^x, & du point Q la ligne Q 2^x q, l'angle R 2^x q ſera celui du biveau que l'on cherche.

Second Cas pour les Berceaux en deſcente.

Fig. 318. Nous avons dit qu'on peut les conſiderer comme de niveau, ſuppoſant la ligne qR horiſontale, au lieu de la ligne ON; cependant on peut encore les conſiderer comme inclinez à l'horiſon.

Soit le parallelograme ACDB la moitié du plan horiſontal d'une deſcente droite, dont CHKR eſt le profil, A12H la moitié de l'élevation, Pl la projection horiſontale du joint de lit, qui paſſe par le joint de tête 2·6 & fL la projection verticale, ou ſon profil, qui coupe l'horiſontale ON au point x. On portera la diſtance Cx ſur la projection du joint de lit de P en S, puis ayant prolongé la corde de l'arc de tête 2· 1 juſqu'à ce qu'elle rencontre, au point O, l'horiſontale CA prolongée. On tirera par le point S l'indéfinie SOY, qui ſera la ſection du plan de la doele plate 2· 1 prolongée, & du plan de l'horiſon paſſant par la naiſſance du cintre de face en AC.

Digitized by Google

Ensuite on portera la hauteur de la retombée P2 en Pg^2, d'où l'on tirera au point S la ligne gS, à laquelle on fera la perpendiculaire gQ qui coupera SP prolongée en Q. Sur la même SP prolongée, & par ce point Q on fera une perpendiculaire Yy, qui coupera SO en Y, & l'axe DC en y. On portera la longueur Qg de Q en G par où on tirera les lignes YG & yGI, l'angle YGI eſt celui du biveau que l'on cherche.

Secondement pour les Voûtes Coniques.

La conſtruction ſera tout-à-fait la même que la précedente.

Soit le triangle ASB le plan horiſontal d'une Trompe dont le cintre de face eſt l'arc AbB, & la ligne PS la projection horiſontale du joint de lit paſſant par le point 2 & l'axe CS. On prolongera la corde 21 du 2.e vouſſoir juſqu'à ce qu'elle rencontre l'horiſontale BA prolongée en O, & l'on tirera OS, qui ſera la ſection de la doele plate prolongée, avec le plan horiſontal qui paſſera par AB, & le ſommet S de la Trompe qu'on ſuppoſe dans le même. *Fig.* 320.

On élevera enſuite au point P projection du point 2 la perpendiculaire PX égale à P2, ſur la ligne PS; & ayant tiré XS, on ſera au point X la perpendiculaire XQ ſur XS, qui coupera SP prolongée en Q, & par ce point Q ayant fait ſur la même SQ la perpendiculaire oR qui coupera SO en o, & l'axe SC en R, on portera la longueur QX en Qx, & des points o & R on tirera ox & RxV, l'angle oxV ſera celui du biveau que l'on cherche, qui eſt celui du plan de la doele plate paſſant par 2'1 du ſecond vouſſoir, avec celui du ſecond lit paſſant par le joint de tête 2'5 de l'élevation.

Si cette voûte conique étoit en deſcente par ſon axe on trouveroit comme aux Berceaux en deſcente un autre point S, par le moyen du profil, qui ne ſeroit pas alors le ſommet du cône.

Application aux Voûtes Sphériques & Sphéroides.

Suivant ce que nous avons dit en parlant du dévelopement, on peut réduire les ſphères & les ſphéroides en pluſieurs zones de cônes tronquez, inſcrits dans celles de la ſphère, d'où il ſuit que l'on peut trouver les biveaux de ces parties coniques de la même maniere que pour les cônes entiers, les réduiſant par les doeles plates en Pyramides tronquées; & par conſéquent que cette methode convient auſſi bien aux voûtes ſphériques & ſphéroides qu'aux trompes & autres voûtes coniques.

Troiſiémement, pour les Angles Saillans ou Rentrans faits par la rencontre de deux Berceaux.

Premier Cas des doeles plates égales ou inégales, qui ont leurs naiſſances de niveau entr'elles, & ſe coupent en arête ſaillante, ou en angle rentrant comme aux arcs de Cloitre.

Fig. 321. Soit l'arc EAB*b* le cintre de l'arête d'enfourchement, & la ligne EC ſa projection horiſontale. Soit AB la corde de l'arête des ſeconds vouſſoirs, dont *m*M ou ſon égale a*b* eſt la projection, & les lignes aD & a*d* celles de la ſection du plan horiſontal, qu'on ſuppoſe paſſer par le point A comme au profil AG, leſquelles font l'angle horiſontal Da*d* parallele à celui des murs de piedroits de la voûte; il eſt clair que cet angle peut être pris pour la baſe d'une Pyramide tout-à-fait ſemblable à celles des exemples précedens, puiſqu'elle eſt formée par les plans de doeles & de lit; par conſéquent on peut en trouver les angles de la même maniere; & comme l'application en eſt ſi facile qu'on peut la faire de ſoi-même, je vais, pour un peu de varieté donner une autre conſtruction, qui eſt cependant la même renverſée.

Par le point B ſommet de l'arête on tirera l'horiſontale PBO parallele à EC, ſur laquelle par le point A on menera la perpendiculaire AP, qui coupera HO en P, par où on tirera ſur la corde AB la perpendiculaire PQ, dont on portera la longueur du point *b* de la projection a*b* de la corde AB en *q*, pour tirer de ce point en D & *d* les lignes *q*D, *q d* qui comprendront l'angle D*q d* du biveau que l'on cherche.

S'il s'étoit agi des premiers vouſſoirs, dont la corde de l'arête eſt la ligne EA, on auroit mené par le point A la ligne *b*G, puis par le point E la perpendiculaire E*p*, & par le point *p* la ligne *p x* perpendiculaire ſur EA, laquelle differe peu en longueur de la ligne *p*A; ce qui fait voir que l'angle *mxm* differe peu à la naiſſance de l'angle *m e m*.

On peut prendre ſur *b*G tout autre point que *p* ſi l'on veut, par exemple *b*, alors il faudroit abaiſſer la perpendiculaire *b i* ſur a*e* prolongée, & mener par le point *i* des paralleles *i*A, *i*K aux lignes aD, a*d*, qui couperont la perpendiculaire *m m* prolongée aux points A, & K; puis on portera *b*F, qui eſt la perpendiculaire ſur la corde EA de a en *y*, l'angle K*y*A ſera celui que l'on cherche.

Pour montrer que cette conſtruction revient à la même fin que les précedentes par la methode génerale, dont elle n'eſt qu'une modification,

Digitized by Google

tion, j'en ai mis la figure au deſſous, répetant les projections du même profil EAB*b*; ſçavoir *n*N = a*b*, l'angle V *n u* = D*ad*. On élevera au point N la perpendiculaire NS égale à la hauteur BG de la retombée du profil; on menera *n*S, & ST perpendiculaire à *n*S, qui coupera *n x* au point T, par où on menera la perpendiculaire *u*V, qui coupera les ſections de la doele avec l'horiſon aux points *u*, V. On portera la longueur TS en TY ou T*y* du point Y ou *y*, on tirera les lignes Y*u*, YV ou *yu*, *y*V, l'angle *u*YV ou *uy*V eſt celui du biveau que l'on cherche, par le Problême précedent.

Quatriémement, pour les angles ſaillans ou rentrans formez par des doeles plates, dont les naiſſances ne ſont pas de niveau, mais l'une de niveau & l'autre rampante, tel eſt l'enfourchement d'un berceau de deſcente qui en rencontre un autre de niveau.

Pour réſoudre ce cas il faut chercher la ſection de la doele rampante avec le plan horiſontal, qui paſſe par la naiſſance horiſontale de l'autre.

Soit [*Fig.* 323.] le parallelograme ACDB la projection horiſontale de deux portions de doeles plates ACD, ADB, qui ſe coupent ſuivant une ligne AD, enſorte cependant que la naiſſance de l'une AC eſt de niveau, & la naiſſance AB de l'autre en deſcente ſuivant un angle donné BAG. *Fig.* 323.

On élevera ſur la projection de l'arête AD la perpendiculaire DH égale à la hauteur de la retombée, qu'on ſuppoſe connuë par le profil de cette arête, & l'on tirera AH, qui repréſentera l'inclinaiſon de l'arête. Sur CD prolongée on portera la même hauteur DH en DN; du même point D on menera une perpendiculaire ſur AB prolongée, qui la coupera en F, & le profil de deſcente AG en G. On portera FG ſur FA en F*g*; enſuite par les points trouvez *g* & N, ont tirera la droite *g*N qui coupera DG au point *z*, la ligne menée du point A par *z* ſera la ſection de la doele en deſcente avec l'horiſon, qui paſſe par les points A & C : il ne s'agit plus préſentement que de conſtruire le Probléme comme à l'ordinaire.

On peut encore trouver cette ſection d'une autre maniere en portant la hauteur de la retombée DH perpendiculairement ſur CD en D*b*, & faiſant l'angle D*by* égal au complément de celui de la deſcente BAG, ou ce qui eſt la même choſe tirant *by* parallele à AG juſqu'à ce qu'elle rencontre CD prolongée en *y*; la ligne A*y* ſera la méme ſection de la doele en deſcente avec l'horiſon qui paſſe par la naiſſance de celle de niveau; ainſi on pourra conſtruire le Problême comme les précedens.

Digitized by Google

On fera HE perpendiculaire ſur AH qui coupera AD prolongée en E, par où on tirera la perpendiculaire KL, qui coupera les ſections de l'horiſon AC, Az, prolongées en K & en x. On portera la longueur EH en EI ſur AD prolongée, on tirera les lignes KI & Lx, l'angle KIx eſt celui du biveau que l'on cherche.

DEMONSTRATION.

Toutes ces conſtructions ſe raportent ſi facilement au Probléme précedant qu'il n'eſt pas néceſſaire de les démontrer. Cette derniere ſeulement demande quelque explication. Si l'on ſuppoſe la ligne AG dans un plan vertical ſous AF, il eſt clair que le point G tombera ſous le point F. Si l'on ſuppoſe auſſi DH, ou ſon égale DN élevée verticalement ſur l'horiſontal ADF, le point N tombera ſur le point D au deſſus de l'horiſon. Il eſt donc viſible que ſi de ce point N on tire une ligne au point *g* poſé à angle Droit avec la ligne horiſontale DF, & à diſtance du point F égale à FG, on aura ſur le plan horiſontal l'expreſſion des deux triangles ſemblables DN*z* au deſſus de l'horiſon & F*g z* au deſſous, qui les diviſe en *z*. Donc la ligne A*z* eſt la ſection de l'horiſon; car ſi on les fait mouvoir ſur FD comme ſur une charniere juſqu'à ce qu'elles ſoient en ſituation verticale, la ligne N*g* exprimera la pante du plan ADB, laquelle ſe plonge ſous l'horiſon, qui paſſe par AC au point *z*, *ce qu'il falloit trouver*.

La démonſtration de la ſeconde maniere eſt encore plus ſimple; car puiſque *bi* eſt parallele à AG [par la conſtruction] les triangles rectangles AFG, *yb*D ſont ſemblables, & à cauſe des paralleles AF, D*y* ſemblablement poſées à l'égard du plan incliné ADB, quoique tournez en ſens contraire, on aura FG : D*b* : : AF : D*y*, c'eſt-à-dire, que l'abaiſſement ſous l'horiſon eſt à la hauteur au deſſus, comme le commencement de la deſcente au deſſous eſt au commencement de la montée au deſſus, ce qu'exprime la ligne tirée d'un point A de l'horiſon à l'autre *y*, *qu'il falloit trouver*.

NB. *Cette Démonſtration doit être immédiatement avant le Problème* XIII. pag. 377.

DEMONSTRATION.

Il ſemble qu'il y a quelque difference dans les conſtructions que nous venons de propoſer aux figures 308. & 309. mais ſi l'on y fait bien attention on verra qu'elle n'eſt qu'apparente; ainſi la démonſtration de l'une ſert pour l'autre.

Fig. 308. Si l'on imagine [*Fig.* 308.] que le triangle ACE reſtant immobile les deux autres ABC, ECD ſe meuvent au tour de leurs côtez AC & CE, comme ſur des charnieres juſqu'à ce que les points B & D ſe réuniſſent, enſorte que les lignes CB & CD ſe confondent en une, il ſe for-

Digitized by Google

mera de ces trois triangles ou plans un angle ſolide en C, & une pyramide triangulaire fermée par un quatriéme triangle, égal à celui qu'on a marqué en AE b^4, qui a ſes trois côtez égaux à un chacun des autres triangles, avec leſquels il forme la pyramide. Or il eſt clair que par le mouvement du plan CDE ſur le côté CE la ligne droite FH ſe plie en G ſans changer de ſituation à l'égard de CE, juſqu'à ce que le plan ACB rencontre celui où elle eſt, lorſqu'ils ſe réuniſſent ſur le côté CD, alors le point H tombera ſur le côté Eb^4, où les points B & D ſe réuniſſent en b_4, & le point H en b; c'eſt pourquoi on a fait la longueur Eb égale à EH; ainſi ſuppoſant un plan qui coupe la pyramide perpendiculairement au côté CE par le point G, il coupera le triangle E Ab^4 par la ligne bF, qui eſt la ſoutendante de l'angle des plans AEC, DEC repréſentée par la ligne Fx ſon égale; donc l'angle FGx eſt bien trouvé par cette conſtruction, *ce qu'il falloit démontrer.*

Presentement ſi on examine la conſtruction qui donne les Biveaux d'un vouſſoir de Trompe à la fig. 309. on reconnoitra qu'elle eſt dans le fond parfaitement la même que la précedente, quoique avec quelque petit changement; car on y a trois triangles donnez en dévelopement ſur un plan; ſçavoir aCS portion d'un panneau de lit; DCS panneau de doele plate entiere, & DCA portion du panneau de tête, leſquelles trois ſurfaces doivent dans l'exécution former un angle ſolide en C; par conſequent il faut les plier de maniere que l'intervale ACa, que laiſſe le dévelopement, ſoit ſupprimé joignant le point A au point a, enſorte que les deux lignes CA Ca ſe confondent en une, ce qu'on ne peut faire qu'en faiſant mouvoir les triangles DCA & SCa ſur les côtez CD & CS, le panneau de doele SCD reſtant immobile; c'eſt pourquoi des points D & S pour centre on a fait mouvoir les lignes DA & Sa, leſquelles ſe rencontrant en E, prennent la ſituation des côtez d'un quatriéme triangle SED, qui ferme la pyramide formée par les trois ſurfaces données; mais dans les differentes circonſtances on change la ſituation de ce triangle à l'égard des ſurfaces données. Pour les Biveaux de doele & de lit, on le met dans la ſituation SED; pour ceux de tête & de doele, à la ſituation DOA; & pour les biveaux de tête & de lit à la ſituatinn CeB, où il faut remarquer qu'il a toujours un côté commun avec une de ces ſurfaces dont on cherche l'angle qu'elle fait avec ſa contiguë.

Remarque ſur l'Uſage.

On ſçait qu'il n'y a pas de maniere plus generale & plus ſimple pour trouver les angles plans des figures rectilignes, que de les

diviſer en triangles, qui ſont les premiers élemens des ſurfaces, puiſqu'on ne peut enfermer un eſpace à moins de trois lignes. Par une ſemblable raiſon il n'y a pas de maniere plus generale pour connoître les angles ſolides que font les angles plans dans des ſurfaces qui ſe rencontrent, que de réduire les Corps en Pyramides triangulaires; car les Tetraedres réguliers ou irréguliers ſont leur derniere réduction, ou ſi l'on veut leurs premiers élemens; puiſqu'on ne peut enfermer une eſpace de corps à moins de quatre ſurfaces triangulaires. Et que toute Pyramide de baſe Polygone d'un nombre de côtez au deſſus du triangle, pourra en contenir autant de triangulaires que ſa baſe contiendra de triangles; ainſi on peut dire que ce Problême eſt general pour trouver les angles des plans de tous les corps imaginables compris par des ſurfaces planes, comme on le verra par les applications que nous en ferons aux Traits des Voûtes dans le quatriéme Livre.

A l'égard des angles ſolides formez par des ſurfaces courbes, qui ſont entr'elles des angles curvilignes ou mixtes, qu'on ne peut meſurer immediatément, mais ſeulement par les cordes de leurs arcs, il eſt clair que la même methode doit encore avoir lieu; puiſqu'on peut faire paſſer des ſurfaces planes par ces cordes & inſcrire ou circonſcrire des Pyramides de ſurfaces planes triangulaires à des Pyramides triangulaires de ſurfaces courbes ou mixtes. C'eſt même une néceſſité; car puiſque nous ne parvenons à la connoiſſance des lignes courbes que par le ſecours des droites, nous ne parvenons auſſi à la formation des ſurfaces courbes que par la médiation des planes.

FIN DU PREMIER TOME.

Digitized by Google

EXPLICATION
DES TERMES
Les plus uſitez pour la Coupe des Pierres,
Rangez par ordre Alphabetique.

A.

Abatuë, c'eſt la diſtance horiſontale de la naiſſance d'un arc à la perpendiculaire, qui tombe d'une diviſion de cet arc ou de ſon extrémité ſupérieure ſur ſon diametre horiſontal. Ce terme n'eſt plus guerès en uſage; on ſe ſert de celui de *Retombée*. Voyez Retombée.

Amaigrir. Voyez Démaigrir.

Annulaires, j'appelle ainſi les voûtes dont la figure imite les anneaux en tout ou en partie, telles ſont les voûtes *ſur le noyau*. Voyez Noyau.

Anſe de Panier. Voyez Berceau & Ceintre.

Apareilleur, c'eſt le conducteur d'un bâtiment qui préſide à l'apareil, c'eſt-à-dire, aux meſures, à l'arrangement & à l'aſſortiment des pierres, qui les trace de la grandeur & figure dont elles doivent être, pour diriger les Tailleurs de pierre qui les taillent; c'eſt pourquoi il doit ſçavoir la Coupe des pierres, pour exécuter les deſſeins des Architectes dans les Bâtimens Civils, & des Ingenieurs dans les Fortifications.

Arc eſt une portion de ligne courbe à laquelle on donne differens noms ſuivant la figure & ſes uſages.

Arc-Droit eſt celui dont la corde eſt perpendiculaire au joint de lit d'une voûte, lorſque ce joint eſt droit; ou à ſa tangente au point de rencontre, lorſqu'il eſt courbe; c'eſt ainſi que l'entend le P. Deran,

qui confond l'Arc-Droit avec le Biveau ; mais pour mieux expliquer ce mot :

L'Arc-Droit proprement dit eſt la ſection d'une voûte perpendiculairement à ſon axe & à ſes côtez, ou aux tangentes à ſes côtez.

D'où il ſuit 1.° qu'il n'y a point d'Arc-Droit proprement dit aux voûtes coniques, parce qu'un plan ne peut être perpendiculaire à leurs axes & à leurs côtez qui ſont convergens.

2.° Qu'il y a des Arcs-Droits aux voûtes ſphériques, parce que leurs tangentes ſont paralleles à leurs diametres.

3.° Qu'il y a auſſi des Arcs-Droits dans les Annulaires & dans les Vis où les tangentes ſont perpendiculaires à leurs diametres; parce que la tangente du côté eſt parallele à celle de leur axe courbe dans la ſection perpendiculaire à cette tangente.

Arc Rampant, c'eſt une ligne courbe dont les deux extrémitez priſes aux appuis de leurs naiſſances, qu'on appelle *impoſtes*, ne ſont pas de niveau, & dont les diametres conjuguez ne ſont pas à l'équerre, c'eſt-à-dire, dont l'aplomb de la clef eſt oblique à la ligne de rampe des impoſtes, telles ſont les arcades qu'on fait ſous les rampes des eſcaliers & des Terraſſes en deſcente, ce qui fait que ces ſortes d'arcs ne peuvent jamais être d'une ſeule portion de cercle, mais de quelqu'autre ſection conique ou de ſpirale.

Arc de Cloître, on appelle ainſi une voûte compoſée de deux, trois, quatre ou pluſieurs portions de berceaux, qui ſe rencontrent en angle rentrant dans leur concavité, enſorte que leurs côtez forment le contour de la voûte en polygone. Tels ſont, par exemple, les petites voûtes ou chapitaux des Guerites à Pans. Si les berceaux cylindriques ſe rencontroient au contraire en angle rentrant ſur leur convexité, ou ce qui eſt la même choſe, en angle ſaillant ſur la concavité, la voûte changeroit de nom, elle s'appelleroit *Voûte d'Arête.*

Arc-Doubleau eſt un arcade en ſaillie ſur la doele d'une voûte qu'elle traverſe à angle Droit, de ſorte qu'elle lui fait en cet endroit une eſpece de *doublure*, ſoit pour la renforcer, ſoit pour cacher quelqu'arête de rencontre, comme aux voûtes Gotiques, ou pour faire une liaiſon d'un pilaſtre ou d'une Perche à ſon oppoſée.

Lorſque ces arcs ne ſont pas perpendiculaires à la direction de la voûte, mais en diagonale, on les appelle *Ogives* ou *Aregives*; on n'en voit de cette eſpece que dans l'Architecture Gotique.

Arcade eſt une voûte de peu de profondeur en portion de berceau.

Digitized by Google

Arche eſt à-peu-près la même choſe ; mais ce terme ſemble conſacré ſeulement aux ponts.

Arceau eſt une petite arche ſur un ruiſſeau.

Architecture, dans le mauvais jargon des Ouvriers, qui a paſſé depuis peu aux Architectes, ſignifie ſouvent une Moulure. Ainſi on lit dans le devis imprimez pour la conſtruction des Bâtimens Civils du Roy à Paris *une Corniche avec ſes Architectures*, pour dire avec ſes Moulures.

Arête, c'eſt l'angle ſaillant que font deux ſurfaces droites ou courbes d'une pierre quelconque ; lorſque les ſurfaces concaves d'une voûte ſe rencontrent en angle ſaillant, on l'appelle *Voûte d'Arête.*

Arriere-Vouſſure, c'eſt une ſorte de petite voûte, dont le nom exprime la poſition ; parce qu'elle ne ſe met que derriere l'ouverture d'une baye de porte ou de fenêtre, dans l'épaiſſeur du mur, au dedans de la feüillure du tableau des piedroits. Son uſage eſt de former une fermeture en Platebande, ou en plein ceintre ou ſeulement bombée.

Celles qui ſont en platebande à la feüillure du Linteau & en demi cercle par derriere s'appellent *Arriere vouſſure de S. Antoine.*

Celles au contraire qui ſont en plein ceintre à la feüillure & en platebande par derriere, s'appellent *Arriere vouſſure de Montpelier.*

Lorſque dans la premiere eſpece l'arc intérieur eſt beaucoup moindre que le demi cercle, l'arriere vouſſure s'appelle *Réglée* & *Bombée.*

Dans le même cas pour la ſeconde eſpece il n'y a pas de nom particulier, on peut l'appeller *Bombée en avant* & *réglée en arriere*, par l'inverſe de la précedente.

Lorſque l'arriere vouſſure eſt en plein ceintre ſur le devant & ſeulement bombée en arriere, on l'appelle *Arriere vouſſure de Marſeille.*

B.

Balevre du Latin *Bis labra*, qui a deux levres, eſt l'excedent d'une arête ſur celle de la pierre contigue, c'eſt auſſi l'éclat d'une arête qui s'eſt caſſée, lorſque les joints ſont trop ſerrez.

Bandeau, ornement tout uni en ſaillie, comme une bande plate ſur le nud d'un mur, autour d'une baye de porte ou de fenêtre. Si ce Bandeau eſt orné de moulures il s'appelle *Chambranle.*

Bander une arcade ou une platebande, c'eſt arranger les vouſſoirs ou les claveaux ſur leurs ceintres & les ſerrer par des coins.

Berceau par analogie au couvert qu'on a coutume de mettre ſur les berceaux des enfans, eſt une voûte cylindrique quelconque dont la courbure peut être de differente eſpece ; lorſqu'elle eſt circulaire enſorte que ſon contour ſoit un demi cercle complet on l'appelle *Plein ceintre.*

Si, ſuppoſant la largeur égale, la hauteur eſt moindre on l'appelle *en Auſe de panier* ou *ſurbaiſſé.*

Si la hauteur excede le demi cercle, on l'appelle *Surbauſſé* ou *Surmonté.*

Si ſes naiſſances ne ſont pas de niveau il s'appelle *Rampant.*

Un Berceau à l'égard de la direction de ſes faces s'appelle *Droit*, lorſque la face eſt perpendiculaire à la direction, & *Biais* lorſqu'elle eſt oblique.

Beveau ou *Beuveau* ou *Buveau*, ce dernier eſt le terme du P. Deran, les Ouvriers qui diſent Biviau ou *Biveau* conſervent mieux l'étimologie du mot *Biviun*, chemin fourchu. En effet c'eſt le modele de l'ouverture d'un angle quelconque rectiligne, curviligne ou le plus ſouvent mixte, pour former l'angle d'inclinaiſon de deux ſurfaces qui ſe rencontrent; lorſqu'elles ſont planes, on ſe ſert pour Biveau d'une Sauterelle ou d'une fauſſe équerre à branches mobiles, lorſqu'une des deux ſurfaces eſt courbe ou toutes les deux, le Biveau eſt un inſtrument de bois fait exprès, en forme d'équerre ſtable, je veux dire, dont les branches ne s'ouvrent ni ſe ferment.

Nous avons dit ci-devant que le P. Deran confond ſouvent le *Biveau* avec l'*Arc-Droit.*

Biais, c'eſt l'obliquité d'une face à l'égard de la direction d'une voûte ou d'un jambage à l'égard d'un paſſage.

Biais paſſé, on appelle ainſi une voûte en berceau biaiſe par devant & par derriere, dont les joints de lit ne ſont pas paralleles aux côtez du paſſage, comme dans les voûtes ordinaires biaiſes, mais dont la direction tend à des diviſions de vouſſoirs inégaux, en ſituation inverſe du devant au derriere, c'eſt-à-dire, de l'entrée à la ſortie, de ſorte que les joints de lit à la doele ne doivent pas être droits, comme les font les Auteurs de la coupe des pierres.

Bombé ou *Bombement* ſe dit d'un arc peu élevé au deſſus de ſa corde ou du moins beaucoup moindre que le demi cercle.

Lorſqu'au lieu de s'élever l'arc s'abaiſſe au deſſous de ſa corde, on l'appelle *bombé en contre-bas*, comme il arrive au platebandes mal faites.

Borgnoyer ou *borgneier*, c'eſt regarder avec un œil en fermant l'autre ; comme

comme ſi l'on étoit borgne, pour mieux diſtinguer les défauts d'alignement ou la difference de direction des côtez d'une pierre, & voir ſi une ſurface eſt plane, ou de combien elle eſt Gauche.

Branches d'Ogives, ce ſont les arcs des Nervures des voûtes Gotiques, qui font ſaillie ſur le nœud de ces voûtes dans l'intervale des croiſées entre les pilliers.

Branches de vouſſoir. Voyez Enfourchement.

Branches de biveau ou de ſauterelle ſont les côtez des inſtrumens, le P. Deran les appelle les *doigts*, Daviler, *les bras*.

Bras de biveau. Voyez Doigt.

Buter, c'eſt appuyer les *Reins* d'une voûte par quelque contrefort ou arc-boutant.

C.

Calibre, dans la coupe des bois ſignifie un modele fait de planche, contournée ſuivant une ligne courbe qui doit déterminer le contour d'une ſurface qu'on ſe propoſe de faire. Dans les ouvrages de plâtre c'eſt un profil de corniche, fait avec une planche de cuivre ou de bois pour diriger les moulures en le trainant en ligne droite perpendiculairement à la direction de la Corniche, cet inſtrument eſt une eſpece de Cerche.

Calotte eſt une portion de voûte ſphérique ou ſphéroide qu'on fait au milieu des voûtes & platfonds pour les élever en cet endroit.

Canoniere eſt un vieux mot qui ſignifioit ce que nous appellons aujourd'hui *embraſure* à mettre du canon c'eſt une voûte conique. Voyez voûte en canoniere.

Carton, feüille de carton contournée ſuivant un profil, qui peut être ſur une autre matiere, comme du fer-blanc ſans changer de nom.

Ceintre ou *Cintre*, l'un & l'autre eſt uſité & vient de la même étimologie *cinctus*, de *cingere* environner, & ou de *ceindre* & ceinture. Ce mot a deux ſignifications, l'une pour la Charpente, l'autre pour le contour de la voûte qui a été formée ſur la charpente. Dans la charpenterie il ſignifie ces aſſemblages de pieces de bois qui ſoutiennent les aix & doſſes ſur leſquels on conſtruit une voûte avec des briques ou du moilon ou des pierres de taille, juſqu'à ce qu'étant fermée elle puiſſe ſe ſoutenir ſans ce ſecours.

Si le plancher qui ſert de forme à la voûte eſt plat la Charpenterie qui ſe ſoutient ne s'appelle plus cintre, mais *Etayement*.

Dans le langage de la coupe des pierres, il ſignifie le contour arondi de la partie intérieure d'une voûte pris en un endroit déterminé, ou perpendiculairement à ſa direction, alors il s'appelle *l'arc-droit*, ou obliquement à l'aréte d'une face biaiſe, alors il s'appelle *cintre de face* ou *arc de face.*

Celui de ces deux cintres qu'on a le premier en vûë pour tracer la voûte s'appelle *Cintre primitif.*

Celui qui réſulte de cette premiere déterminaiſon s'appelle *Cintre ſecondaire.*

Par la nature des ſections cylindriques dans les voûtes biaiſes, ces deux cintres ſont de méme hauteur, mais d'inégale largeur & contour, ſi l'un eſt circulaire l'autre eſt Elliptique, & ſi l'un & l'autre ſont Elliptiques l'un eſt plus allongé que l'autre, & leurs diviſions en vouſſoirs ſont proportionelles, celles du ſecondaire ſont aſſujeties à celles du primitif.

Les cintres conſiderez dans la figure de leur contour ont auſſi differens noms, celui qui eſt en demi cercle complet s'appelle *plein cintre.* Celui qui étant ſuppoſé de largeur égale ne s'éleve pas à même hauteur que le demi cercle s'appelle *en anſe de panier* ou *ſurbaiſſé.* Celui qui dans la même ſuppoſition s'éleve au deſſus du demi cercle s'appelle *ſurhauſſé* ou *ſurmonté.*

Celui qui eſt d'un arc de cercle beaucoup moindre que ſa moitié, comme du quart ou du ſixiéme s'appelle *bombé.*

cerche

Cerce ou *Cherche*, l'un & l'autre eſt uſité, quelques-uns, parmi leſquels eſt Felibien, diſent *cherche*, je ſuis leur exemple par pluſieurs raiſons. 1.. Pour allier les deux premiers mots les plus uſitez. 2.° Pour éviter la dureté de la prononciation & l'équivoque de *cherche.* 3.° Pour conſerver dans l'écriture l'étimologie de ce mot, ſuivant le ſentiment de Daviler, qui le fait venir de l'Italien *Cerchio.* Je dis dans l'écriture, parce que dans la prononciation *Ch* ſe prononce comme un *K*, il faudroit dire *tcherque*, quoiqu'il en ſoit; c'eſt le modele d'un contour courbe découpé ſur une planche de volice mince ou autre matiere pour diriger le relief ou la cavité d'une pierre qu'on creuſe en le préſentant par dehors pour voir ce qu'il faut enlever; d'où il ſuit que ſon contour doit étre le contraire de celui de la pierre, ſçavoir convexe pour une pierre concave, & concave pour une pierre convexe. Les *Calibres* dont nous avons parlé ſont ſouvent des eſpeces de *Cerches.*

Claveau du Latin *Clavis*, une clef, eſt un vouſſoir à doele plate, qu'on appelle ainſi parce qu'il ſe met de niveau, comme les milieux

Digitized by Google

des clefs des autres voûtes, s'il s'agit d'un platfond, ou en pente de ſurplomb, lorſqu'il s'agit d'une platebande rampante ou d'une Trompe plate.

Glauſoir du Latin *claudere* fermer eſt une pierre quelconque, qui acheve une voûte ou un mur en fermant & bouchant le dernier eſpace qui reſtoit vuide.

Clef par analogie à ſon uſage de fermer une voûte, eſt le dernier rang de vouſſoirs que l'on poſe au ſommet de la voûte pour appuyer ceux des côtez & la bander; lorſque la clef excede le parement on l'appelle *clef ſaillante*; lorſqu'elle excede la hauteur d'un bandeau on l'appelle *clef paſſante*; lorſque la pierre qui eſt à l'interſection des Nervures d'une voûte Gotique s'abaiſſe au deſſous en façon de Cul-de-lampe on l'appelle *clef pendante*. Il en eſt des bizarres qu'on appelle *Guimberges*.

Collet, c'eſt la partie la plus étroite d'une marche tournante du côté du noyau, s'il y en a un, ou ſur le vuide du milieu, s'il n'y en a point.

Commiſſure en vieux François, uſité par le P. Deran, du Latin *Commiſſura*, ſignifie un joint: il n'eſt plus en uſage.

Compas d'Appareilleur eſt un inſtrument de fer ou de cuivre, fait à-peu-près comme un compas ordinaire, excepté que ſes branches ſont droites & plates, comme celles du récipiangle appellé *fauſſe équerre*, pour prendre l'ouverture des angles rectilignes & les tranſporter ſur la pierre; il a de plus qu'un ſimple récipiangle des pointes deſtinées à prendre des meſures de longueur & tracer des arcs comme les autres compas.

Compas à verge eſt un inſtrument pour tracer de grands arcs de cercle qu'on ne peut faire avec les compas d'Apareilleurs. Il conſiſte en une longue régle qu'on fait paſſer au travers de deux morceaux de bois ou de fer, qu'on appelle *poupées*, qui peuvent s'approcher ou s'éloigner comme l'on veut & être fixées par le moyen des vis. Chacune de ces poupées eſt terminée à un bout par une pointe de fer, qui ſert l'une à fixer au centre, l'autre à tracer l'arc; cet inſtrument vaut mieux qu'un cordeau; parce qu'il ne peut ni ſe ralonger ni ſe racourcir dès qu'il eſt une fois réglé à la longueur.

Compas à Ellipſe ou *à Ovale*, autre inſtrument compoſé du compas à verge & de deux poupées de plus, qu'on fait mouvoir dans une couliſſe pratiquée dans une figure de croix pour une Ellipſe entiere, ou de T pour tracer une demi Ellipſe ſur des arcs donnez. Voyez ſa deſcription pag. 138. & pl. 10. fig. 17.

Contre-clef, c'eſt un vouſſoir joignant la clef à droite ou à gauche.

Coquille par analogie à certaines coquilles de mer, eſt une voûte en quart de ſphère ouverte, dont le pole eſt au milieu du fond ſur l'impoſte, duquel s'élevent des rangs de vouſſoir qui s'élargiſſent comme les côtez des coquilles juſqu'à la face, elle ſert à couvrir les niches.

On appelle auſſi *Coquille* le parement inferieur des marches d'un eſcalier tournant délardées ſans reſſaut ou avec des petits reſſauts. C'eſt une ſurface *Hélicoide*.

Coude. Voyez *Jarret*.

Coupe, la coupe d'une pierre eſt la direction d'un lit ou d'un joint perpendiculaire à la ſurface droite ou courbe de la doele ou de la tête d'un vouſſoir, mais oblique au plafond dans les platebandes.

Couper ſignifie ordinairement ôter d'une pierre plus qu'il ne convient à la place qu'elle doit occuper, de ſorte que c'eſt la gâter en la rendant défectueuſe ou inutile. La couper à propos c'eſt la *tailler*.

Couper du trait, c'eſt faire un modele en petit avec de la craye, ou du plâtre, du bois ou autre choſe facile à couper, pour voir la figure des vouſſoirs, & s'inſtruire dans l'application du trait de l'épure ſur la pierre par le moyen des inſtrumens, comme *cherches*, *panneau*, *biveaux* & *équerres* dont on ſe ſert en grand.

Courbe Subſtantif ſignifie une ligne courbe : il y en a deux eſpeces, les unes *planes* les autres à *double courbure*. Les courbes planes ſont celles qu'on peut exactement tracer ſur un plan, leſquelles ſe réduiſent pour l'uſage de la coupe des pierres aux ſections coniques & aux ſpirales.

Les courbes à double courbure ſont celles qu'on ne peut tracer ſur une ſurface plane qu'en racourci, par le moyen de la projection, telles ſont la plûpart des arêtes des angles des enfourchemens des voûtes qui ſe rencontrent.

Couſſinet par analogie aux couſſins ſur leſquels on s'appuye pour ne pas ſe bleſſer, eſt le premier vouſſoir d'une voûte en arcade, qui a un lit de niveau, & celui de deſſus en coupe en pente, pour recevoir les ſuivans auſquels il ſert d'apui.

Corne de vache, eſpece de voûte en cône tronqué, dont la direction des lits ne paſſe pas au ſommet du cône.

Cû-de-four ſignifie une voûte ſphérique ou ſphéroide de quelque cintre qu'elle ſoit, ſurhauſſé ou en plein ceintre, quoique les cûs-de-four dont elle tire ſon nom ſoient très-ſurbaiſſez. L'arrangement de

Digitized by Google

leurs vouſſoirs peut varier & leur donner differens noms, comme en *pendentif*, en plan de *voûte d'Arête*, &c.

D.

Débillarder, c'eſt pour la coupe des bois, enlever une partie en eſpece de priſme triangulaire ou approchant compriſe entre des lignes qui enferment une ſurface gauche.

Décintrer, c'eſt démonter les cintres de charpente quand la voûte eſt faite & les joints bien fichez.

Dégauchir, c'eſt former une ſurface plane en déterminant ſes extremitez par le moyen de deux régles qu'on regarde l'une par l'autre en ferfermant un œil pour voir ſi elles ne ſe croiſent point, faiſant enſorte que l'une ainſi regardée couvre l'autre exactement, ſans quoi elles ne ſont pas dans un même plan, mais ſur une ſurface Gauche.

Délardement, c'eſt pour les pierres la même choſe que le débillardement pour le bois, il ſe dit particulierement de l'amaigriſſement que l'on fait au deſſous des marches pour former l'intrados d'une rampe ou d'une coquille d'eſcalier tournant.

Délit, c'eſt une eſpece de diviſion naturelle qui ſe trouve dans les pierres par couche, comme aux feüilles d'un livre; ainſi *poſer en délit*, c'eſt donner à une pierre une ſituation differente de celle qu'elle avoit dans la carriere d'où on l'a tirée. C'eſt une mal façon de poſer les clavaux ou vouſſoirs autrement que de lit en joint, comme ſi l'on chargeoit un livre ſur la tranche il eſt évident que le poids feroit effort pour écarter les feüilles, au lieu qu'il les appuye les unes ſur les autres lorſqu'on le charge ſur la joüe.

Il y a des pierres ſi maſſives qu'elles n'ont ni lit ni délit, tels ſont la plûpart des marbres, qu'on peut poſer comme l'on veut.

Démaigrir ou *amaigrir* une pierre, c'eſt en ôter pour rendre l'angle que font deux ſurfaces, plus aigus ou moins obtus.

Dérobement, c'eſt la maniere de tailler une pierre ſans le ſecours des panneaux par le moyen des hauteurs & profondeurs qui déterminent les bornes de ce qu'il en faut retrancher, comme ſi l'on dépouilloit la figure imaginée de ce qui la couvre. C'eſt dans ce ſens qu'on dit derober des feves. Le P. Dechalles n'a pas connu l'origine de ce mot lorſqu'il l'a traduit *per ſuffurationem*, il falloit dire, *per ſpoliationem.*

Deſcente, on appelle ainſi toutes les voûtes inclinées à l'horiſon.

Dévelopement, c'eſt l'extenſion des ſurfaces qui envelopent un vouſſoir ou une voûte, dont les parties contiguës ſont rangées de ſuite ſur une ſurface plane. Le dévelopement dans une épure ordinaire eſt l'extenſion de la doele, ſur les diviſions de laquelle on ajoûte les figures des panneaux de lit.

Quelques Ouvriers peu inſtruits, comme Blanchard dans ſon traité de la coupe des bois entendent par le mot de dévelopement la ligne courbe, & quelquefois l'angle naturel, qui eſt repreſenté en racourci dans la projection.

Ainſi il dit qu'*un* tel *angle* eſt le *dévelopement d'une* telle *ligne* qui en eſt le profil ou la projection horiſontale.

Doele ou *Douelle* du Latin *Dolium* un tonneau, ſignifie le parement interieur d'une voûte ou d'un vouſſoir creux, comme la doele d'un tonneau; on l'appelle auſſi *intrados*.

La ſurface plane qui paſſe par la corde de l'arc d'une doele s'appelle *Doele plate*, c'eſt une préparation à la formation d'une doele concave.

Doigt de biveau ſignifie ſelon le P. Deran une de ſes branches [page 15.] Daviler l'appelle *Bras*, & moi branche.

Dreſſer une pierre, c'eſt l'équarrir ou la diſpoſer à recevoir le trait.

Droit, par un D majuſcule ſignifie perpendiculaire, qui eſt opoſé au biais. Ainſi on dit un arc Droit, quoique cet arc ſoit courbe, parce qu'on veut dire que ſon plan eſt perpendiculaire à la direction d'un berceau. On dit une porte Droite ou un berceau Droit, une deſcente Droite pour ſignifier que ſa direction n'eſt pas oblique à ſon entrée horiſontalement.

E.

Ebraſement ſignifie l'élargiſſement des côtez ou jambages d'une porte ou d'une voûte, tels ſont les bayes des fenêtres & abajours qui s'é-s'élargiſſent en dedans.

Echaſſe, c'eſt une régle de bois un peu large, dont les Apareilleurs ſe ſervent pour y marquer les lignes de hauteur de retombée & d'épaiſſeur dont ils ont beſoin pour les porter commodément dans le chantier, où ils voyent les pierres qui leur conviennent & peuvent en donner les meſures.

Elevation, c'eſt la repréſentation d'un corps deſſiné ſuivant ſes meſures verticales & horiſontales exterieurement apparentes ſans égard à la profondeur.

Digitized by Google

Enfourchement, c'eſt l'angle formé par la rencontre de deux doeles de voûtes qui ſe rencontrent, où les vouſſoirs qui les lient ont deux Branches comme une fourche, dont l'une eſt dans une voûte & l'autre dans la contiguë.

Entrecoupe, intervale vuide de deux voûtes qui ſont l'une ſur l'autre, enſorte que la doele de la ſuperieure prend naiſſance ſur l'extrados de l'inferieure, qui eſt quelquefois ouverte comme au dome des invalides à Paris, où la calote ſe détache des côtez de la tour du dome.

On fait ſouvent des entrecoupes pour ſuppléer à la charpente d'un dome, en élevant une voûte pour la décoration exterieure, au deſſus de la premiere qui paroîtroit trop écraſée au dehors, comme à S. Pierre de Rome & en pluſieurs Egliſes d'Italie.

Epure, apparemment du verbe *épurer* mettre au net, eſt le deſſein d'une voûte tracé ſur une muraille ou ſur un plancher, de la grandeur dont elle doit être exécutée, pour y prendre les meſures néceſſaires à la conſtruction des vouſſoirs.

Un pareil deſſein pour la charpente change de nom, il s'appelle *Etelon*.

Equarrir une pierre ou une piece des bois, c'eſt lui faire des ſurfaces à l'équerre l'une à l'autre.

Equarriſſement, tailler par équarriſſement eſt une maniere de tailler les pierres ſans le ſecours des *panneaux* les ayant ſeulement prêparées en les équarriſſant, à y appliquer les meſures des hauteurs & des profondeurs qu'on a trouvé dans le deſſein de l'épure pour chaque vouſſoir ; on l'appelle auſſi *par dérobement* comme nous l'avons dit à ce mot.

Etayement, plancher pour ſoutenir les voûtes en *platfond*, il tient lieu du cintre dans les voûtes concaves.

Extrados du Latin *extra* dehors, c'eſt la ſurface extérieure d'une voûte, lorſqu'elle eſt réguliere comme *l'intrados*, ſoit qu'elle lui ſoit parallele ou non. La plûpart des voûtes des ponts antiques étoient *extradoſſez* d'égale épaiſſeur.

F.

Fauſſe Coupe, c'eſt la direction d'un joint de tête oblique à l'arc du cintre, auquel il doit être perpendiculaire pour être en bonne coupe dans les voutes concaves,

Mais ſi la voûte eſt plate comme aux *platebandes* ce doit être tout le contraire, la bonne coupe doit être oblique au platfond, pour que

les clavaux ſoient faits plus larges par le haut que par le bas; car ſi les joints ſont perpendiculaires à la platebande les clavaux deviennent d'une égale épaiſſeur. Alors ils ſont en *fauſſe coupe*, parce qu'ils ne peuvent ſe ſoutenir que par le moyen des barres de fer qu'on leur donne pour ſupport, ou par une bonne coupe cachée ſous la face au dedans à quelques pouces d'épaiſſeur, comme on en voit aux portes du vieux Louvre à Paris.

Fauſſe équerre s'entent ordinairement du compas d'Apareilleur, quoi qu'il ſignifie en general un récipiangle, c'eſt-à-dire, un inſtrument propre à meſurer l'ouverture d'un angle, ceux de bois s'appellent *Sauterelle.*

Fermer une voûte, c'eſt y mettre le dernier rang de vouſſoirs, qu'on appelle collectivement *la clef* par la même metaphore; le dernier vouſſoir s'appelle *Clauſoir* du Latin *claudere* fermer.

Formeret. Voyez *Nerf*, il ſignifie auſſi quelquefois le cintre de la jonction d'une voûte, à un mur, chez DERAN, page 440.

Foulée, c'eſt un giron de marche, ainſi appellé parce que c'eſt la partie qu'on foule aux pieds.

G.

Gauche ſignifie toute ſurface qui n'a pas quarte angles dans un même plan, enſorte qu'étant regardée en profil, les cotez oppoſez ſe croiſent, telle eſt une portion de la ſurface d'une vis & de la plûpart des arrieres vouſſures. Ce terme eſt de tous les Arts tant de maçonnerie que de Charpenterie & menuiſerie; dans celui-ci Blanchard l'applique auſſi à la ligne courbe à double courbure, qui eſt ſur une ſurface.

Gras ſignifie un excès d'épaiſſeur de pierre ou de bois ou d'ouverture d'angle plus grand qu'il n'eſt néceſſaire pour le lieu où la pierre ou bien le morceau de bois doit être placé, le défaut oppoſé s'appelle *maigre.*

H.

Helice du Grec *Eliſo* circumvolvo, eſt une ligne courbe qui tourne autour d'un arc en s'élevant, comme la vis autour de ſon noyau.

I.

Jarret, imperfection d'une direction de ligne ou ſurface, qui fait une ſinuoſité ou un angle. Le jarret ſaillant s'appelle *conde*, le rentrant s'appelle

s'appelle *Pli.* Une ligne droite fait un jarret avec une ligne courbe, lorſque leur jonction ne ſe fait pas au point d'atouchement.

Jauger, c'eſt appliquer une meſure d'épaiſſeur ou de largeur vers les bouts d'une pierre pour en faire les arêtes ou les ſurfaces oppoſées paralleles.

Jauger une pierre ſignifie ſouvent la même choſe que la *retourner.* Voyez *retourner.*

Impoſte du Latin *impoſitum* mis deſſus, eſt le rang ou plutôt le lit de pierre ſur lequel on établit la naiſſance de la voûte ou le *Couſſinet. Impoſte* ſignifie auſſi cet ornement de moulures qui couronne un Piedroit ſous la naiſſance d'une Arcade, lequel ſert de baſe à un autre ornement cintré, appellé *Archivolte.*

Intrados. Voyez *Doele.*

Join a differentes ſignifications, c'eſt 1.° l'intervale plein ou vuide qui reſte entre deux pierres contiguës; dans ce ſens on dit *petit join*, *grand join.* 2.° Il ſe prend pour la ligne de diviſion des cintres en vouſſoirs; ainſi on dit *join en coupe*, *join quarré*, *join de Tete*, *join de Lit*, *join de Doele.* Où il faut remarquer que quoique les joins de Lits ſoient des diviſions longitudinales de la doele, on n'entend par *joins de Doele* que les joins tranſverſaux. 3.° Le mot de *join* ſignifie auſſi quelquefois la ſurface d'une pierre inclinée & cachée dans une voûte, mais alors au lieu de dire *join en lit*, il faut dire *Lit en join.*

L.

Layer du Latin *lævigare* polir, c'eſt tailler la pierre avec une eſpece de hache *bretelée*, c'eſt-à-dire dentée en façon de ſcie qu'on appelle *laye*, laquelle rend la ſurface unie quoique rayée de petits ſillons uniformes qui lui donnent une apparence agréable.

Lierne, c'eſt une des nervures des voûtes Gotiques, qui lie le nerf appellé *Tierceron* avec celui de la Diagonale qu'on appelle *Ogive.*

Ligne, ce mot en Architecture a pluſieurs ſignifications, pour notre ſujet elles ſe réduiſent à la verticale appellée *aplomb*, à l'horiſontale de *niveau* & à l'inclinée en *Talud.*

Limon du Latin *limus* tourné de travers, ſignifie la pierre ou piece de bois qui termine & ſoutient les marches d'une rampe, ſur laquelle on poſe une baluſtrade de pierre ou de fer pour ſervir d'apui à ceux qui montent, cette piece eſt droite dans les rampes droites & gauches par ſes ſurfaces, ſupérieure & inférieure dans les parties d'eſcaliers tournantes.

Lit, par analogie au lit ſur lequel on ſe couche, ſe dit 1.° de la ſituation naturelle de la pierre dans la carriere. 2.° De la ſurface ſur laquelle on poſe une pierre, ſoit activement ſoit paſſivement; celle ſur laquelle elle s'appuye s'appelle *lit de deſſous*; celle ſur laquelle une autre pierre s'appuye s'appelle *lit de deſſus*; lorſque ces ſurfaces ſont

inclinées à l'horiſon, comme dans les vouſſoirs & clavaux, on les appelle *lit en joint.*

Lunette, portion de voûte percée dans une autre dans laquelle elle forme une eſpece de figure de Croiſſant de Lune d'où elle tire ſon nom.

M.

Maigre, par analogie à la maigreur des animaux, ſe dit des pierres dont les angles ſont plus aigus ou moins obtus qu'ils ne doivent être, de ſorte qu'elles n'occupent pas entierement la place à laquelle elles ſont deſtinées.

Marche ſignifie un degré, ſa partie horiſontale s'appelle *Giron* de l'Italien *girare* tourner; parce que la plûpart des anciens eſcaliers étoient tournans, la partie verticale en parement s'appelle contremarche, lorſque le giron eſt d'inégale largeur la partie la plus étroite s'appelle le *Collet*, & la plus large la *queuë.*

N.

Nerf ou *Nervure*, par analogie aux nerfs des animaux, eſt une arcade de pierre en ſaillie ſur le nud des voûtes Gotiques pour en appuyer & orner les angles ſaillans par des moulures & fortifier les pendendentifs, comme les nerfs ſont la force des animaux. Un des plus beaux morceaux que j'aye vû en ce genre eſt la voûte de l'Egliſe de *Velen* ou *Bethleem* à Lisbone, où les nervures ſont de marbre travaillées, entrelaſſées & exécutées avec beaucoup d'art. On donne differens noms aux nervures par rapport à leur ſituation.

Les nerfs qui traverſent une voûte diagonalement s'appellent croiſées *d'Ogives*, ceux qui la traverſent perpendiculairement s'appellent *Arcs doubleaux*, ceux qui la traverſent obliquement entre les arcs doubleaux & les ogives s'appellent *liernes* & *tiercerons*, ceux qui en ſuivent la direction en traverſant d'un pilier à l'autre s'appellent *Formerets.*

Noyau, c'eſt le milieu d'un eſcalier à vis ou d'une voûte tournante de niveau qu'on appelle pour cela voûte *ſur le noyau*, ou tournante & de plus rampante qu'on appelle *vis St. Giles*; le noyau ſuit ordinairement la figure du lieu dans lequel il eſt, ſi c'eſt dans une tour ronde, il eſt un pilier rond, il eſt quarré ſi la tour eſt quarrée.

O.

Ogive ou *Augive* ſignifie chez le P. Deran les voûtes Gotiques en *tiers point.* Ce mot, ſelon ma conjecture, vient de l'Allemand *Aug* qui ſignifie l'œil; parce que les arcs des cercles des cintres de voûtes Gotiques ſont des angles curvilignes ſemblables à ceux des coins de l'œil; quoique dans une poſition differente.

Daviler reſſerre la ſignification de ce terme aux croiſées d'ogives, mais

Digitized by Google

mal à propos ; car anciennement on diſoit indifferemment voûte *d'Ogive*, voûte *Moderne* ou en *tierspoint*.

P.

Panache, c'eſt une voûte en ſaillie ouverte par devant comme les trompes, élevée ſur un, ou deux angles rentrans pour porter en l'air une portion de Tour creuſe; c'eſt ainſi que les Domes des Egliſes modernes ſont portez ſur quatre Panaches élevez ſur les angles de la croiſée de la Nef avec les Bras de la croix.

Lorſque le Panache eſt établi ſur un ſeul angle ſa figure eſt ordinairement un triangle ſphérique terminé par trois arcs, dont deux ſont verticaux en quart de cercle ou d'Ellipſe & le troiſiéme horiſontal qui ſert de baſe à la Tour.

Lorſque le panache eſt ſur un Pan coupé, c'eſt une ſurface concave quadrilatere irreguliere.

Ce nom peut venir du Latin *pandatio* & de *pandare* qui ſignifie chez Vitruve [l. 6. Chap. 11.] courber ſous le fais.

On ne doit pas confondre avec Daviler les noms de Panache & de pendentif, ce ſont des choſes differentes. Voyez *pendentif*.

Panneau, de la même étimologie *pando*, eſt le modele d'une des ſurfaces d'un vouſſoir taillé ſur du bois, du carton ou autre matiere mince, pour être appliqué ſur la pierre, & ſervir à tracer le contour d'un *Lit*, d'une *Doele* ou d'une *Tête*; c'eſt leur uſage qui leur donne les noms de *Panneau de lit*, &c.

Panneau flexible eſt celui qui eſt fait ſur du carton, du fer-blanc, ou avec une lame de plomb pour pouvoir être plié & appliqué ſur une ſurface concave ou convexe, cylindrique ou conique.

Parallele en un ridicule jargon d'Ouvrier ſignifie quelquefois *dans un même plan*; ainſi Blanchard dans ſon traité de la coupe des bois, imprimé à Paris en 1726. dit qu'une *courbe eſt parallele à une perpendiculaire droite, à une horiſontale, & à un angle* voyez pag. 73. & par-tout ailleurs où il eſt queſtion de la même expreſſion.

Parement ſurface apparente.

Pendant petit vouſſoir des voûtes Gotiques ſans coupe, fait à l'équerre.

Pendentif eſpece de panache qui eſt le quart d'une demi croiſée de voûte Gotique, compris entre l'ogive & le formeret.

Plan ſelon les Geometres ſignifie une ſurface plane infiniment prolongée, ſi l'on veut, c'eſt dans ce ſens qu'on dit que des baſes des corps ſéparez ſont dans un même plan. Lorſque l'on dit qu'une telle ligne eſt dans le plan horiſontal ou dans un plan vertical, c'eſt la même choſe que de dire dans le langage des arts de *niveau* ou *aplomb*.

Ce qui n'eſt ni de niveau ni aplomb ſera dit *incliné à l'horiſon*, & en terme de l'art, en talud, ou en glacis, ou en deſcente.

Plan en terme d'Architecture ſignifie la projection d'un corps ſur une

ſurface horiſontale & quelquefois ſur ûne ſurface inclinée, alors il s'appelle *plan ſuivant la rampe.*

On l'appelle *Plan Geometral* ou *Ichnographie*, lorſqu'il n'exprime que les diſtances horiſontales, & *plan relevé*, lorſqu'on y ajoute une élevation pour mieux exprimer ce qu'on veut repréſenter ſans s'embaraſſer des meſures de hauteur.

Le plan horiſontal que nous appellons toujours projection horiſontale par les raiſons que nous en avons donné au troiſiéme Livre, eſt le premier deſſein néceſſaire pour la coupe des pierres.

Platebande, c'eſt pour la coupe des pierres une voûte droite & plane, de niveau ou rampante, qui ſert de linteau & de fermeture à une porte, à une fenêtre ou à toute autre baye, comme d'architrave ſur les entrecolonnemens. Les pierres qui en ſont les parties s'aplent *Clavaux* & non pas vouſſoirs comme aux autres voûtes. La longueur de la platebande entre ſes piedroits s'appelle *portée*, c'eſt le genre de voûte qui a le plus de pouſſée, c'eſt-à-dire, qui fait le plus d'effort pour renverſer ſes piedroits; parce que les pierres y ſont dans la ſituation la plus forcée.

Plomée ſelon le P. Derand par corruption de *plombé* eſt une ligne tirée à plomb.

Plumée eſt une excavation faite dans la pierre, au marteau ou avec le ciſeau, ſuivant une cherche ou une régle en quelque poſition qu'elle ſoit aplomb ou de niveau ou inclinée. Ce nom vient apparemment de la reſſemblance de la découverte que l'on fait de la peau d'un oyſeau en ôtant la plume.

Porte, c'eſt une baye qui prend le nom 1.° du mur dans lequel elle eſt percée, comme *Porte en Tour ronde*, ſi elle eſt convexe; *Porte en Tour creuſe*, ſi elle eſt concave. 2.° De l'endroit où elle eſt placée, dans un angle rentrant, c'eſt une *Porte dans l'Angle*, dans un ſaillant, c'eſt une *Porte ſur le Coin.* 3.° De la direction, comme *Porte Droite*, qui eſt perpendiculaire à ſa direction, *Biaiſe* ſi elle lui eſt oblique, *Ebraſée*, ſi ſes piedroits s'ouvrent en dehors, comme aux Egliſes Gotiques de Notre-Dame de Paris, de Reins, &c.

Portée, intervale de deux piedroits dans une platebande.

Pouſſée, c'eſt l'effort que fait une voûte pour écarter ſes piedroits, lequel eſt d'autant plus grand que la courbure approche de la ligne droite; ainſi le cintre en anſe de panier ſurbaiſſé, pouſſe plus que le plein cintre; celui-ci plus que le ſurbaiſſé; celui-ci plus que le *tiers point* Gotique, c'eſt ſans doute par cette raiſon que les anciennes Egliſes ſont la plûpart en tiers point, cette conſtruction d'ailleurs

donnant la facilité d'employer de très-petits vouſſoirs, qui coutoient peu de tranſport.

Q.

Quarrément ſignifie à angle droit, a l'équerre.

Quartier a pluſieurs ſignifications. Il ſe prend pour une pierre de taille d'une certaine groſſeur. Il ſignifie auſſi le quart du tour d'un eſcalier, alors on ajoute *Quartier tournant.* Si cette partie eſt arondie & ſaillante hors d'un mur, on l'appelle *Quartier de vis ſuſpenduë*, qui n'eſt ſoutenuë en l'air que par l'artifice de la coupe des pierres.

R.

Racordement ſe dit de la réunion de deux ſurfaces pour qu'elles paroiſſent continuës, ou que leur jonction [ſi elles font un angle entr'elles] faſſe une aréte en ligne droite, ou d'une courbure de cintre réguliere & uniforme, on dit pour le verbe *racorder.*

Ragréer, c'eſt enlever avec les outils convenables les boſſes ou balevres qui ſe trouvent dans les paremens & dans les joints, pour les rendre unis, propres & agréables à la vûë.

Ralongée ſe dit d'une ligne courbe à laquelle on donne plus d'extenſion ſur un diametre ou une corde qu'elle n'en avoit, ſans changer ſa profondeur. On dit *Cherche ralongée.*

Rampant. Voyez *Arc rampant.*

Rampe, inclinaiſon à l'horiſon d'une ligne ou d'une ſurface droite ou courbe; avec degrez; ou ſans degrez.

Reculement ſe dit ordinairement de la diſtance d'une ligne verticale à une ligne inclinée, comme de l'aplomb au talud, ou de l'écartement d'une ligne courbe à l'égard de la tangente, comme à une porte en Tour ronde ou creuſe à l'égard de ſa corde ou d'une parallele.

Reins de voûte, c'eſt la partie vuide ou pleine qui eſt entre la moitié d'un arc & ſon piedroit, depuis la naiſſance juſques vers le ſommet. Les reins des voûtes Gotiques ſont vuides.

Remenée, terme peu uſité qui vient de l'Italien *Remenato*, ce n'eſt ſelon d'Aviler qu'une ſorte d'arriere vouſſure; mais ſa propre ſignification eſt notre *bombé* d'un grand arc de cercle moindre que la moitié, comme il eſt clairement expliqué au premier Livre de Palladio Ch. 24. à REMENATO *che coſi chiamano i volti che ſono di portione di Cerchio*

& non arrivant à ſemi-circolo, & preuve qu'il ne l'entend pas ſeulement d'une arriere vouſſure, c'eſt qu'il l'applique à la partie d'une voûte ſphérique ſur un quarré, laquelle eſt au deſſus des pendentifs.

Renfondrement, terme de menuiſerie ſuivant Blanchard, au lieu de renfoncement.

Repere du Latin *reperire* retrouver, c'eſt une marque que l'on fait ſur une pierre pour reconnoître une diviſion ou un trait dont on a beſoin pour tailler. Ainſi on dit *repairer* au lieu de marquer un point ou une ligne.

Reprendre, c'eſt refaire une partie de vouſſoir qui excede l'étenduë qu'elle doit avoir.

Retombée, c'eſt la même ligne qu'on appelloit anciennement *abatuë*, dont nous avons parlé, c'eſt l'intervale du niveau entre la naiſſance inferieure d'un arc, & l'aplomb abaiſſé de ſon extrémité ſupérieure.

On appelle *premieres Retombées* les vouſſoirs de la naiſſance d'une voûte, qui ont des lits ſi peu inclinez qu'ils ne gliſſent pas & ſe ſoutiennent les uns ſur les autres ſans le ſecours des ceintres de Charpenpente, tels ſont les 5. ou 6. premieres aſſietes des vouſſoirs des Arcades d'un grand diametre, quelquefois plus.

Retondre une pierre, c'eſt enlever une legere épaiſſeur dans toute une ſurface pour la perfectioner, c'eſt une eſpece de ragrément.

Retour d'équerre, c'eſt un angle Droit, on dit ſe *retourner d'équerre* pour faire une ligne ou une ſurface perpendiculaire à une autre.

Retourner une pierre, c'eſt la jauger ou lui faire une ſurface parallele ou à-peu-près à un lit ou à un parement donné.

S.

Sauterelle, inſtrument compoſé de deux régles de bois aſſemblées par un bout comme la téte d'un compas pour être mobiles, & propres à prendre l'ouverture de toutes ſortes d'angles rectilignes droits, aigus ou obtus. C'eſt un récipiangle pour tranſporter ſur la pierre ou ſur le bois l'angle d'une encognure ou d'un trait de l'épure, plus uſité dans la coupe des bois que dans celle des pierres, ou l'on ſe ſert pour la même fin du compas d'Appareilleur, qui eſt une eſpece de ſauterelle à laquelle on a ajouté des pointes pour ſervir de fauſſe équerre & de compas ſuivant les occurrences.

Simbleau ou plutôt *Cingleau* par corruption du Latin *Cingulum*, un cordon, eſt le cordeau qui ſert à tracer les arcs de cercle d'une étenduë plus grande que les branches des plus grands compas, ſoit à

Digitized by Google

branches ſoit à verges. Les meilleurs ſingleaux ſont des chainettes qui ne ſont pas ſujettes à s'alonger comme les cordes.

On appelle auſſi ſimbleau une perche immobile par un de ſes bouts qui ſert à traçer un grand arc de çercle.

Singliots ſont les deux foyers d'une Ellipſe ou l'on attache les bouts d'un cordeau égal au grand axe pour tracer cette courbe par le mouvemouvement continu, qu'on appelle le *Trait ou Jardinier.*

Somier, par analogie au ſommet, c'eſt la premiere pierre d'une platebande qui porte à plein au ſommet du piedroit où elle forme le premier lit en joint, & l'apui de la butée des clavaux de chaque côté, pour les tenir ſuſpendus ſur le vuide de la baye, d'où ils ne peuvent s'échaper qu'en écartant les ſomiers. La coupe ou inclinaiſon de leur lit en joint ſur l'horiſon eſt ordinairement de 60. degrez; parce qu'on a coutume de la tirer du ſommet d'un triangle équilateral.

Surbaiſſer, c'eſt n'élever une courbure de cintre qu'au deſſous du demi cercle, c'eſt-à-dire, faire un cintre Elliptique, ou en ovale dont le grand axe ſoit horiſontal.

Surbauſſer, c'eſt au contraire élever le cintre au deſſus du demi cercle, ou faire une ovale dont le grand axe ſoit aplomb par le milieu de la clef.

Surplomber, c'eſt faire pencher une ligne ou une ſurface à angle aigu avec l'horiſon.

T.

Taluder, c'eſt au contraire faire un angle obtus avec l'horiſon.

Talud, *Talus* ou *Talut*, le premier paroît plus naturel, ſi l'on doit dire taluder ſuivant l'uſage, car on ne dit jamais *taluſer*, & quoique Daviler diſe *talutér*, je ne l'entend point dire parmi les Artiſtes; M. Gautier, Directeur des ponts & chauſſées, écrit comme nous *talud* dans ſes Traitez des Ponts & des Chemins, ce mot vient du Latin *Talus*, qui ſignifie le talon.

C'eſt l'inclinaiſon d'une ligne ou d'une ſurface au-delà de l'aplomb en angle obtus, tout au plus juſquà l'angle de 135. degrez; car dès que la ſurface eſt plus inclinée, cette inclinaiſon s'appelle en *Glacis.*

Tambour eſt une pierre ronde en portion de cylindre qui eſt une partie de fuſt de colonne ou de pilier, qu'on n'a pû faire d'une piece faute de pierre aſſez grande. Ce mot vient de la figure de la Quaiſſe dont on ſe ſert dans les Troupes pour faire le bruit du ſignal de marche, d'aſſem-

blée ou d'autre manœuvre, parce qu'on l'appelloit anciennement Tambour, au lieu qu'aujourd'hui ce nom a passé à l'homme qui frape dessus pour en tirer le son.

Tas de charge, c'est une saillie de pierres dont les lits, avancant les uns sur les autres, font l'effet d'une voûte de sorte qu'il faut des pierres longues pour balancer la partie qui est sans apui; mais ce genre d'ouvrage n'est bon qu'en petit ou seulement pour les premieres pierres de la naissance d'une voûte.

Tasser se dit de l'affaissement d'une voûte, dont la charge fait diminuer la hauteur & resserrer les joints.

Tasté, ligne tastée est celle qu'on trace à la main pour voir l'effet d'une courbure.

Tierceron, c'est un nerf des voûtes d'ogives, située entre le formeret ou Arc-Doubleau & celui d'ogive en diagonale.

Tour ronde ne signifie pas toujours une tour mais tout parement convexe de mur cylindrique ou conique, *Tour creuse* est le concave.

Tracer à la main, c'est déterminer à vûë d'œil le contour d'une ligne courbe, ou en suivant plusieurs points donnez par intervale, ou en corrigeant seulement par le goût du dessein une ligne courbe, qui ne satisfait pas la vûë, comme une doucine composée d'arcs de cercles mal assemblez, doit être encore tracée à la main.

Lorsqu'on a plusieurs points donnez pour une ligne courbe il convient mieux de se servir d'une régle pliante que de tracer à la main, le contour en est plus net.

Trainer, c'est faire méchaniquement une ligne parallele à une autre ligne donnée droite ou courbe, en trainant le compas ouvert de l'intervale requis d'une ligne à l'autre, de maniere qu'une de ses pointes parcoure la ligne donnée, & que l'autre pointe ou plutôt la ligne qu'on peut imaginer passer par ces deux points, soit toujours perpendiculaire ou également inclinée à la ligne donnée, ou à sa tangente si elle est courbe. Les Menuisiers au lieu de compas se servent pour cette operation d'un instrument qu'ils appellent *Trusquin*.

Trait à l'égard de la coupe des pierres signifie en general tout dessein qui conduit aux moyens nécessaires pour parvenir à la formation d'une voûte, soit plan, profil, élevation ou dévelopement. Ce terme est plus étendu que celui d'épuré, en ce qu'il s'entend du dessein en petit & en grand, au lieu que l'épure ne signifie que celui de grandeur naturelle sans réduction.

On dit *couper du trait* pour exprimer l'étude que l'on fait avec de la craye, du platre ou autre matiere facile à couper, qu'on taille en petits

voussoirs

Digitized by Google

vouſſoirs de la même maniere que ſi on exécutoit une voûte en grand, pour apprendre à joindre la theorie à la pratique, & concevoir plus facilement l'effet des Traits dont on s'eſt ſervi, ſoit auſſi pour ſentir le plus ou le moins de commodité des differentes manieres qu'on a inventé en ſe ſervant des panneaux ou en taillant par équarriſement.

Trait quarré, c'eſt ſuivant le langage des Ouvriers la maniere de faire une perpendiculaire à une ligne donnée. Si cette ligne eſt courbe, comme un cercle ou une Ellipſe la perpendiculaire à ſa tangente s'appelle *trait quarré ſur la ligne* Courbe, & *au bout de la ligne courbe* lorſqu'elle l'eſt à une de ſes extrémitez.

Trompe, c'eſt ordinairement une voûte de la figure d'une moitié de cône qui ſe préſente par ſa baſe, comme le *Pavillon* d'une trompette ou Cor-de-chaſſe, qui eſt cette eſpece d'entonnoir par où ſort le bruit du ſon, & parcequ'anciennement cet inſtrument s'appelloit Trompe, on a donné le même nom à la voûte qui en imite une partie, cette étimologie eſt naturelle & montre la puérilité de l'imagination de ceux qui diſent avec Daviler, que ce nom vient de ce que la voûte trompe & ſurprend ceux qui la regardent ſans connoiſſance de l'artifice de ſon appareil.

On appelle auſſi du même nom des petites voûtes en portion de ſphère qu'on fait aux angles ſaillans pour en émouſſer le pied & ſoutenir le haut en l'air. Alors on les appelle *Trompe en Niche*.

Il y a differentes ſortes de trompes, dont les noms viennent ou de leurs ſituations ou de leurs figures.

A l'égard de la figure il en eſt, comme je viens de dire, de coniques & de ſphériques.

La conique Droite s'appelle *trompe fondamentale*, chez le P. Deran.

La ſphérique s'appelle *Trompe en niche*.

Lorſque la face de l'une ou de l'autre eſt convexe on l'appelle *Trompe en tour Ronde*, ſi elle eſt concave *Trompe en tour creuſe*, ſi la face eſt briſée en pluſieurs ſuperficies planes on l'appelle *Trompe à pan*, ſi les impoſtes ſont d'inégale hauteur on l'appelle *Trompe rampante*, ſi la face eſt ondée & les impoſtes rampantes on l'appelle *Trompe d'Anet*.

A l'égard de la ſituation, ſi elle eſt dans un angle ſaillant, on l'appelle *Trompe ſur le coin*, ſi elle eſt dans un angle rentrant, *Trompe dans l'Angle*.

Trompillon, c'eſt la naiſſance du milieu d'une trompe, qui eſt au ſommet du cône dans les coniques, ou au pole de la ſphère dans les ſphériques, c'eſt une pierre d'une ſeule piece, qu'on eſt forcé de faire ainſi pour occuper la place de pluſieurs extrémitez de vouſſoirs en pointe, qui ſeroient tellement aigus qu'on ne pourroit les tailler & les poſer ſans riſque de les caſſer.

On appelle auſſi *Trompillons* les petites trompes faites de pluſieurs pieces ſous les quartiers tournans de certains eſcaliers.

V.

Vis d'eſcalier, c'eſt un arrangement de Marches de degrez au tour d'un pilier qu'on appelle le *noyau* de la vis, quelquefois le noyau de la vis eſt ſuprimé, les marches alors ne ſont ſoutenuës que par leur queuë dans le mur de la Tour, & en partie ſur celles qui ſont de ſuite dès le bas, alors on l'appelle *vis à jour.*

Si l'eſcalier à vis dans une tour ronde eſt voûté en berceau tournant & rampant, on l'appelle *Vis St. Giles ronde.*

Si la tour eſt quarrée, le noyau étant auſſi quarré, chaque côté étant voûté en berceau irrégulier d'une figure en quelque façon torſe, on l'appelle *vis St. Giles quarrée.*

Vouſſoir, c'eſt une pierre qui fait partie d'une voûte concave de quelque figure qu'elle ſoit, cylindrique, conique, ſphérique ou annulaire, ſon étimologie vient apparamment du mot Latin *volutus* tourné en rond.

Les vouſſoirs qui forment la naiſſance d'une voûte s'appellent *Couſſinets*, ceux qui ſont à ſon ſommet s'appellent *Clefs.*

Lorſqu'ils ſont terminez en haut par une partie qui déborde leur queuë on les appelle *vouſſoirs à Croſſettes.*

Lorſqu'ils ſe diviſent en deux parties pour lier deux voûtes, qui ſont un angle ſailliant ou rentrant, on les appelle *vouſſoirs à branches.*

Lorſqu'un vouſſoir eſt ſuivi d'un autre en continuation, on l'appelle *vouſſoir ſans fin*, tels ſont ceux des arches du pont royal à Paris.

Vouſſure ſignifie toute ſorte de courbure en voûte, mais particuliérement ces portions de voûte qui ſervent de baſe aux platfonds à la mode.

Les vouſſures qui ſont au dedans d'une baye de porte ou de fenêtre derriere la fermeture s'appellent *Arrieres-vouſſures*, il en eſt de differente figure comme nous l'avons dit à ce mot.

Voûte du Latin *Volutum* tourné en rond, ſignifie toute ſorte de couverture de maçonnerie ou de pierre de taille qui ſe ſoutient en l'air entre ſes piedroits, par l'arrangement & la figure des parties qui la compoſent.

Les voûtes propres à couvrir de grands apartemens s'appellent *Maîtreſſes voûtes* pour les diſtinguer de celles qui ne peuvent ſervir qu'à couvrir de petites parties, comme les trompes, les arrieres vouſſures & les niches.

Quoique les voûtes puiſſent être variées d'une infinité de façons, on peut les réduire en ſept ou huit eſpeces, ſçavoir en planes, cylindriques, coniques, ſphériques, annulaires, hélicoïdes, mixtes & irrégulieres. C'eſt dans cet ordre qu'on les a rangé dans le Livre ſuivant, où l'on donne la maniere de les faire.

Digitized by Go

TABLE DES TITRES DU PREMIER TOME.

DISCOURS PRELIMINAIRES.

Pages.

1°. SUR l'utilité de la Theorie dans les Arts rélatifs à l'Architecture. j

2°. L'expoſition du ſujet dont il s'agit. vij

3°. De l'origine de la Coupe des pierres, & de l'uſage qu'on en doit faire. xj

LIVRE I.

De la figure des ſections des corps coupez par des plans, ou pénetrez par des ſolides. Pourquoi la connoiſſance en eſt néceſſaire dans l'Architecture. 1

De la figure des voûtes en géneral rapportée à celle des corps réguliers. 4

Des variations accidentelles aux voûtes comparées à celles des ſections des corps.

PREMIERE PARTIE.

Des Sections des Corps coupez par des Plans.

CHAP. I. *Des Sections de la Sphère.* 8

CHAP. II. *Des Sections des Cônes coupez par des Plans.* 10

Définitions des points & des lignes remarquables dans les ſections coniques. 13

Expoſition de quelques proprietez des lignes menées au dedans & dehors des ſections coniques, des abſciſſes & des ordonnées. 13

Proprietez particulieres à l'Ellipſe. 18

Des tangentes des ſections coniques. 19

De quelques differences de poſition des ſections coniques dans les cônes ſcalenes. 20

THEOREME I. La ſection plane Elliptique faite dans l'intervale de deux cônes concentriques & ſemblables, *comme entre les ſurfaces concaves & convexes d'un cône creux d'égale épaiſſeur*

Pages.

est une couronne compriſe par deux circonferences d'Ellipſes qui ne ſont pas équidiſtantes & qui ne peuvent être concentriques que dans les cônes ſcalenes, lorſque la ſection eſt perpendiculaire à l'axe. 21

THEOR. II. Une ſection conique donnée peut être celle d'une infinité de cônes differens. 24

CHAP. III. *Des ſections des cylindres coupez par des plans.* 26

THEOR. III. La ſection plane des eſpeces de cylindres qui ont pour baſe une parabole ou une hyperbole eſt une ſection conique de même eſpece. 29

THEOR. IV. La ſection d'un cylindre creux dont l'épaiſſeur eſt par-tout égale, coupé par un plan qui n'eſt pas parallele à ſa baſe, eſt une couronne d'Ellipſe compriſe par deux Ellipſes ſemblables & concentriques, mais non pas équidiſtantes, excepté la ſection ſouſcontraire dans les cylindres ſcalenes, où elle eſt une couronne de cercle. 31

CHAP. IV. *Des ſections planes de quelques corps régulierement irréguliers.* 33

THEOR. V. La ſection d'un ſphéroide & d'un conoide régulier, coupé par un plan perpendiculaire à ſon axe, eſt un cercle, & s'il lui eſt parallele ou oblique elle eſt une Ellipſe. 34

THEOR. VI. La ſection d'un corps cylindrique annulaire dont l'axe eſt courbe en forme de circonference de cercle, & qui eſt coupée par un plan perpendiculaire à celui qui paſſe par l'axe courbe, eſt une Ovale du quatriéme ordre 37

SECONDE PARTIE DU PREMIER LIVRE.

DEs ſections faites à la ſurface des corps par la pénétration d'autres corps.
De la nature des ſections ſolides par la pénetration mutuelle des ſphères, cônes & cylindres. 41

CHAP. V. *Des ſections ſolides des ſphères*, & premierement de leurs variations. 46

THEOR. VII. La courbe qui réſulte de la ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux ſphères, qui ſe pénetrent, eſt la circonference d'un cercle. 47

THEOR. VIII. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'une ſphere & d'un Cylindre Droit, dont l'axe paſſe par le centre de la ſphère, eſt un cercle, 48

* Notez *qu'il y a faute au titre du Livre.*

THEOR. IX. La ſection faite par la rencontre d'une ſphère & d'un cylindre ſcalene, dont l'axe paſſe par le centre de la ſphère, eſt une * Ellipſimbre. 49

Digitized by Google

Pages.

THEOR. X. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'une ſphère & d'un cylindre Droit, qui la pénetre de toute ſa circonference, & dont l'axe ne paſſe pas par le centre de la ſphère eſt une Ellipſimbre. 54

Remarque ſur la difference des cas qui peuvent arriver dans les cylindres ſcalenes. 59

THEOR. XI. La ſection faite par la pénetration d'un cylindre, qui n'entre dans la ſphère que d'une partie de ſa circonference, eſt une Ellipſimbre compoſée. 60

De la rencontre des Surfaces des Sphères avec celle des Cônes

THEOR. XII. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'une ſphère & d'un cône Droit, dont l'axe paſſe par le centre de la ſphère, eſt un cercle. 63

THEOR. XIII. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'une ſphère & d'un cône ſcalene, dont l'axe paſſe par le centre de la ſphère, eſt une Ellipſoidimbre, ou un cercle ſi elle eſt ſouſcontraire. 65

THEOR. XIV. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'une ſphère & d'un cône qui la pénetre de toute ſa circonference, & dont l'axe ne paſſe pas par le centre de la ſphère, eſt une Ellipſoidimbre. Si le cône eſt ſcalene elle peut être un cercle. 66

THEOR. XV. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de la ſphère & d'un cône, dont l'axe ne paſſe pas par le centre de cette ſphère, & qui ne la pénetre pas de toute ſa circonference, eſt une courbe compoſée de deux portions d'Ellipſoidimbres ou d'autres courbes de même nature, appartenant au cercle, à la Parabole ou à l'hyperbole. 71

CHAP. VI. *Des ſections faites par la pénetration des cylindres entr'eux & avec les cônes.*

THEOR. XVI. La ſection faite par la pénetration des cylindres de même nature, égaux ou inégaux, dont les axes ſont égaux en longueur & paralleles entr'eux eſt un parallelograme, *ibid.*

THEOR. XVII. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux cylindres égaux ou inégaux, dont les axes ſe coupent perpendiculairement ou obliquement, & qui ont un diametre égal & ſemblablement poſé ſur un plan par leurs axes, eſt une Ellipſe, & ſi l'un des cylindres eſt droit & l'autre ſcalene, ou tous les deux ſcalenes & de baſes égales elle peut être un cercle. 76

Pages.

THEOR. XVIII. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux cylindres Droits inégaux, dont les axes ſe coupent perpendiculairement, eſt un cicloidimbre. 77

THEOR. XIX. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux cylindres inégaux, dont les axes ſe coupent obliquement & qui ſe pénetrent, de ſorte que l'un entre dans l'autre de toute ſa circonference, eſt une Ellipſimbre. 81

THEOR. XX. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux cylindres, dont l'un pénetre l'autre de toute ſa circonference perpendiculairement ou obliquement à ſes cotez ſans que leurs axes ſe rencontrent, eſt une Ellipſoidimbre. 84

THEOR. XXI. La ſection faite pas la rencontre des ſurfaces de deux cylindres, dont l'un ne pénetre l'autre que d'une partie de ſa circonference, & dont les axes ne ſont pas paralleles, eſt une Ellipſimbre compoſée. 88

Des ſections faites par la rencontre des ſurfaces des Cônes & des Cylindres qui ſe pénetrent.

THEOR. XXII. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'un cône & d'un cylindre Droit ou d'un cône & d'un cylindre ſcalene de même obliquité ſur leurs baſes dont les axes ſe confondent, eſt un cercle. 91

THEOR. XXIII. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'un cylindre & d'un cône qui ne ſont pas de même nature, c'eſt-à-dire, dont l'un eſt Droit & l'autre ſcalene, & dont les axes ſe confondent, eſt une Ellipſoidimbre. 92

THEOR. XXIV. La ſection faite par la pénetration d'un cylindre & d'un cône, dont les axes ſe coupent obliquement peut être dans un ſeul cas une Ellipſe plane. 98

THEOR. XXV. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'un cône & d'un cylindre qui ſe pénetrent, enſorte que les axes de ces deux corps ſe croiſent ou ſoient paralleles entr'eux, eſt un e Ellipſimbre. 95

THEOR. XXVI. La ſection faite par la pénetration d'un cône dans un cylindre eſt une Ellipſoidimbre. 98

CHAP. VII. *Des ſections faites par la pénetration des cônes entr'eux.* 102

THEOR. XXVII. Les ſections faites par la pénetration de deux cônes inégaux [s'ils ſont Droits] où les côtez ſemblables [s'ils ſont ſcalenes] ſe coupent à diſtances égales de leurs ſommet, ſont des ſections planes 103

THEOR. XXVIII. La ſection faite par la pénetration des

Digitized by Google

Pages

cônes droits inégaux, dont les axes ſe confondent, ou des cônes ſcalenes inégaux, dont les axes ſe confondent & ſont également inclinez à leurs baſes, eſt un cercle. 105

THEOR. XXIX. La ſection faite par la pénetration de deux cônes inégaux mais ſemblables, dont les axes & les côtez ſont paralleles entr'eux eſt un paraboloidimbre 106

THEOR. XXX. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux cônes qui ſe pénetrent, dont les axes ſont paralleles & dont les côtez d'un des triangles par l'axe rencontrent celui de l'autre [prolongé s'il le faut] eſt une Ellipſoidimbre. *ibid.*

THEOR. XXXI. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux cônes, dont les axes ſe coupent perpendiculairement ou obliquement, enſorte que les côtez prolongez de l'un ou de l'autre ne ſe rencontrent pas au deſſus & au deſſous du ſommet d'un d'entr'eux, eſt une Ellipſoidimbre. 107

THEOR. XXXII. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux cônes dont les axes ſe coupent obliquement, & dont un côté d'un des triangles par l'axe rencontre les deux de l'autre triangle, qui eſt dans le méme plan où un des côtez étant prolongé au deſſus de ſon ſommet eſt une hyperboloidimbre dans l'un & l'autre cône. 108

THEOR. XXXIII. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux cônes, dont les axes ſe coupent obliquement & dont un des côtez des triangles par l'axe eſt parallele à un des côtez de l'autre triangle de la ſection par l'axe de l'autre cône eſt une courbe équivalemment differente dans chaque cône, ſçavoir une hyperboloidimbre dans l'un des cônes & un paraboloidimbre dans l'autre, ſelon que l'un des deux cônes ſurpaſſe ou eſt ſurpaſſé par l'autre dans l'allignement de ces côtez. 109

CHAP. VIII. *Des ſections faites à la ſurface des Sphéroides pénetrez par des Spheres, Cônes ou Cylindres.*

THEOR. XXXIV. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'une ſphéroide avec celle d'une ſphère, d'un cylindre & d'un cône, qui le pénetrent ou qui en ſont pénetrez, de maniere que les axes de ces corps ſe confondent, eſt un cercle. 111

THEOR. XXXV. La ſection faite par la rencontre d'une ſphère & d'un ſphéroide, dont l'axe ne paſſe pas par le centre de la ſphére eſt une eſpece d'Ellipſoidimbre, c'eſt-

Pages.
à-dire, une courbe à double courbure, dont on peut marquer quelque raport conſtant à une Ellipſe. 112
THEOR. XXXVI. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'un cylindre Droit & d'un ſphéroide, dont l'axe eſt perpendiculaire à celui d'un cylindre eſt un cycloimbre. 115
THEOR. XXXVII. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'un cylindre & d'un ſphéroide, dont les axes ne ſe rencontrent pas, eſt une eſpece d'Ellipſimbre, & peut être une Ellipſe dans certains cas. 116
THEOR. XXXVIII. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'une ſphéroide & d'un cône, dont l'axe rencontre celui du ſphéroide perpendiculairement ou obliquement, eſt ordinairement une courbe à double courbure telle qu'eſt l'Ellipſoidimbre; mais dans certains cas elle peut être une Ellipſe plane. 117

LIVRE SECOND.

De la deſcription des Lignes courbes formées par la ſection des Corps. 119

PREMIERE PARTIE.

De la Deſcription des Sections planes ſur des Plans. 120

CHAP. I. *De la deſcription du Cercle.* 121

PROBLEME I. Par trois points donnez tracer un arc de cercle par pluſieurs autres points trouvez ſans le ſecours du centre. 121

CHAP. II. *De l'Ellipſe premierement conſiderée comme étant faite.*

PROBL. II. Trouver 1°. le centre. 2°. Les diametres conjuguez. 3°. Les axes. 4°. Les foyers d'une Ellipſe donnée. 129
PROB. III. Par un point donné mener une tangente à une Ellipſe donnée. 130

De l'Ellipſe conſiderée comme à faire.

PROBL. IV. un diametre quelconque & une ordonnée à ce diametre étant donné trouver ſon conjugué. 132
PROBL. V. Les diametres conjuguez étant donnez trouver les axes de l'Ellipſe. *ibid.*
PROBL. VI. Un axe & un point à la circonference de l'Ellipſe étant donnez trouver l'autre axe. 134
PROBL. VII. Les axes d'une Ellipſe étant donnez, la décrire par pluſieurs points ou par un mouvement continu. 135

PROBL. VIII.

Digitized by Google

Pages.

PROB. VIII. Les diametres conjuguez étant donnez tracer l'Ellipſe par pluſieurs points ou par un mouvement continu ſans connoitre les axes ni les foyers. 142

PROB. IX. Alonger ou racourcir les Ellipſes en telle raiſon qu'on voudra, enſorte qu'elles ſoient toujours les ſections d'un même cylindre. 145

De la Parabole.

PROB. X. L'axe d'une parabole & un point à ſa circonference étant donnez, la tracer par pluſieurs points & par un mouvement continu. 148

De l'Hyperbole.

Notez *qu'il y a faute au titre,* X. *au lieu de* XI. PROB. XI. Le centre, le ſommet & un point au contour de l'hyperbole étant donnez la décrire par pluſieurs points & par un mouvement continu. 151

PROB XII. Etant donnez le centre, le ſommet & une ordonnée à l'hyperbole, ou ſeulement un premier diametre & une ordonnée, trouver les aſymptotes & la décrire par pluſieurs points. 153

PROB. XIII. Par cinq points donnez qui ne ſoient pas en ligne droite tracer une ſection conique quelconque par un mouvement continu, ſans en connoitre les axes, les diametres, les centres ni les foyers. 156

NB. XV. *au lieu de* XIV. PROB. XIV. Deux touchantes avec les points d'atouchement à une ſection conique & la direction d'un ſeul diametre étant donnez, trouver autant de points que l'on voudra de cette courbe ſans connoitre le centre de la ſection, ni la grandeur d'aucun diametre. *ibid.*

NB. XIV. *au lieu de* XV PROB. XV. Trois tangentes à une ſection conique & leur point d'atouchement étant donnez trouver celle des ſections qui doit les toucher, & les lignes néceſſaires pour la décrire. 159

CHAP. III. *De la Deſcription de quelques Courbes uſuelles dans l'Architecture, leſquelles ne ſont pas des Sections Coniques.*

PROB. XVI. Tracer une ovale du quatriéme ordre formée par la ſection plane d'un corps cylindrique, annulaire, horiſontal ou rampant, c'eſt-à-dire, héliçoide. 162

De la Spirale.

PROB. XVII. Tracer la ſpirale la plus ſimple & la plus uniforme, qu'on appelle la ſpirale d'Archimede. 165

PROBL. XVIII. Alonger ou racourcir le contour de la ſpirale en telle raiſon que l'on voudra. 167

Pag.

Des Arcs Rampans.

Faute, *le Chiffre omis.* PROBL. XIX. Changer en Arc rampant un arc de cercle ou d'une courbe quelconque. 174

Des Courbes qui conviennent à ces ſortes de Voûtes & d'Arcades qu'on appelle, Arcs Rampans. 176

PROBL. XX. La direction des piedroits, la ligne de rampe & celle de ſommité d'un arc rampant étant donnez décrire la ſection conique qui doit lui ſervir de ceintre. 178.

CHAP. IV. *De l'Imitation des Courbes régulieres par des compoſitions d'Arcs de Cercles.* 181

PROBL. XXI. Deux axes étant donnez imiter une Ellipſe par un aſſemblage de quatre arcs de cercles. 182

PROBL. XXII. Imiter par deux arcs de cercles les portions d'Ellipſes faites ſur deux diametres qui ne ſont pas des axes conjuguez, dont l'un eſt terminé par deux tangentes à ſes extrémitez, & dont le conjugué eſt déterminé par une troiſiéme tangente donnée de poſition. 183

PROBL. XXIII. La difference de hauteur des impoſtes & l'intervale horiſontal des piedroits d'un arc rampant étant donnez tracer un ceintre compoſé d'autant d'arcs de cercles que l'on voudra inégaux en rayons, mais égaux en nombre de degrez, ou ſi l'on veut d'une partie de plus

* Faute IV. *au lieu de* V. avec certaines circonſtances. 187

PROBL. XXIV. Imiter la ſpirale par des portions d'arcs de cercles. 188

* CHAP. V. *De la Diviſion des Sections coniques par des lignes* droites perpendiculaires à leurs arcs. 1.° Pour le cercle. 191

Faute XXVI. *au lieu de* XXV. PROBL. XXV. Par un point donné tirer une perpendiculaire à un arc de cercle dont on ne connoit pas le centre. *ibid.*

LEMME. La perpendiculaire ſur le milieu de la corde d'un arc de ſection conique, autre que le cercle, & qui n'eſt pas un des axes, eſt oblique à cet arc. 193

Suite de Faute. PROBL. XXVI. Par un point donné à la circonference d'une ſection conique, tirer une perpendiculaire à ſon arc. 194

Suite. PROBL. XXVII. Par un point donné hors de la circonference d'une ſection conique lui mener une perpendiculaire. 196

Pour les Spirales.

Suite. PROBL. XXVIII. Par un point donné au contour de la ſpirale tirer une perpendiculaire à ſon arc. 199

Des Diviſions de quelqu'autres Courbes uſuelles par des perpendiculaires à leurs arcs. 204

Digitized by Google

SECONDE PARTIE DU SECOND LIVRE.

* CHAP. VI. *De la Deſcription des Sections des Corps, qui ne doivent ou ne peuvent être décrites que ſur des Surfaces Concaves ou Convexes, & de la Projection.*

*Faute V.

THEOREME. Les projections des lignes courbes qui ſont dans un plan perpendiculaire à un ou pluſieurs autres plans de deſcription ſont des lignes droites, dont les diviſions faites par des paralleles menées par pluſieurs points de ces courbes ſont toujours en même proportion avec les abſciſſes coordonnées. 207

THEOR. La projection d'un cercle qui n'eſt pas parallele à ſon plan de deſcription eſt une Ellipſe, & au contraire celle de l'Ellipſe peut être un cercle, & celle des Ellipſes, paraboles ou hyperboles eſt une courbe d'une même eſpece plus ou moins alongée. 209

De la Deſcription du Cercle ſur les ſurfaces concaves ou convexes de la Sphère, du Cône & du Cylindre.

Suite. PROBL. XXIX. Par deux points donnez ſur la ſurface d'une ſphère décrire un cercle. 211

PROBL. XXX. Par un point donné ſur la ſurface d'un cylindre tracer un cercle. 215

PROBL. XXXI. Par un point donné à la ſurface d'un cône faire paſſer un cercle. 219

PROBL. XXXII. Etant donné un cône Droit ſur une baſe Elliptique trouver la poſition d'un plan incliné ſur l'Ellipſe, dont la ſection dans le cône ſoit un cercle. 223

De la deſcription de l'Ellipſe ſur le Cylindre & le Cône.

PROBL. XXXIII. Le grand axe d'une Ellipſe avec un point à la ſurface du cylindre, dont la diſtance à un des axes eſt connuë, étant donnez y tracer une Ellipſe. 228

PROBL. XXXIV. Un point étant donné à la ſurface du cône qui ſoit à l'extremité du grand axe de l'Ellipſe donné, ou d'une ordonnée connuë, tracer l'Ellipſe ſur la ſurface courbe du cône. 230

PROBL. XXXV. Un point étant donné à la ſurface d'un cône pour ſommet d'une parabole, décrire cette Courbe ſur la ſurface concave ou convexe. 233

PROBL. XXXVI. Le premier axe d'une hyperbole & un point qui ſoit une de ces extrémitez étant donné à la

Pages.
ſurface du cône tracer cette Courbe ſur la ſurface concave ou convexe. 234

TROISIEME PARTIE DU SECOND LIVRE.

CHAP. VII, *Des Sections qui ne peuvent être décrites que ſur des Surfaces courbes & par le moyen de la projection ſur des ſurfaces planes.* 238

PROBL. GENER. trouver tant de points que l'on voudra du contour des Courbes à double courbure, faites à la ſurface des ſphères, cônes & cylindres qui ſe pénetrent mutuellement. *ibid.*

Suite de faute. PROBL. XXXVII. Tracer un cicloimbre ſur deux cylindres inégaux, qui ſe pénetrent à angle droit. 240

PROBL. XXXVIII. Tracer une Ellipſimbre formée par la ſection d'une ſphère, pénetrée par un cylindre, dont l'axe ne paſſe pas par le centre de la ſphère. 242

PROBL. XXXIX. Les diametres des deux cylindres inégaux qui ſe pénetrent, & l'inclinaiſon de leurs axes qui ſe rencontrent étant donnez tracer l'Ellipſimbre formée par la rencontre de leurs ſurfaces. 245

PROBL. XL. Les diametres de deux cylindres qui ſe pénetrent de toute leur circonference ſans que leurs axes ſe rencontrent, & l'inclinaiſon de leurs côtez entr'eux étant donnée, tracer l'Ellipſimbre formée par la rencontre de leurs ſurfaces. 247

PROBL. XLI. La poſition d'un cylindre dans un cône qu'il pénetre étant donnée, décrire l'Ellipſimbre formée par la rencontre de leurs ſurfaces. 250

Des Ellipſimbres compoſées.

PROBL. XLII. Tracer une Ellipſimbre compoſée, formée par la pénetration d'une ſphère & d'un cylindre, dont la circonference n'entre qu'en partie dans la ſphère. 257

PROBL. XLIII. Tracer une Ellipſimbre compoſée, formée par la pénetration de deux cylindres, dont la circonference de l'un n'entre qu'en partie dans l'autre. 258

Des Ellipſoidimbres.

PROBL. XLIV. Tracer une Ellipſoidimbre formée par la pénetration de la ſphère & du cône, dont l'axe ne paſſe pas par le centre de la ſphère. 261

PROBL. XLV. Décrire une Ellipſoidimbre formée par la pénetration du cône dans le cylindre, à la rencontre de leurs ſurfaces. 262

PROBL. XLVI. Décrire une Ellipſoidimbre formée par l'in-

Digitized by Google

Pages.

terſection des ſurfaces de deux cônes, dont les axes ſe coupent. 264
PROBL. XLVII. Tracer une Ellipſoidimbre compoſée ſur les ſurfaces du cône & de la ſphère qui ſe pénetrent. 264

De la Deſcription des Helices & Limaces.

PROBL. XLVIII. Tracer une helice ſur un corps cylindrique. 266
PROBL. XLIX. Tracer une limace ſur un cône ou ſur une ſphère ou ſphéroide. 267

LIVRE TROISIEME.

CHAP. I. *De la deſcription de la Diviſion des Solides*, 269
CHAP. II. De l'arrangement des deſſeins dans l'épure. 271
De la projection en general. 272
De l'Ichnographie ou du *Plan.* 275
Des differences reſpectives des ceintres. *ibid.*
De l'Arc-Droit. 277
Régles du Deſſein de l'épure. 279
Remarque ſur le choix du ceintre primitif. *ibid.*
2.e Régle du *Plan.* 280
3.e Régle. 281
4.e Régle. 282
5.e Régle. 284
PROBL. I. Par un point donné auprès de deux lignes convergentes, en mener une troiſiéme qui tende au même ſommet de l'angle qu'elles feroient ſi elles étoient prolongées. 286
6.e Régle. 287
7.e Régle. *ibid.*
8.e Régle. 288
CHAP. III. *De l'Ortographie*, 1°. *Du Profil.* 289
Premiere régle pour les voûtes cylindriques. *ibid.*
2.e Régle. 290
3.e Régle. 291
Des profils des berceaux à double obliquité. 292
PROBL. II. Réduire toutes les differentes obliquitez de biais, de talud & biais, de biais & deſcente, de deſcente, talud & biais, en une ſeule, pour ne faire qu'un profil qui exprime toutes ces obliquitez & conſerve les meſures que l'on y doit prendre. 293
Des profils des voûtes coniques. 298
Quatriéme régle. 299
PROBL. III. Tracer le profil d'une voûte conique à dou-

Pages.
ble ou triple obliquité de biais, talud & deſcente. 301
Remarque ſur les profils en general. 303
De l'élevation. 304
CHAP. IV. Des moyens de faire les plans, profils & élevations des figures irrégulieres. 305
PROBL. IV. Tracer ſur un plan un contour égal à une ſection d'un corps quelconque, *ou en Termes de l'Art*, lever un profil. 308
De la ſuppoſition des ſurfaces planes, *en termes de l'Art*, des Doeles plates. 309
De la ſuppoſition des ſurfaces cylindriques, de baſe quelconque, pour parvenir à la formation des ſurfaces terminées par des courbes à double courbure. 311
CHAP. V. De l'épipedographie, *en termes de l'Art*, du dévelopement. 319.
PROBL. V. Trouver une ſuite de lignes droites qui approchent de plus en plus de la rectification d'un arc de cercle donné tant en deſſus qu'en deſſous. 320
Faute III. Du dévelopement des corps compris par des ſurfaces planes. 321
PROBL. VI. Faire le dévelopement d'une pyramide quelconque droite ou ſcalene. 323
Faute V. PROBL. VII. La baſe, la hauteur & la projection du ſommet d'un cône ſcalene étant données, déterminer le plus long & le plus petit côté de ſa ſurface. 326
Remarques ſur certains points des courbes dévelopées ſur le cône.
Du dévelopement des Priſmes. 330
COROL. Faire le dévelopement du cylindre ſcalene. 331
Des dévelopemens compoſez de deux ou trois eſpeces de ſurfaces d'un corps coupé en pluſieurs parties dans ſon épaiſſeur, comme ſont dans les voûtes celles des Doeles, des lits, & même des extrados. 334
Remarque ſur les dévelopemens compoſez. 336
Du dévelopement des Polyedres & de la ſphère. 338
Remarques ſur l'uſage des dévelopemens. 340
PROBL. VIII. Le diamétre de la baſe d'un cône Droit tronqué, & l'inclinaiſon d'un côté ſur ce diametre étant donnez, trouver autant de points que l'on voudra à la circonference de la couronne de cercle, qui en exprime le dévelopement ſans en avoir le centre, ou ce qui eſt la méme choſe le ſommet du cône. *ibid.*
Du dévelopement des hélices. 342
LEMME. Le dévelopement d'une hélice cylindrique régu-

Page.
liere ſur la ſurface du cylindre Droit, dévelopé, eſt une ligne droite, celui des irrégulieres de la ſeconde eſpece & des Limaces eſt une ligne courbe. 343
Probl. IX. Faire le dévelopememt d'une helice quelconque ſur une ſurface cylindrique ou conique dévelopée. 345
Probl. X. Les élevations de deux faces oppoſées dans des plans paralleles entr'eux étant données en projection ſur un même plan vertical, & la projection horiſontale de leurs intervales étant donnée, trouver la figure de chaque partie de dévelopement des ſurfaces d'une voûte diviſée en pluſieurs vouſſoirs tant apparente qu'intérieure. 346
Premier exemple, des voûtes coniques Droites. 347
2.e Exemple, des voûtes coniques ſcalenes à double obliquité, telles ſont les deſcentes biaiſes ébraſées. 351
Probl. XI. La projection horiſontale d'un polyedre & de ſes diviſions étant donnée avec l'élevation de ſes faces, trouver toutes les ſurfaces dont chacune de ces parties eſt envelopée. 356
Premier exemple d'un berceau Droit ou biais. 357
2.e Exemple d'un berceau en deſcente. 359
3.e Exemple d'une voûte en canoniere en deſcente. 363
4.e Exemple d'une voûte ſphérique réduite en polyedre par les doeles plates. 365
CHAP. V. *De la Goniographie* ou deſcription des angles, *en termes de l'Art*, des moyens de trouver les biveaux. 368
Lemme. L'angle d'inclinaiſon de deux ſurfaces quelconques, planes ou courbes, meſuré par des lignes obliques à leur commune ſection, eſt plus aigu que celui qui eſt meſuré par des perpendiculaires à cette commune ſection, menées à un même point. 170
Probl. XII. Trois angles plans, qui forment un angle ſolide étant donnez, trouver les angles d'inclinaiſon de ces plans entr'eux, *ou en termes de l'Art pour la Coupe des Pierres*, trois panneaux étant donnez trouver les biveaux de leurs aſſemblages. 372
Seconde maniere en réduiſant les plans donnez en triangles pour en former des pyramides. 374
Probl. XIII. Deux angles rectilignes perpendiculaires entr'eux, qui ont leur ſommet commun & un côté de l'un dans le plan de l'autre, trouver l'angle des deux plans qui peuvent paſſer par leurs côtez. 377
De la ſituation des angles des plans, *à l'égard de l'horiſon.* 378

Page.

LEMME. Un angle rectiligne en ſituation quelconque, eſt égal à la ſomme ou au ſupplement à deux droits, des angles que ſes côtez prolongez font avec une ligne horiſontale ou une verticale. 378

PROBL. XIV. Trouver les biveaux de toutes ſortes de voûtes ſans former le ceintre de l'Arc-Droit. 382

Premierement, ceux de lit & de doele. *ibid.*

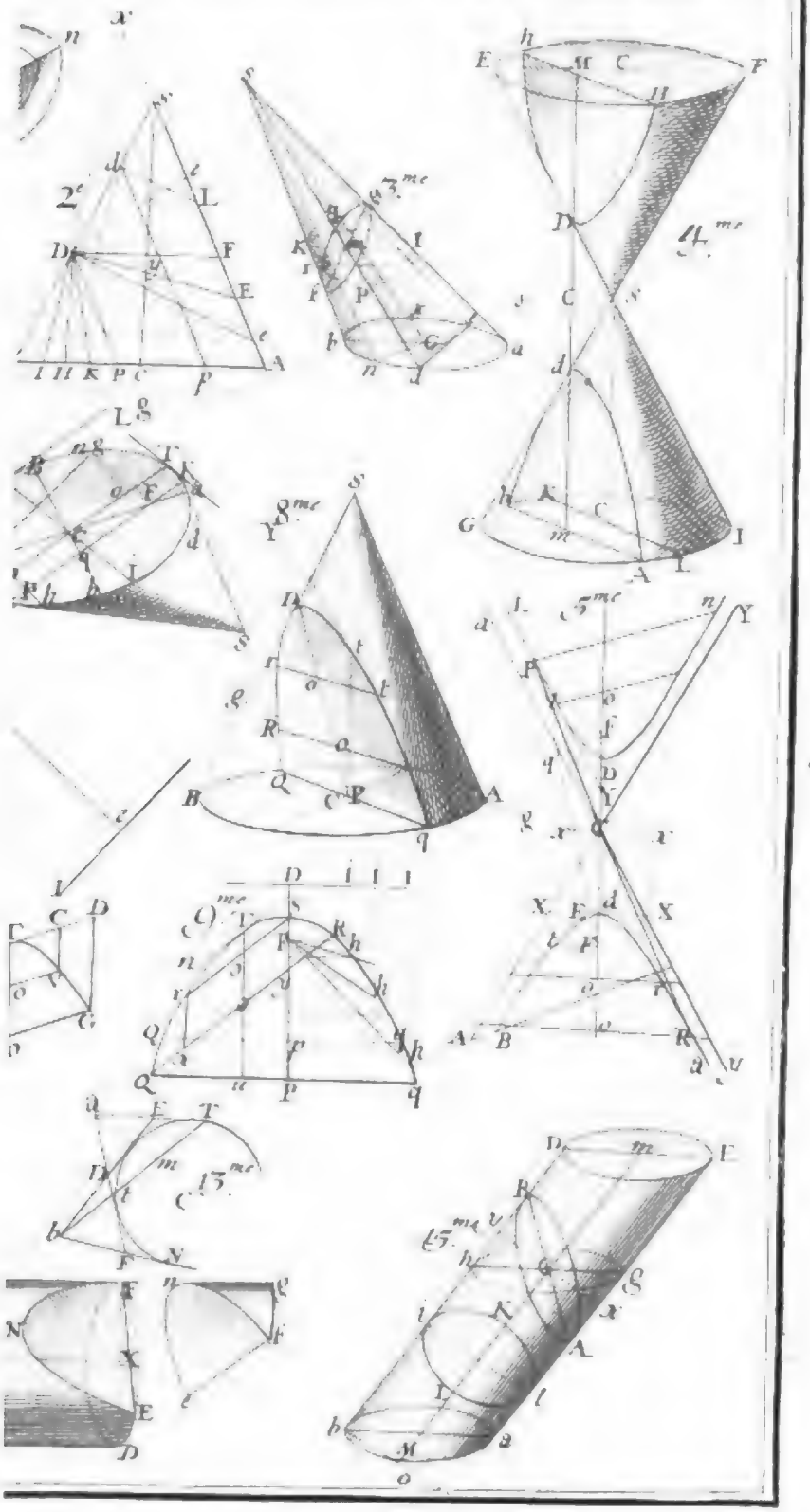
Premier cas, *pour les voûtes en berceau de niveau.* *ibid.*

Second cas *pour les berceaux en deſcente.* *ibid.*

Secondement pour les voûtes coniques. 383

Troiſiémement pour les angles ſaillans ou rentrans faits par la rencontre de deux berceaux. 384

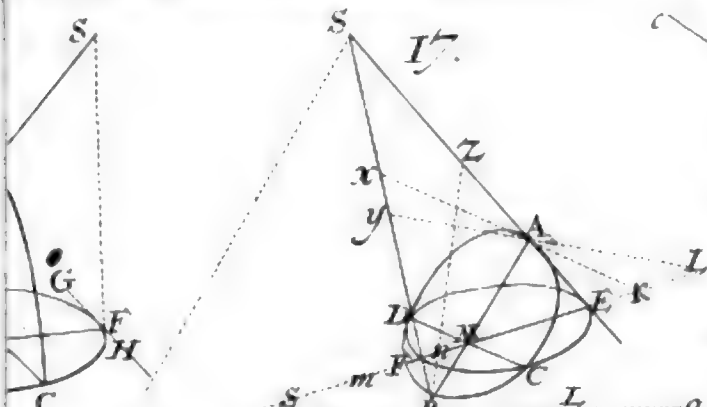
F I N.



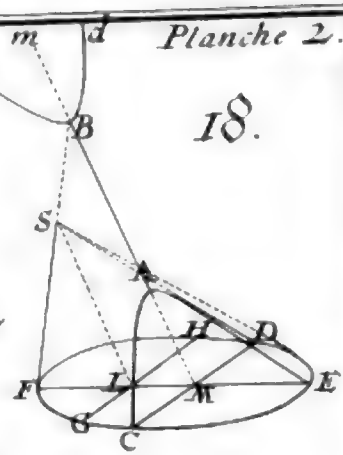
Digitized by Google

Digitized by Google

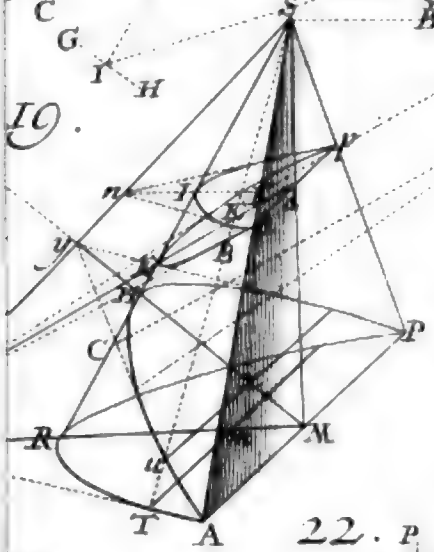
17.



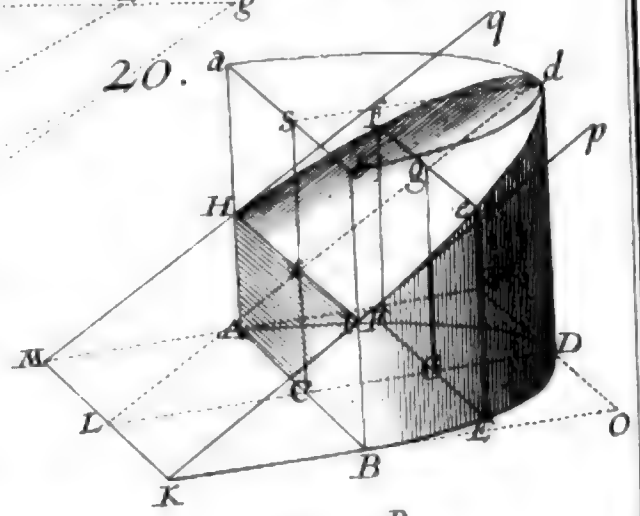
18.



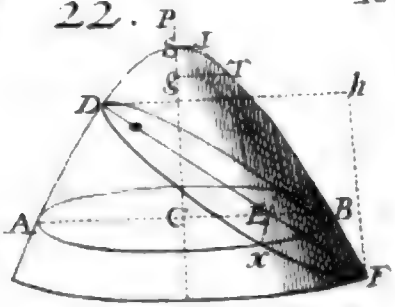
19.



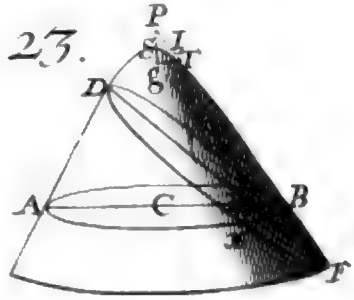
20.



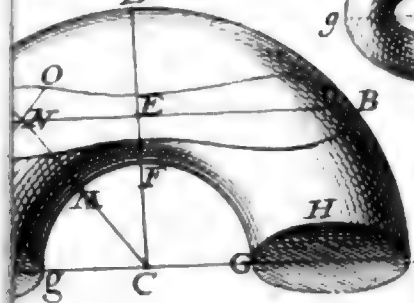
22.



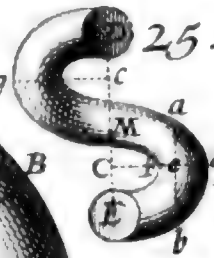
23.



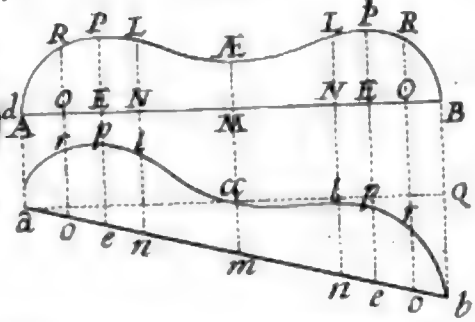
24.



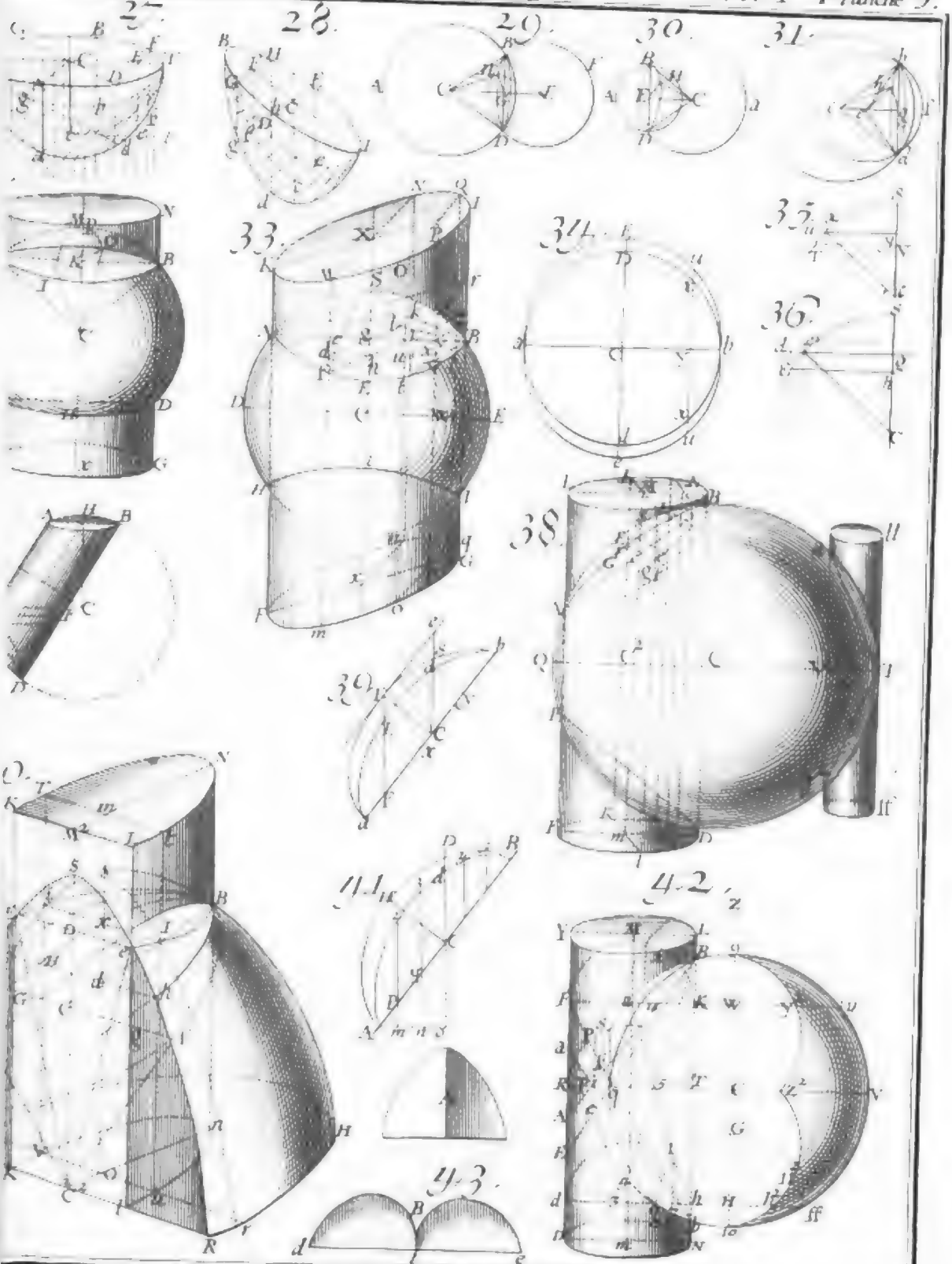
25.



26.

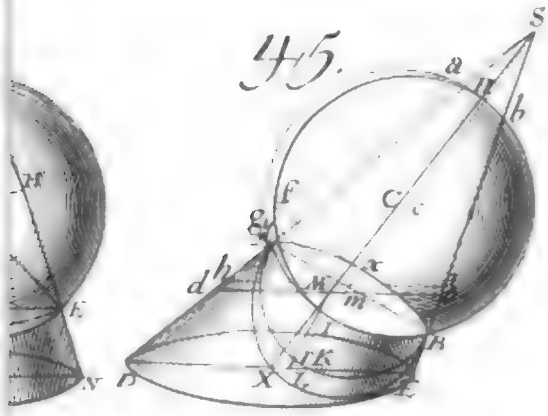


Digitized by Google

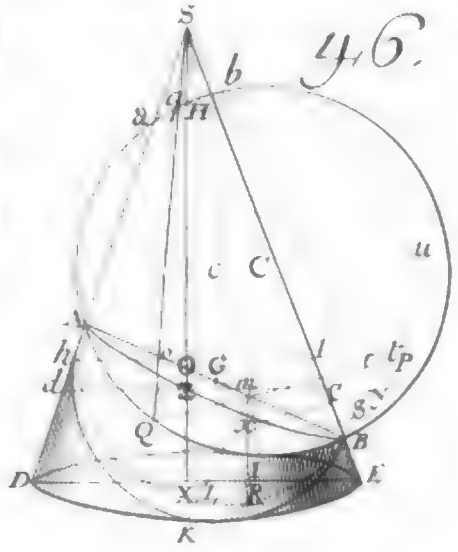


Digitized by Google

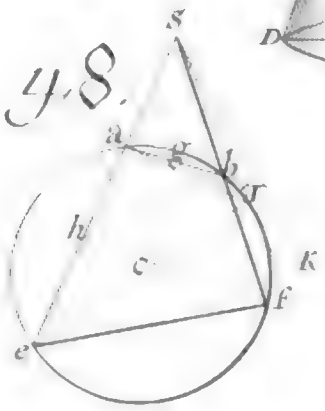
45.



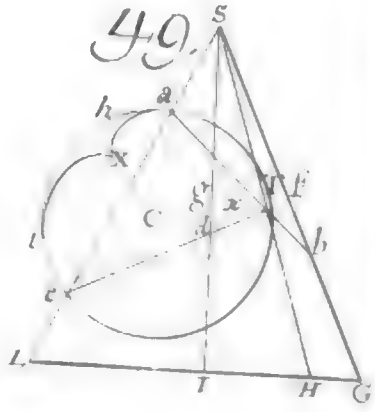
46.



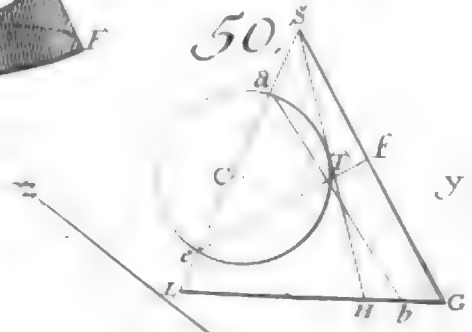
48.



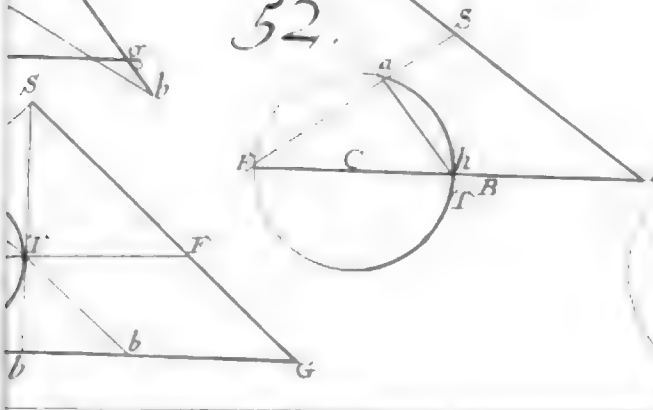
49.



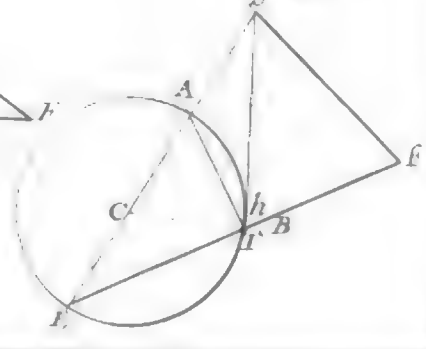
50.



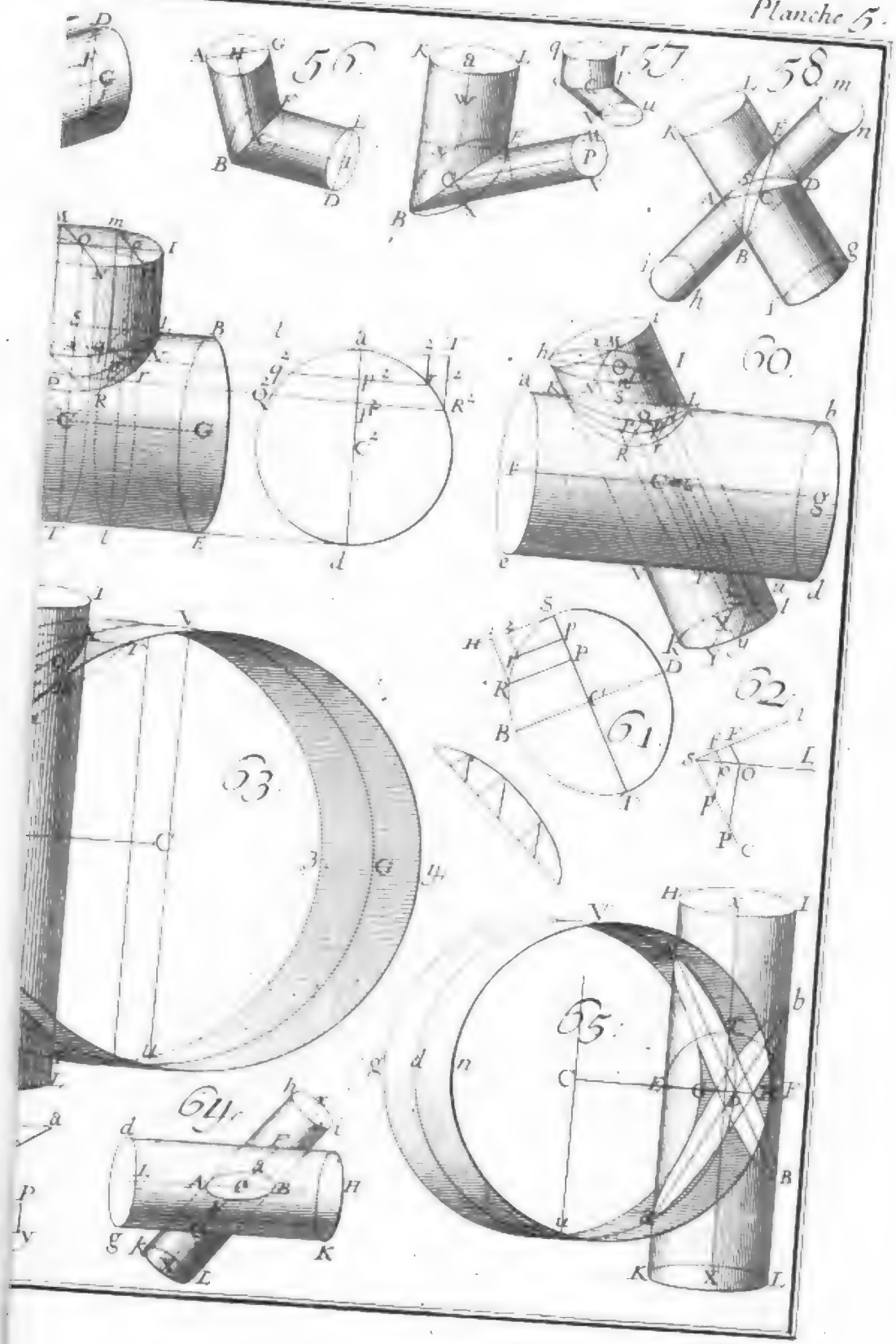
52.



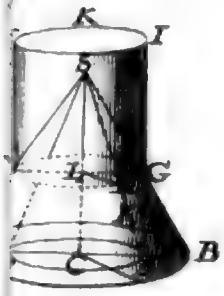
53.

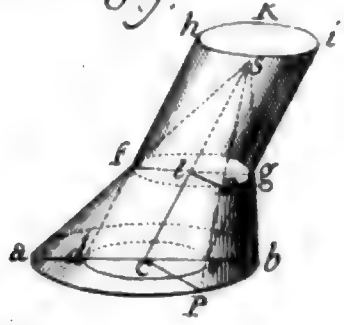


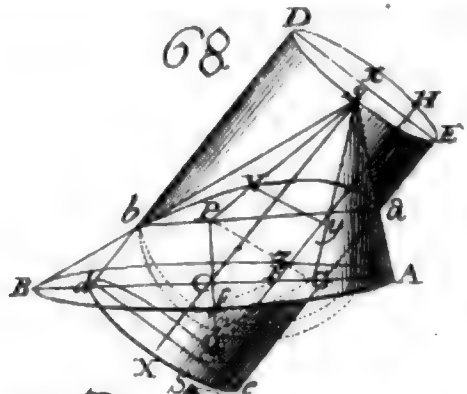
Digitized by Google

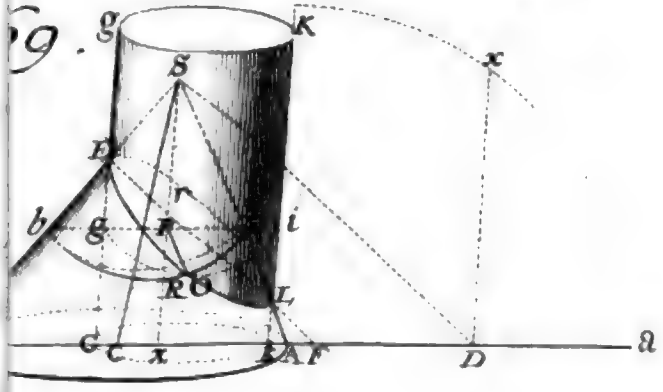

56
57
58
59
60
61
62
63
64
65

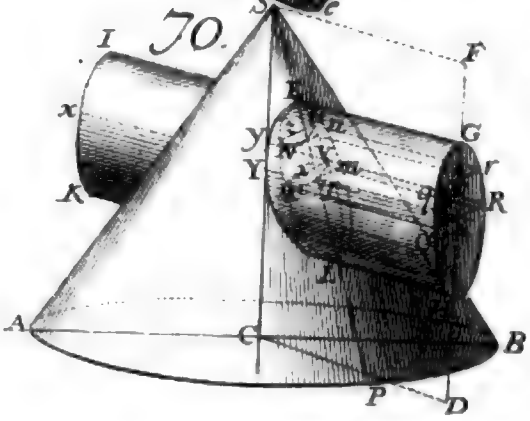
Digitized by Google

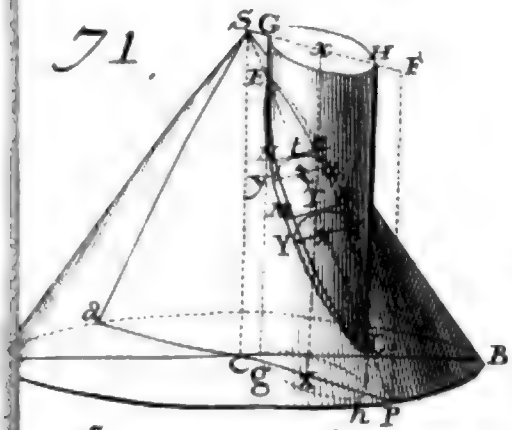


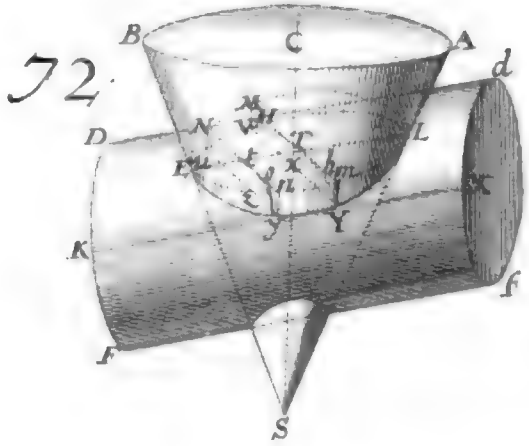


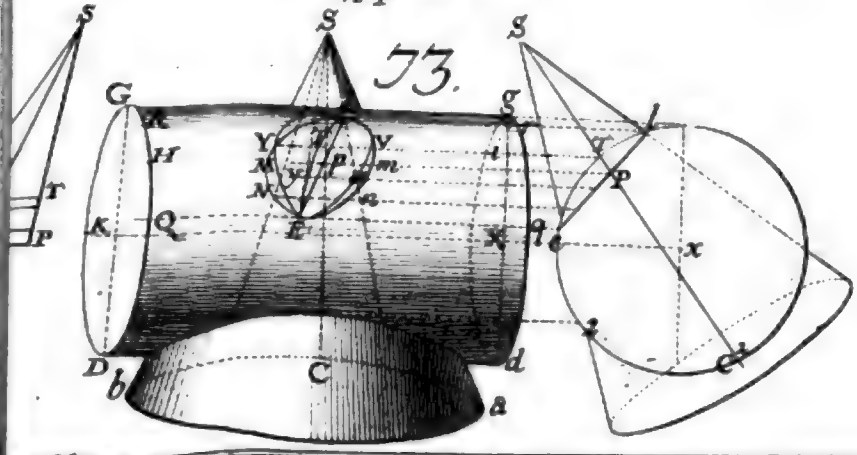


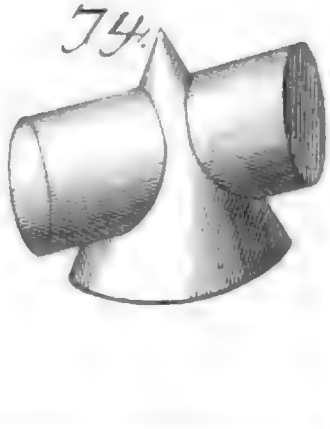


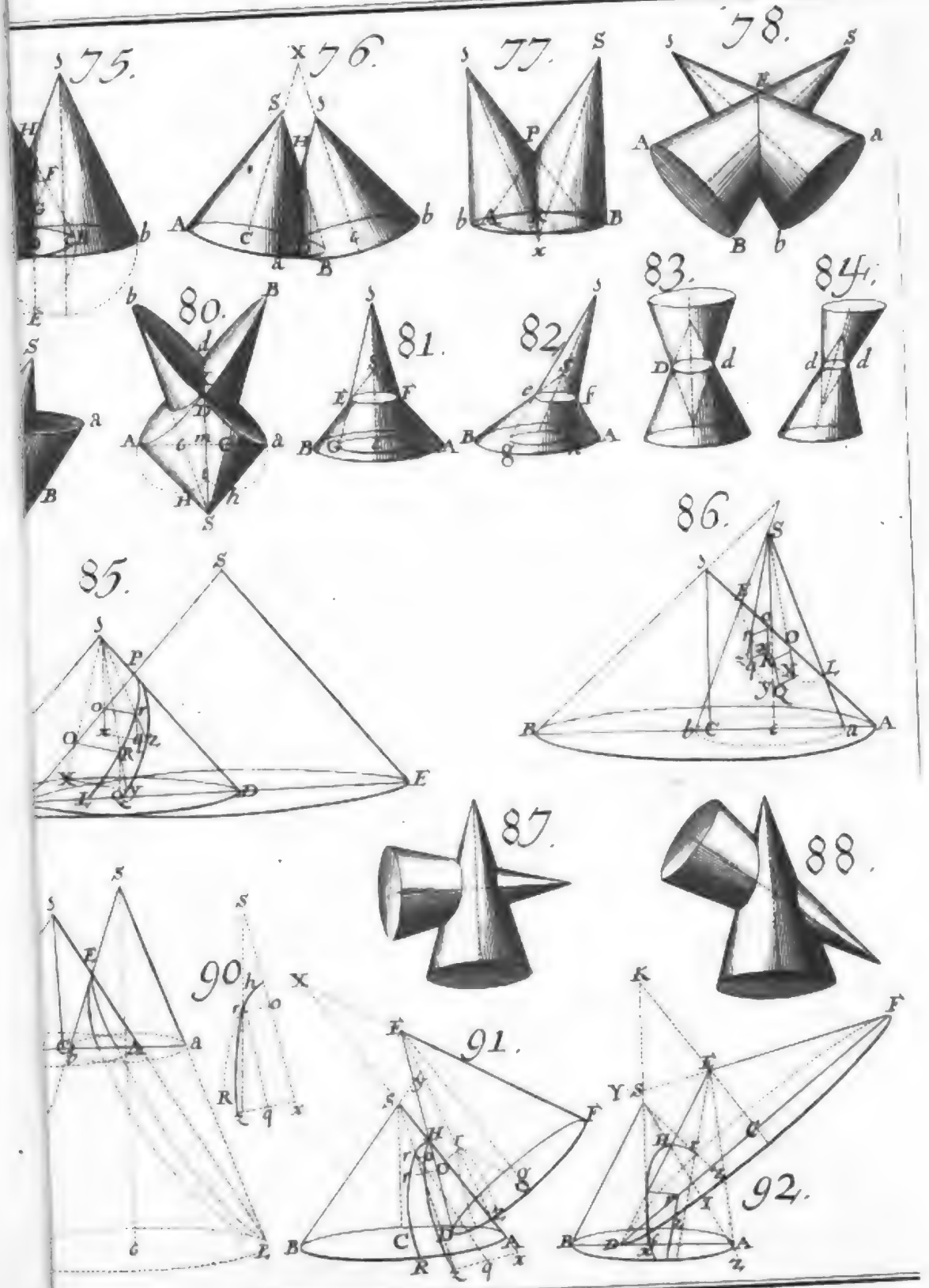










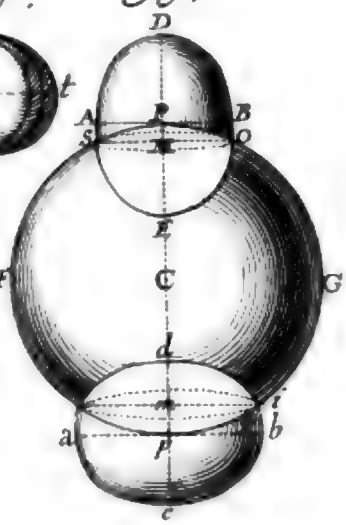


Digitized by Google

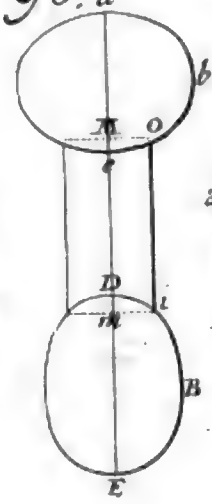
Digitized by Google

94.

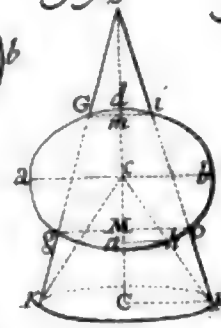
95.



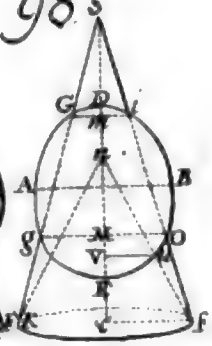
96.



97.

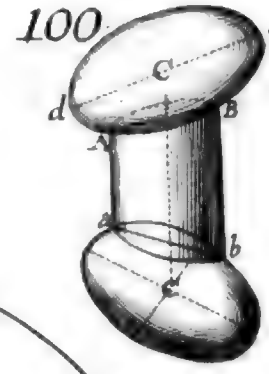


98.

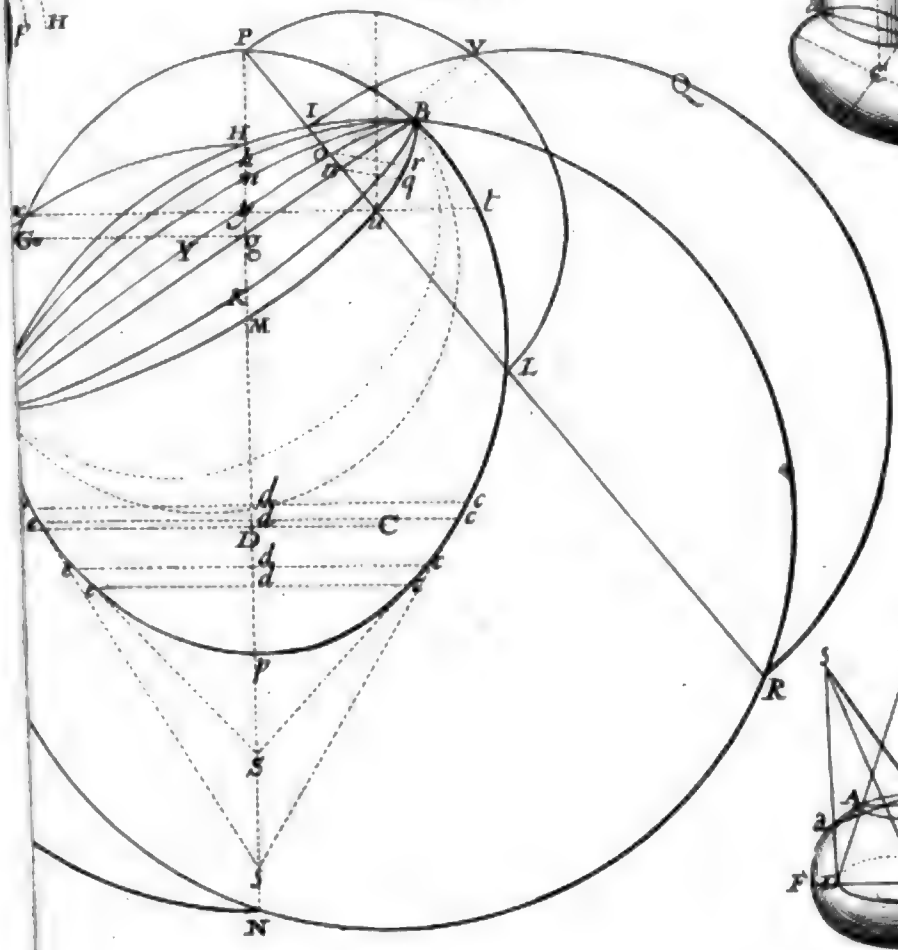


99.

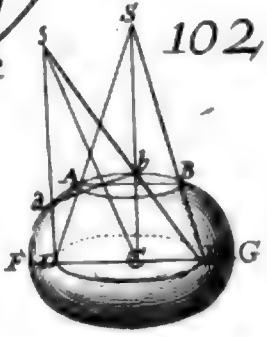
100.



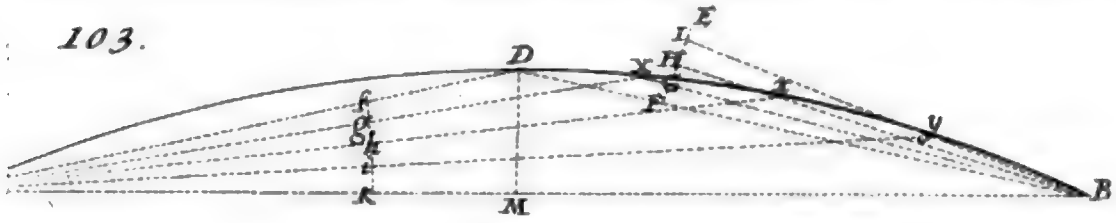
101.



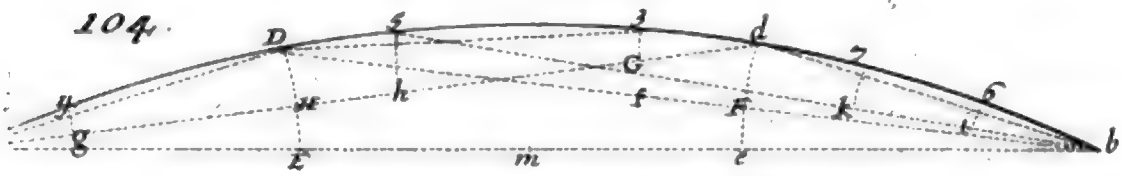
102.

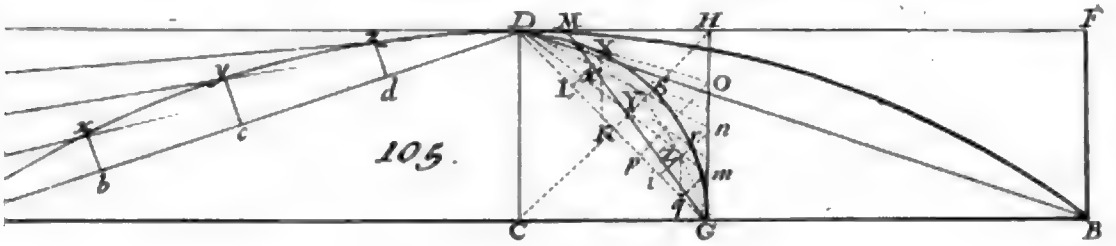


103.



104.

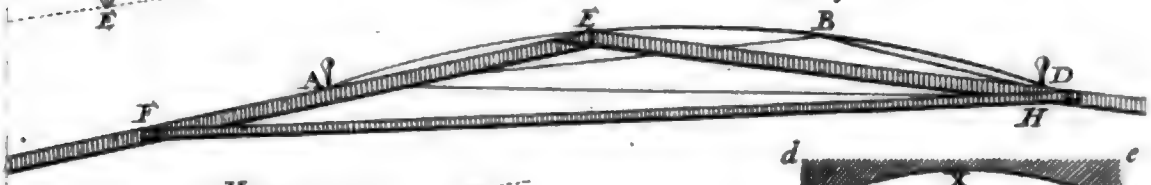




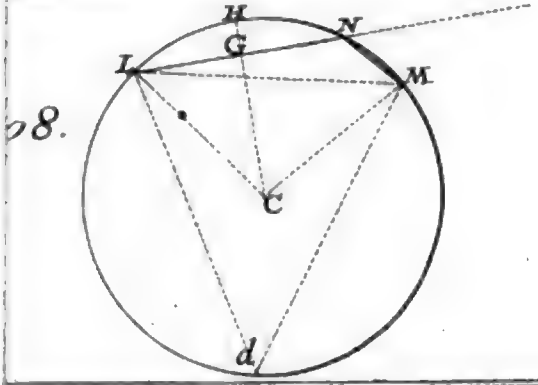
105.

106.

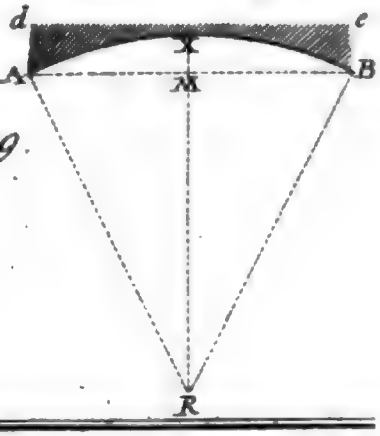
107.

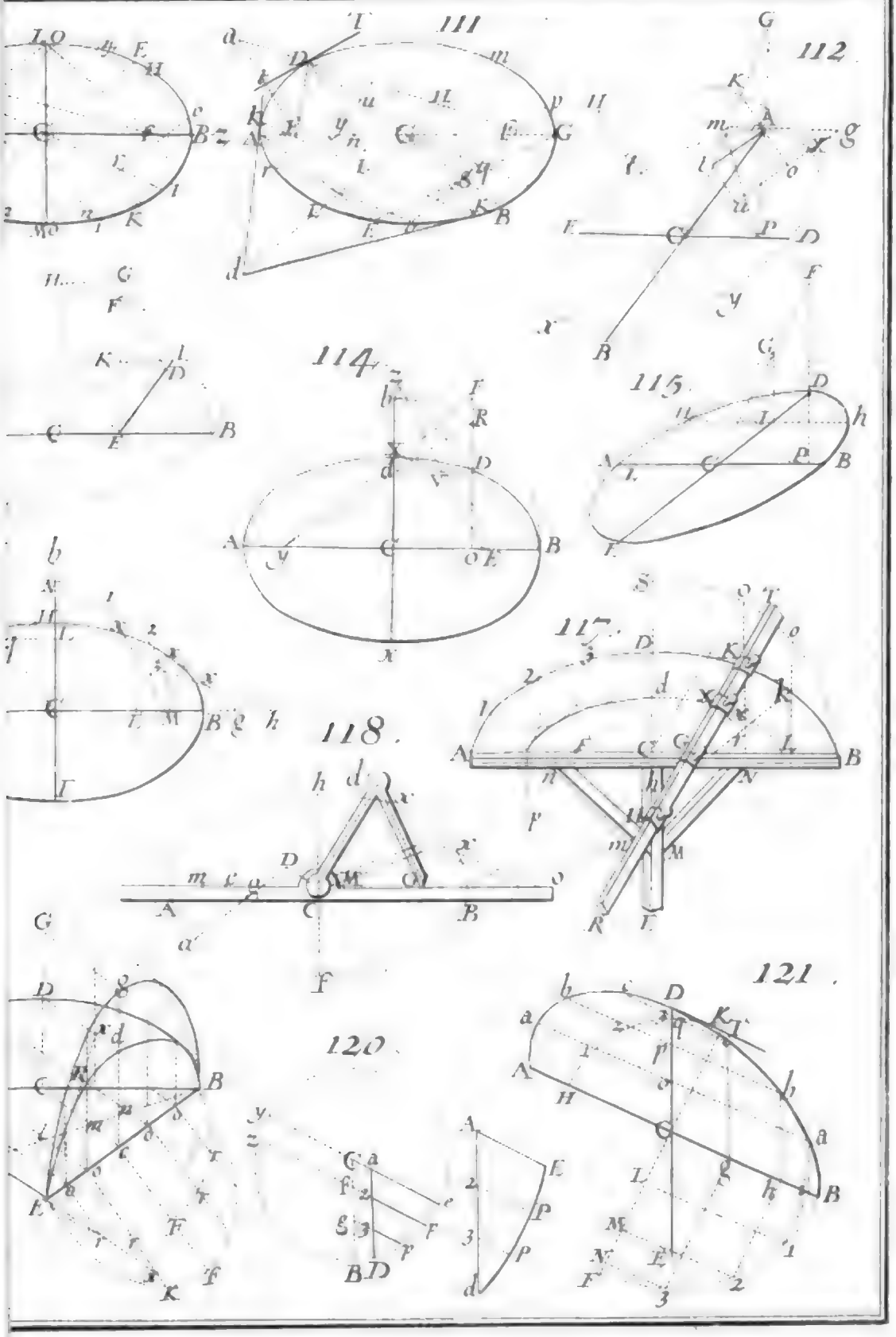


108.

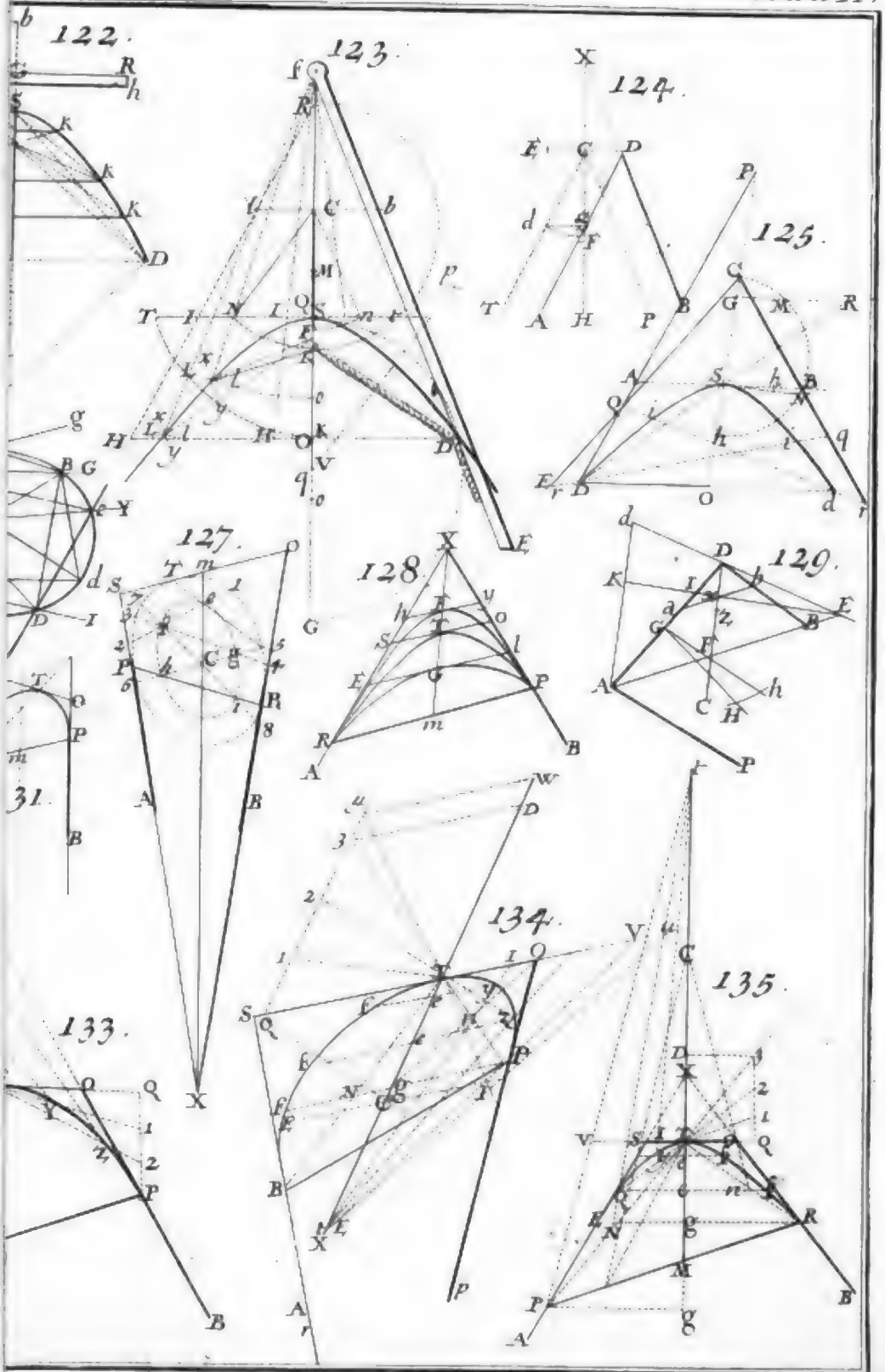


109.



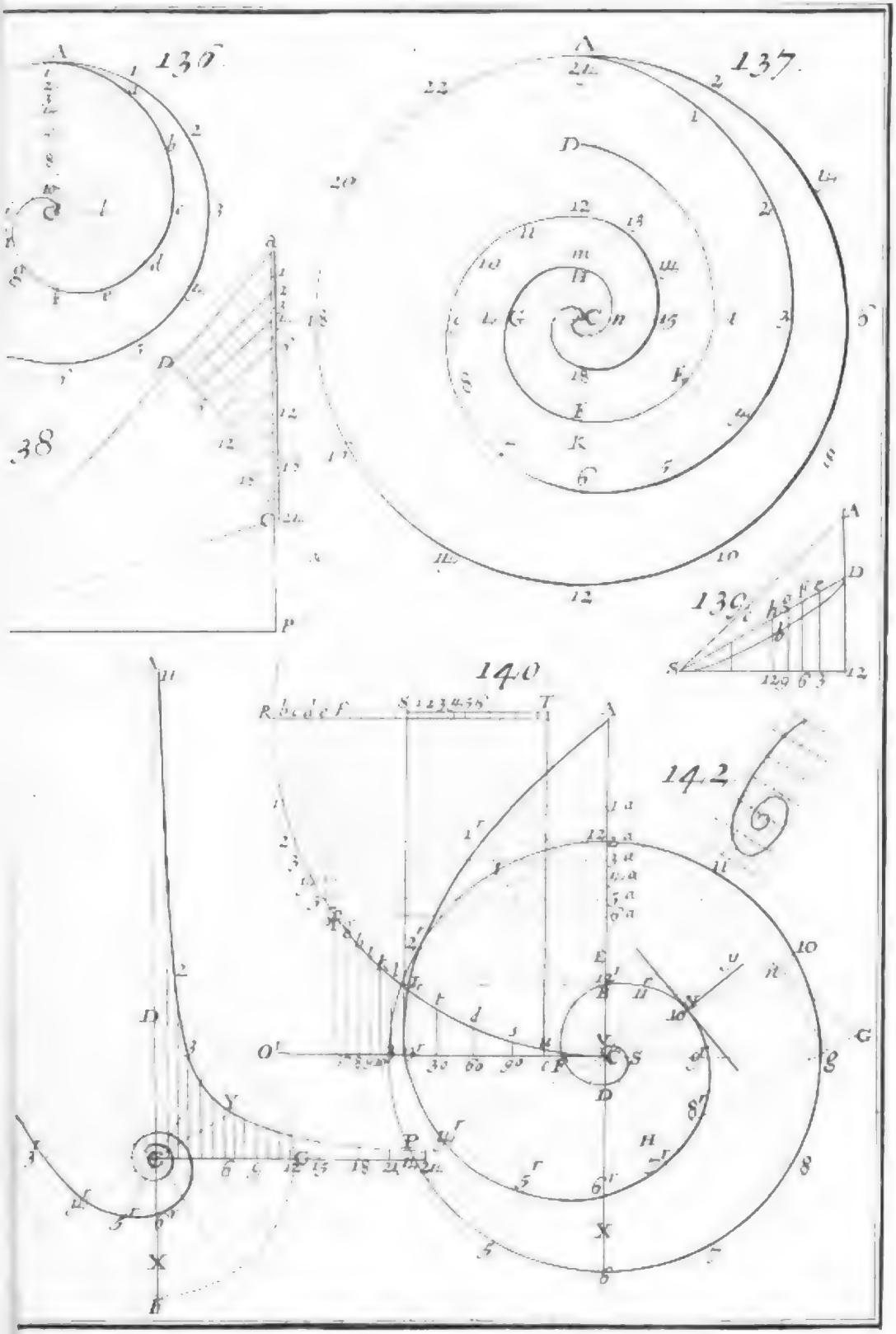

111
112
114
115
117
118
120
121

Digitized by Google



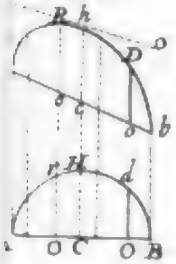
Digitized by Google

Digitized by

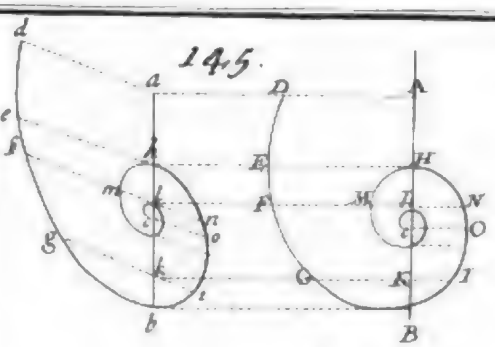

130
137
138
139
140
142

Digitized by

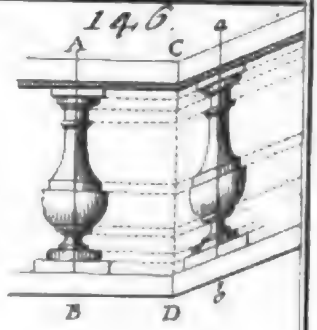
144.



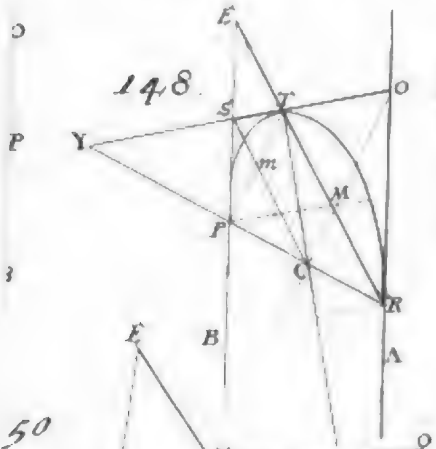
145.



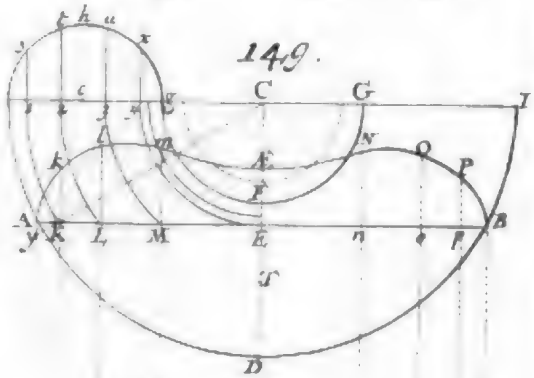
146.



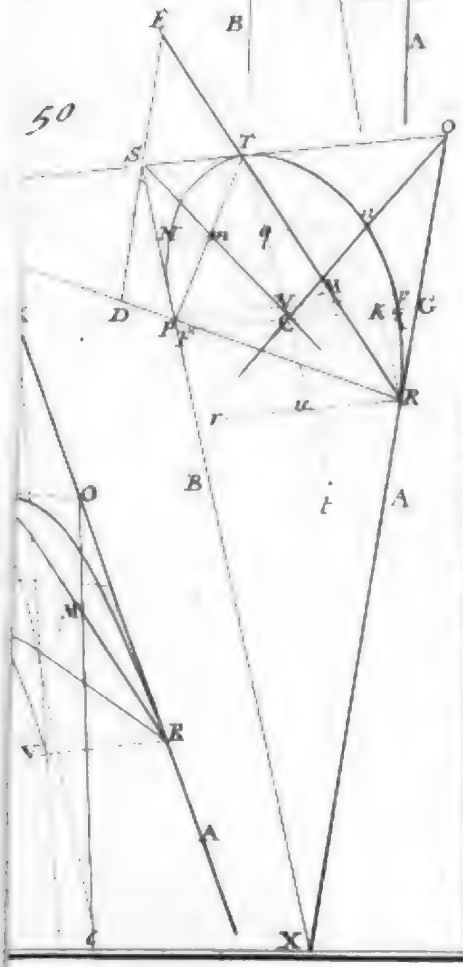
148.

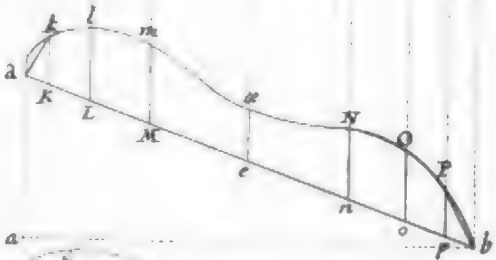


149.

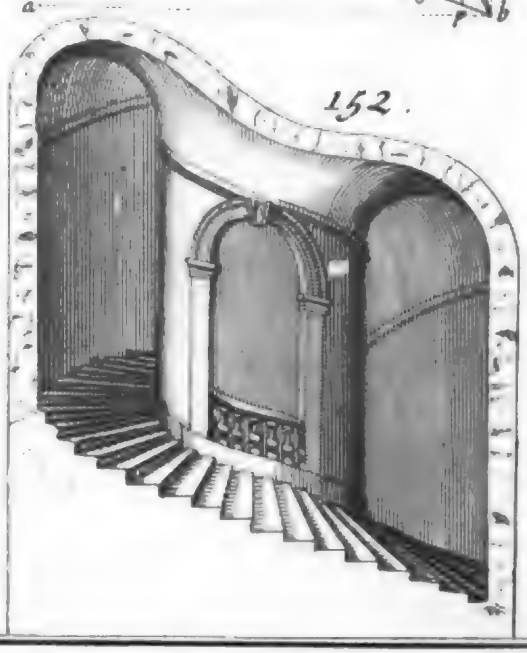


50



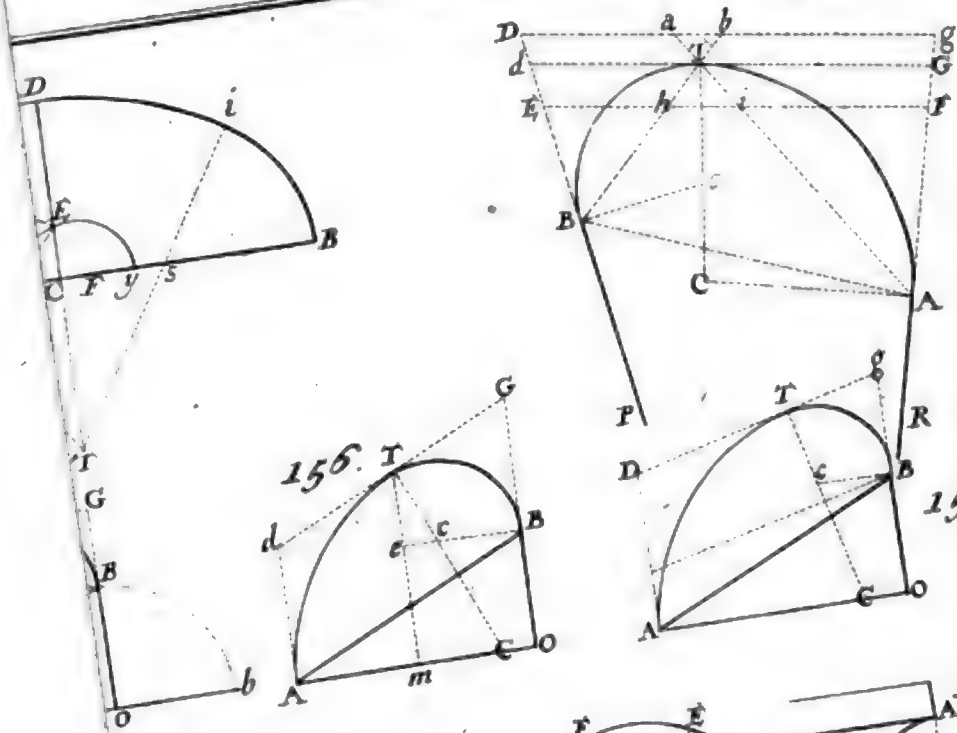


152.

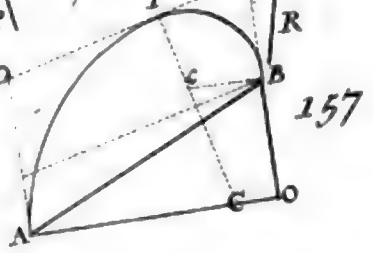


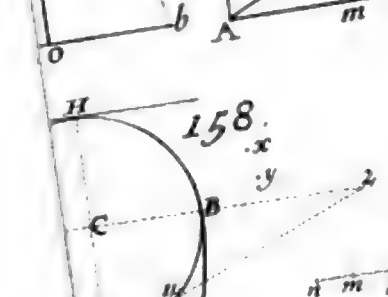
Digitized by

154.

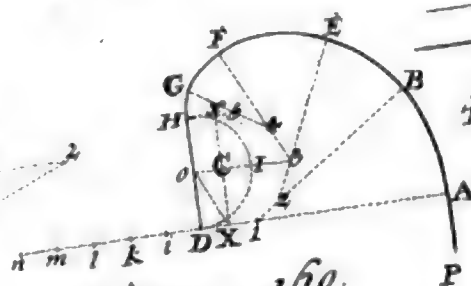

D
i
B
C F y s
a b
g
d G
E h i f
B
C
A

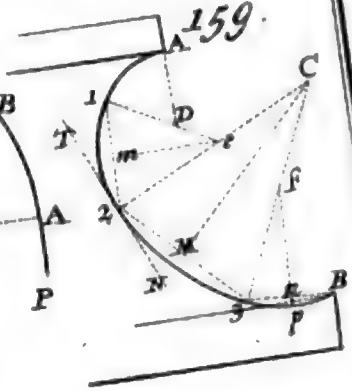
156.
G
T
d
B
e c
A m C O

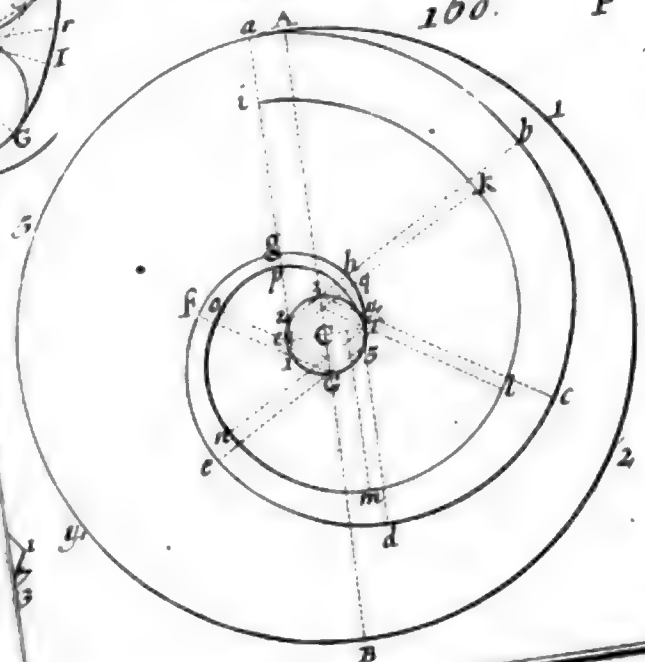

P
T
g
R
D
B
157.
A
C O

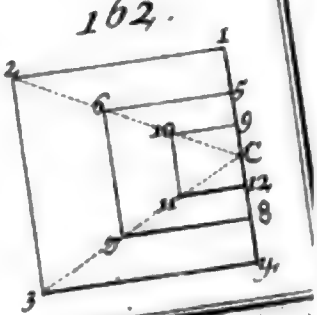

G
B
O b

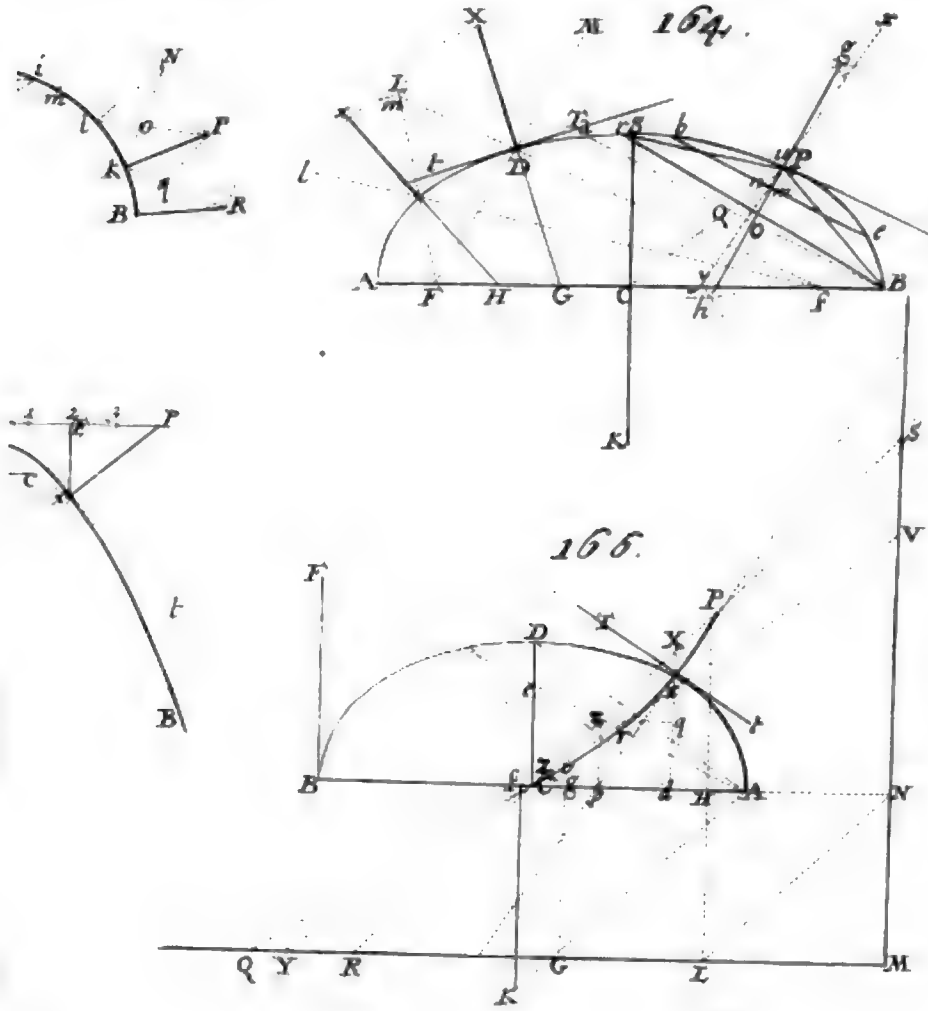
H
158.
x
y
z
C
B
E
r
I
F G
x


F
E
G
B
H
C
A
n m l k i D X I
P

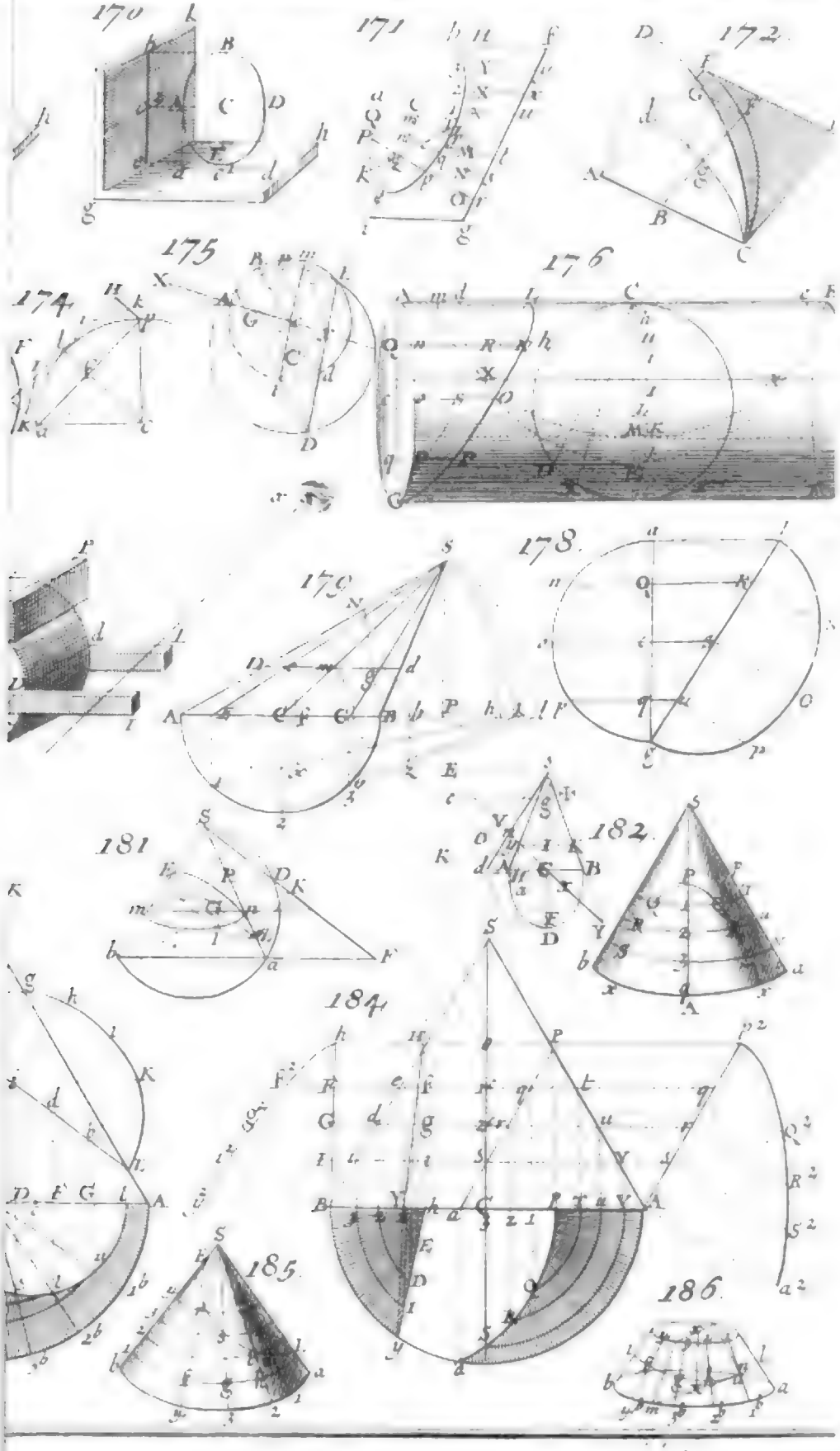

159.
A
C
T
D
m
f
M
N
B
P


160.
a A
i
b
K
g
h
f
C
l
c
e
m
d
B

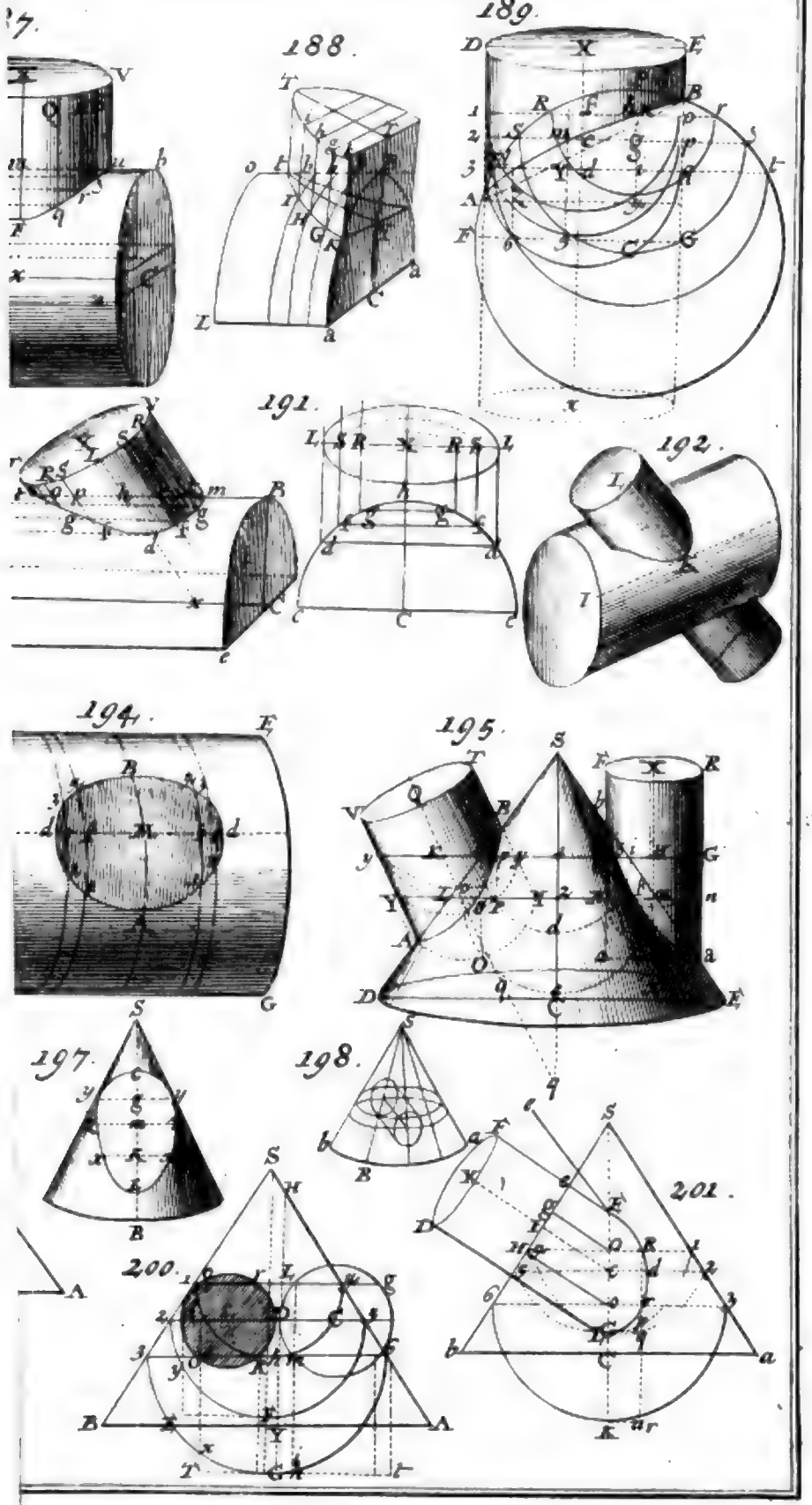

162.
1
2
6
5
9
C
12
8
3



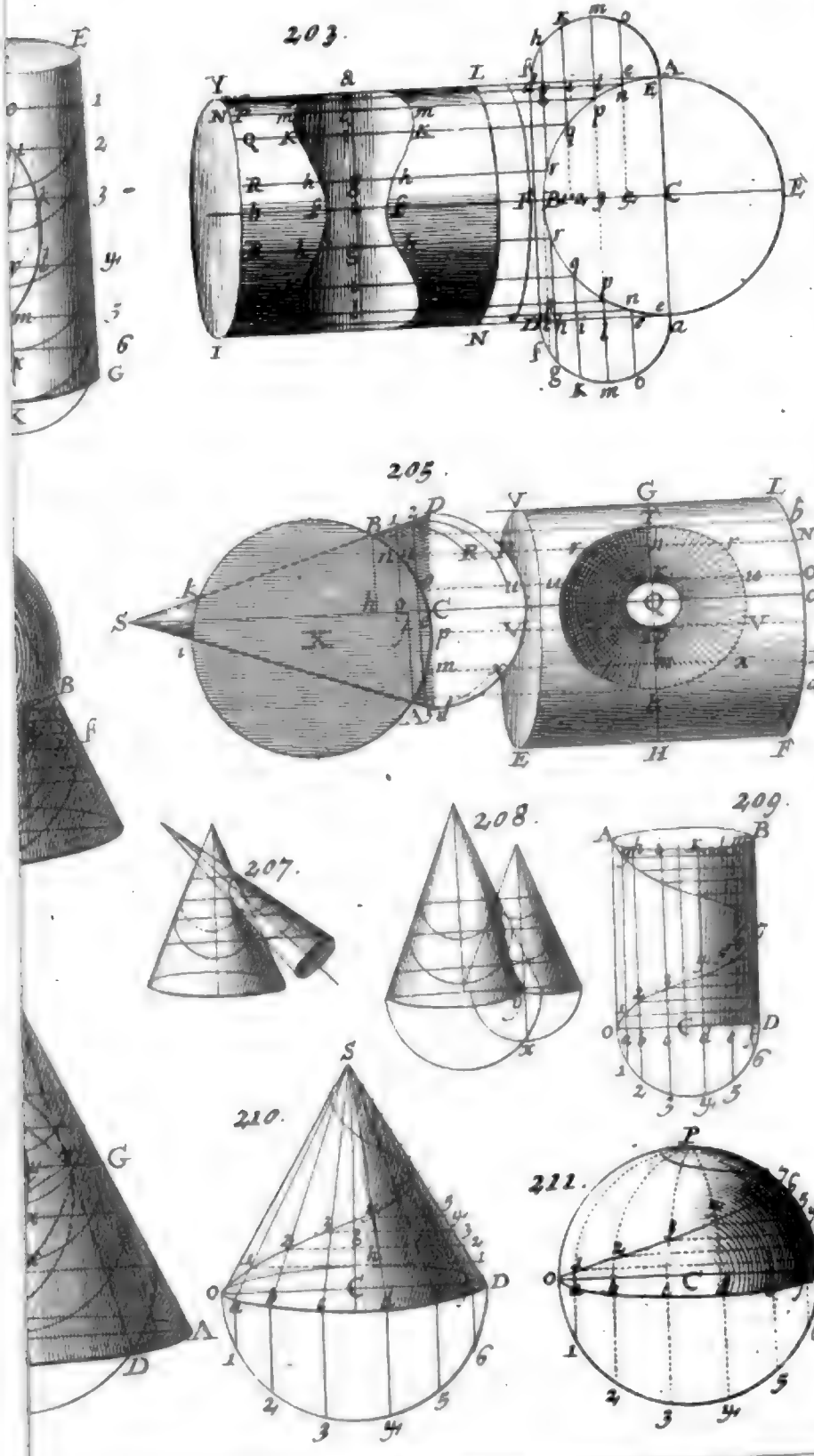
Digitized by Google



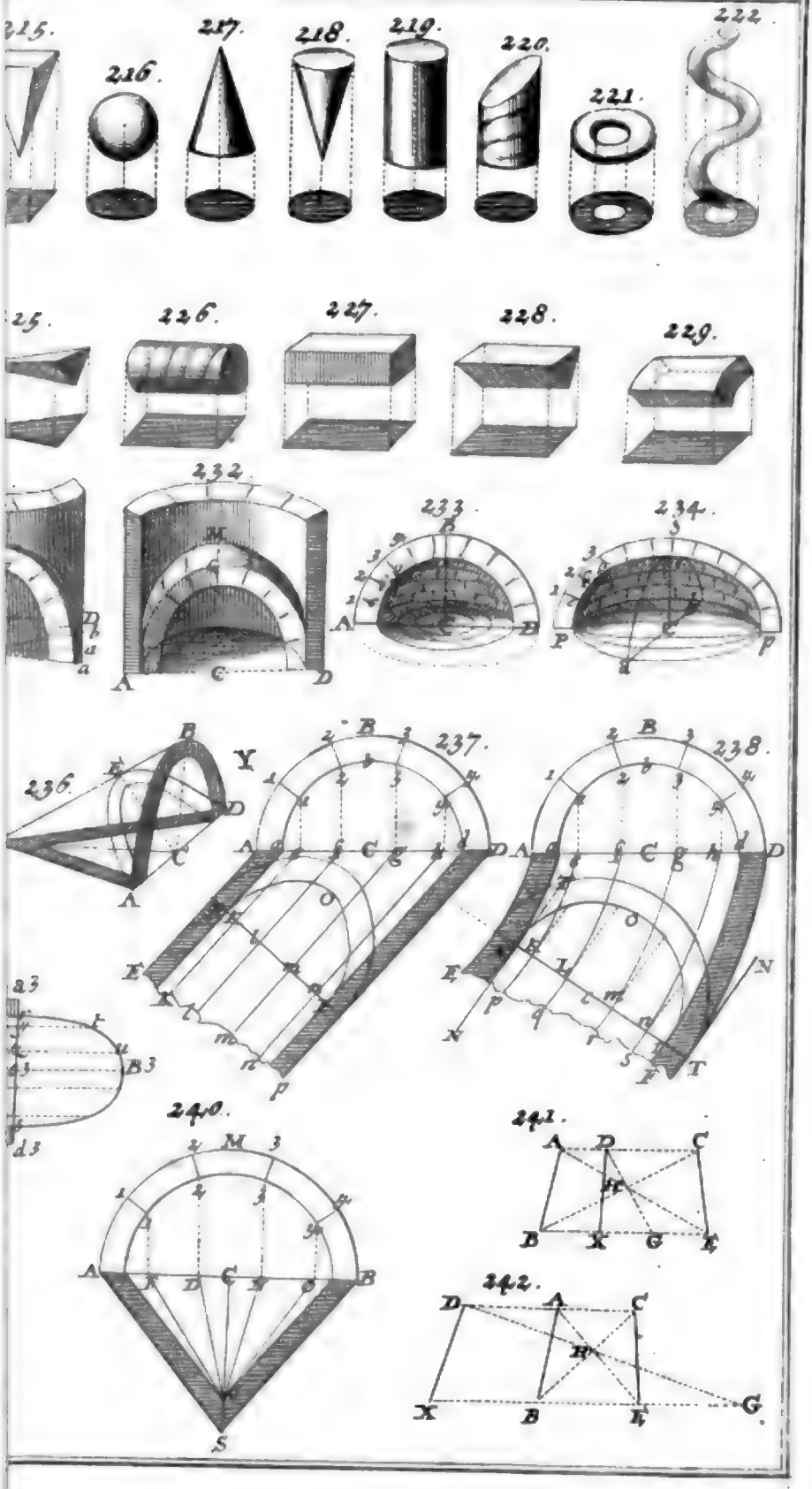
Digitized by Google

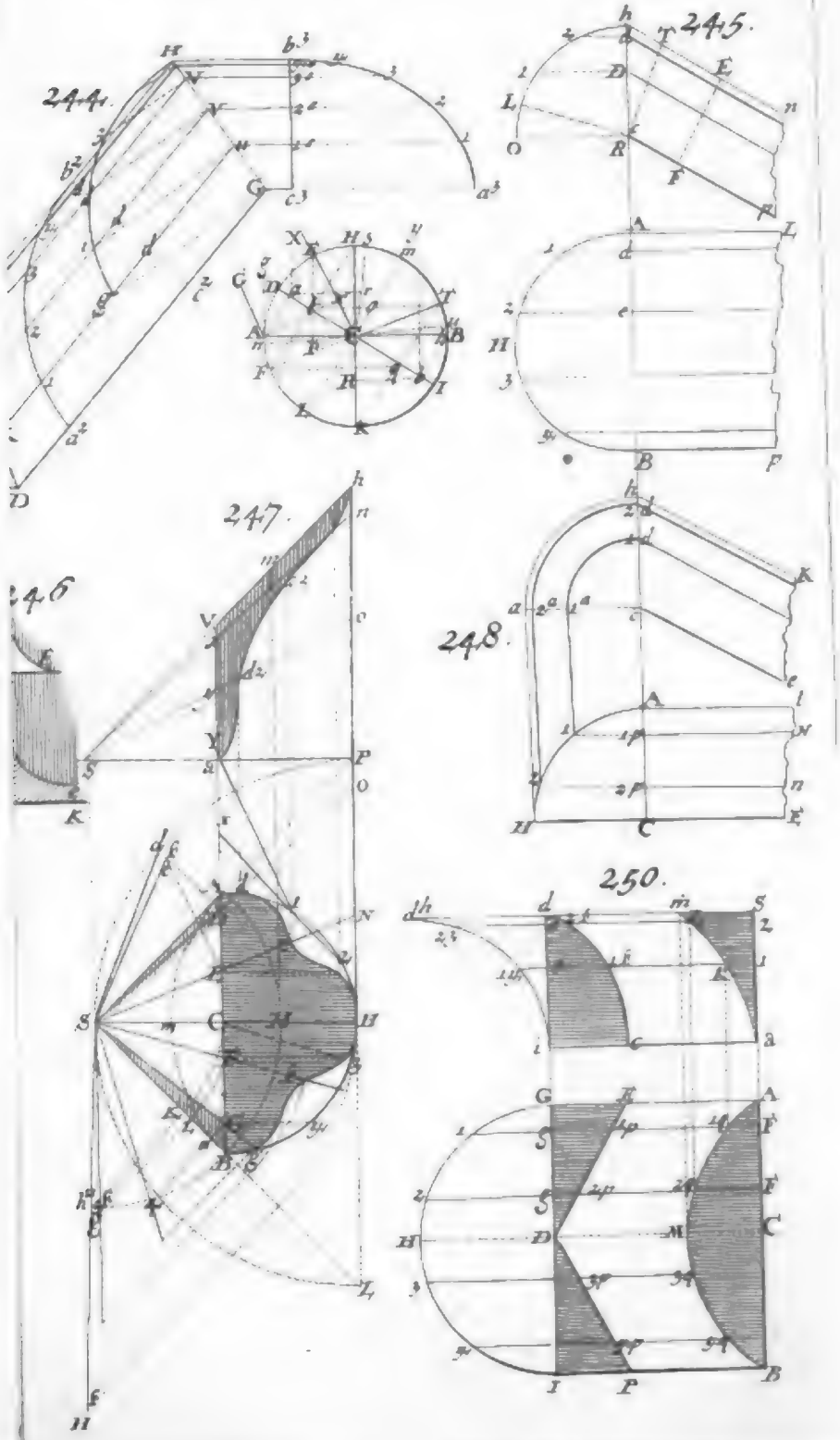


Digitized by Google

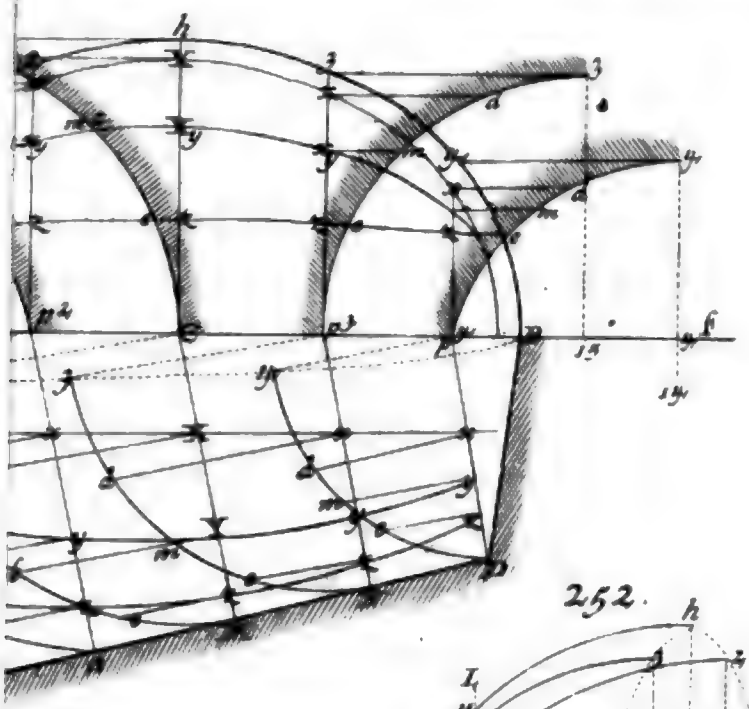

203.
205.
207.
208.
209.
210.
211.

Digitized by Google

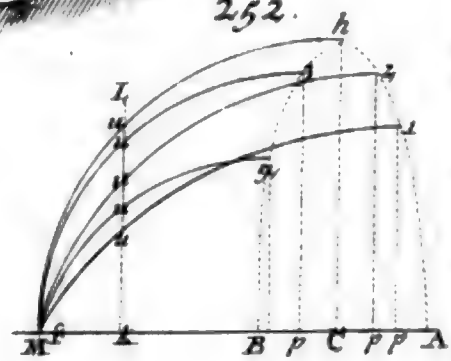

215.
216.
217.
218.
219.
220.
221.
222.
225.
226.
227.
228.
229.
232.
233.
234.
236.
237.
238.
240.
241.
242.

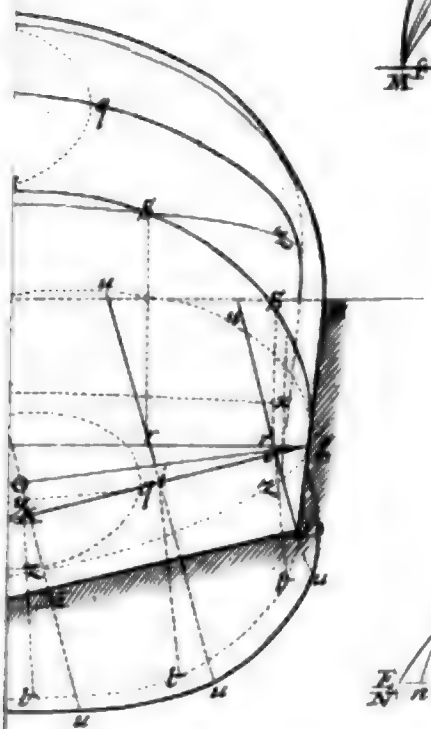


Digitized by Google

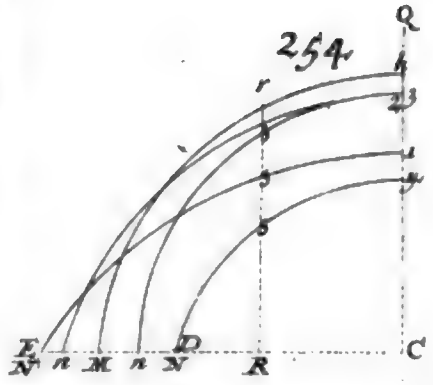


252.

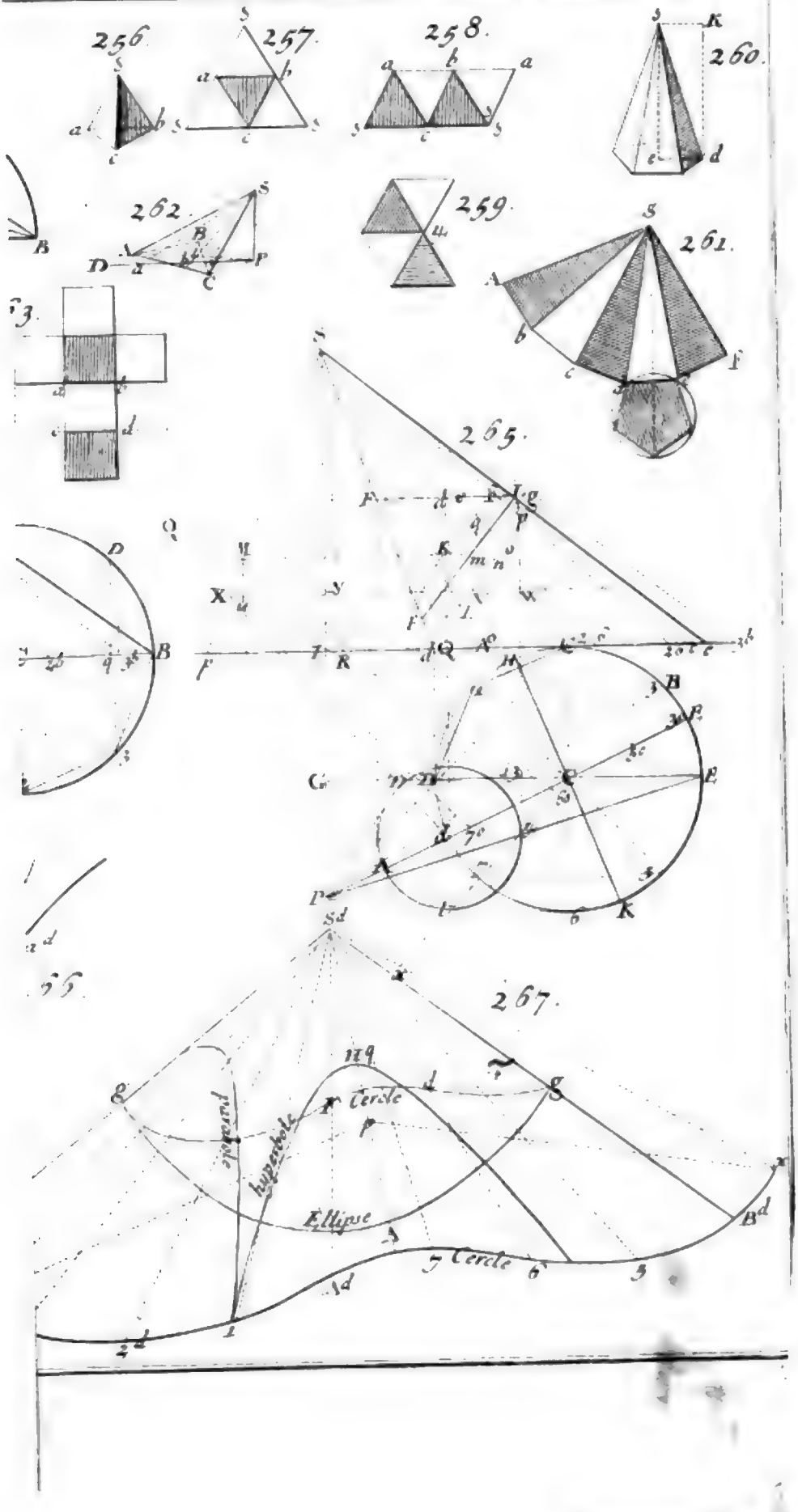


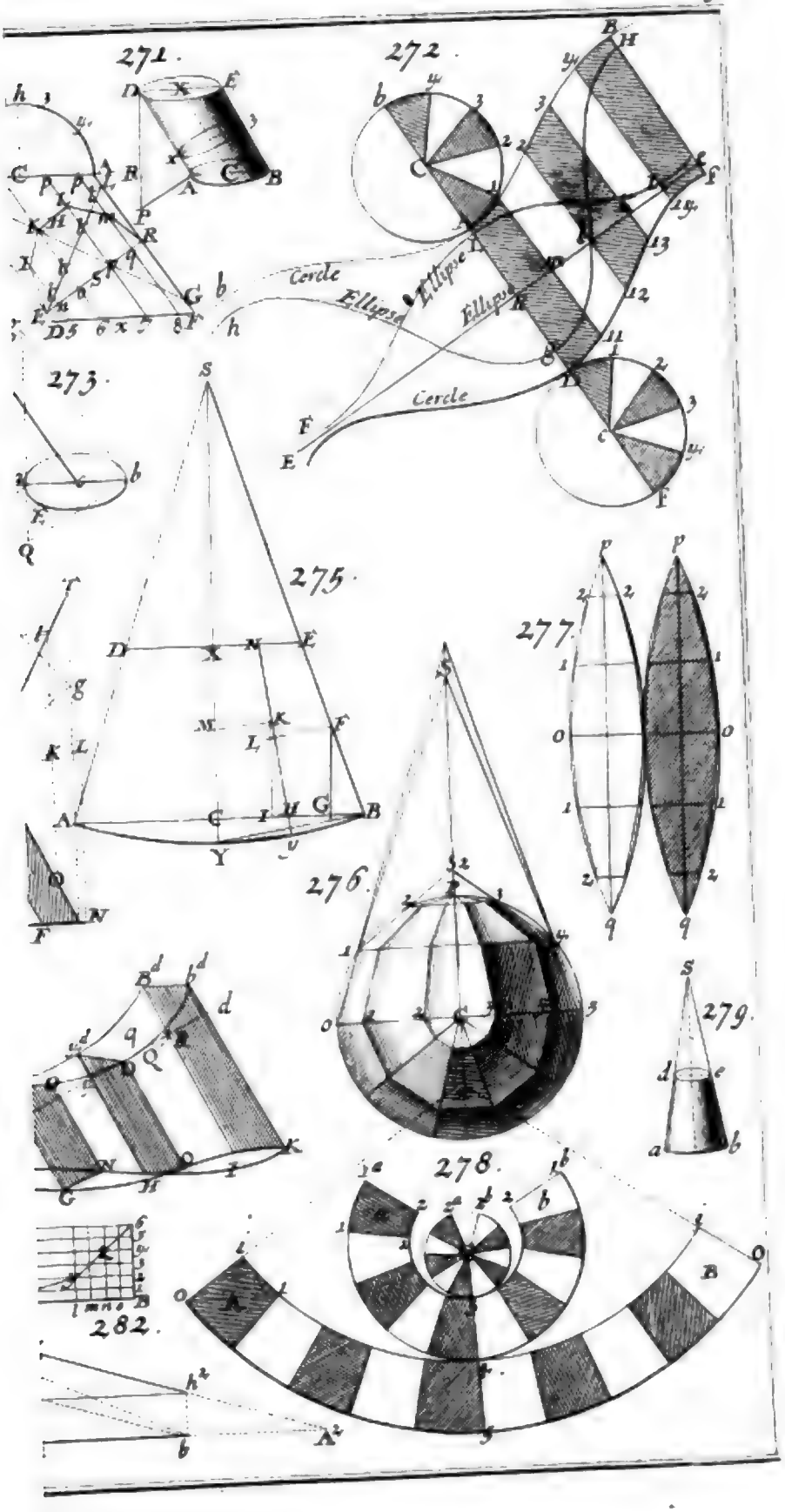


254.

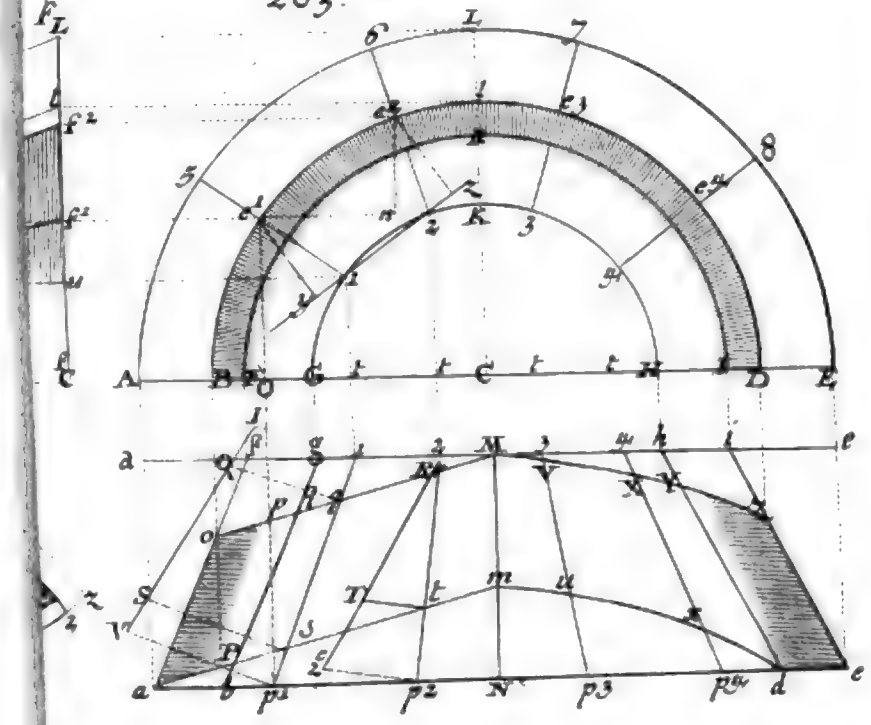


Digitized by Google

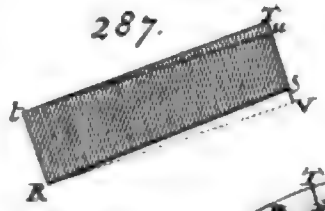

256.
257.
258.
260.
262.
259.
261.
263.
265.
267.
Cercle
Ellipse
hyperbole
parabole


271.
272.
273.
275.
276.
277.
278.
279.
282.
Cercle
Ellipse
Ellipse
Ellipse
Cercle

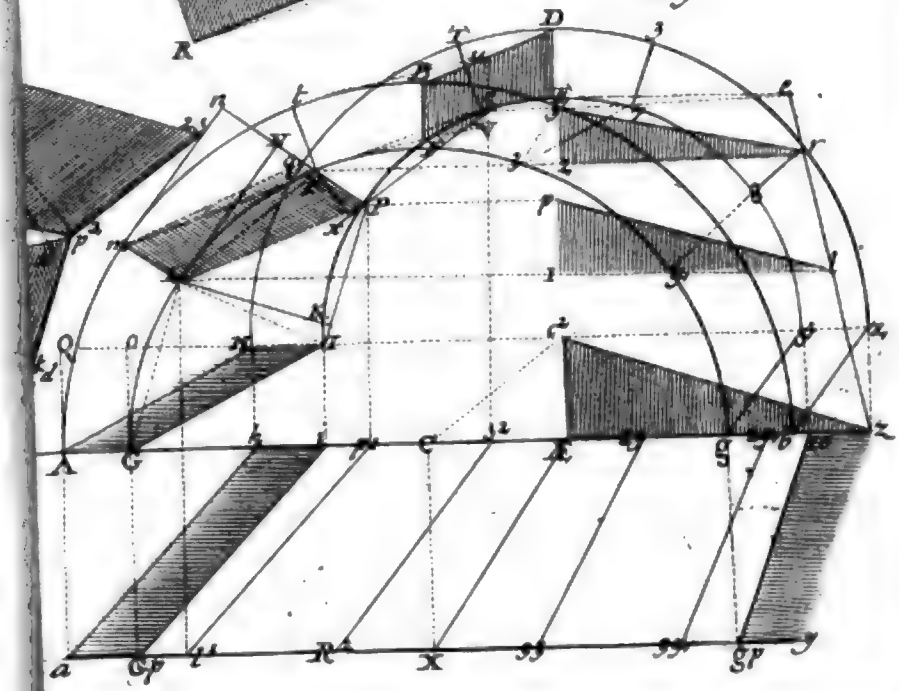
283.



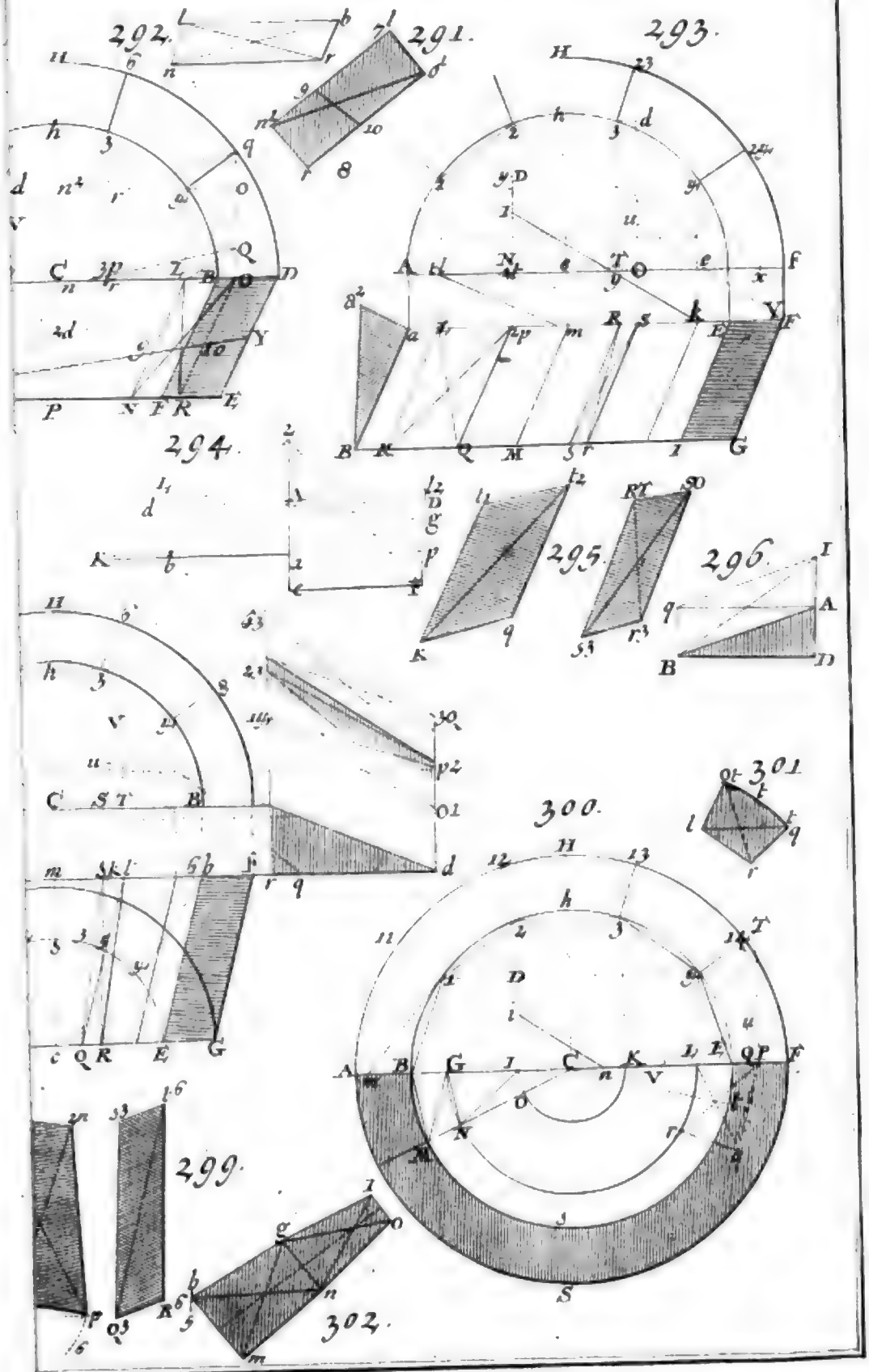
287.

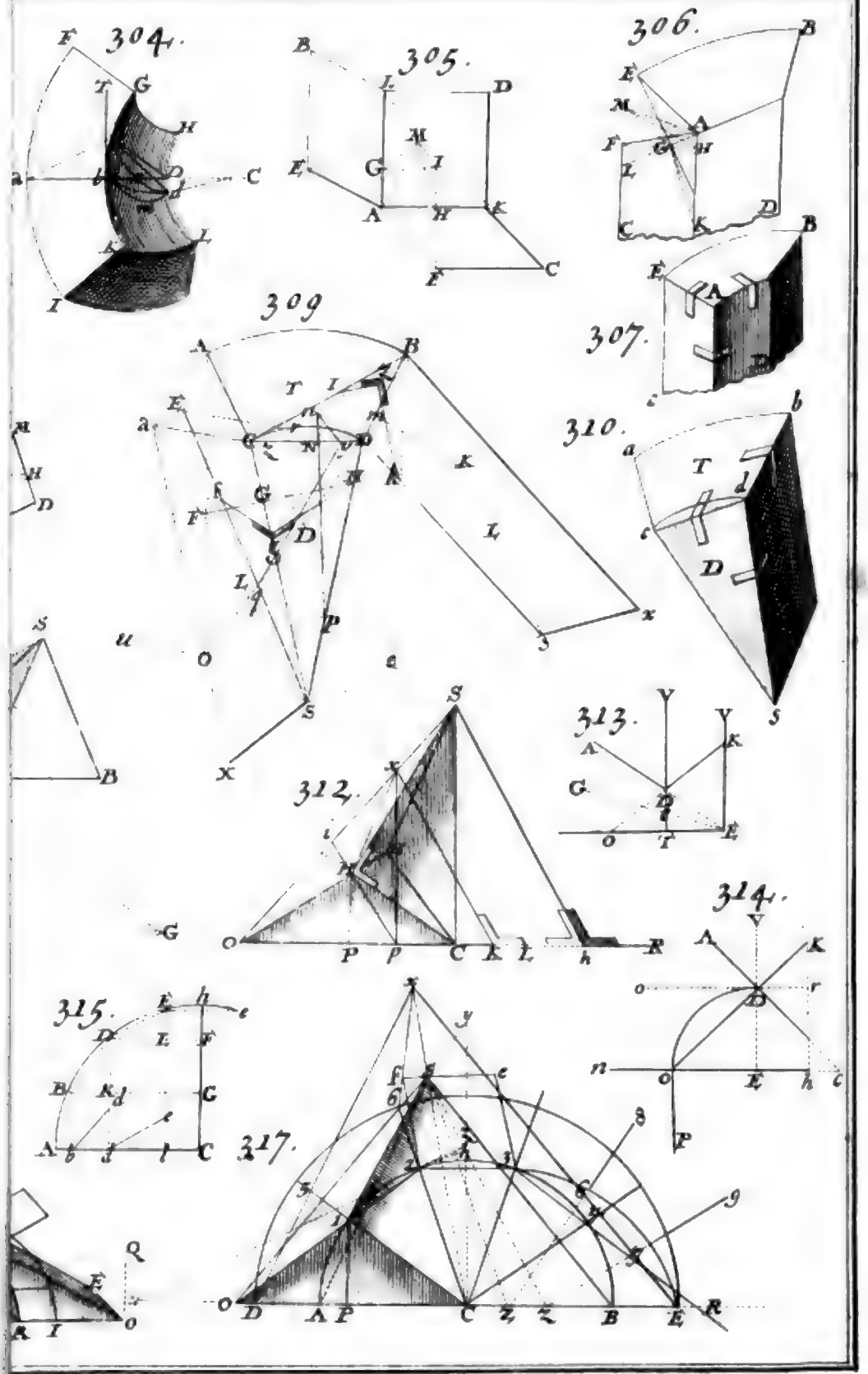


285.

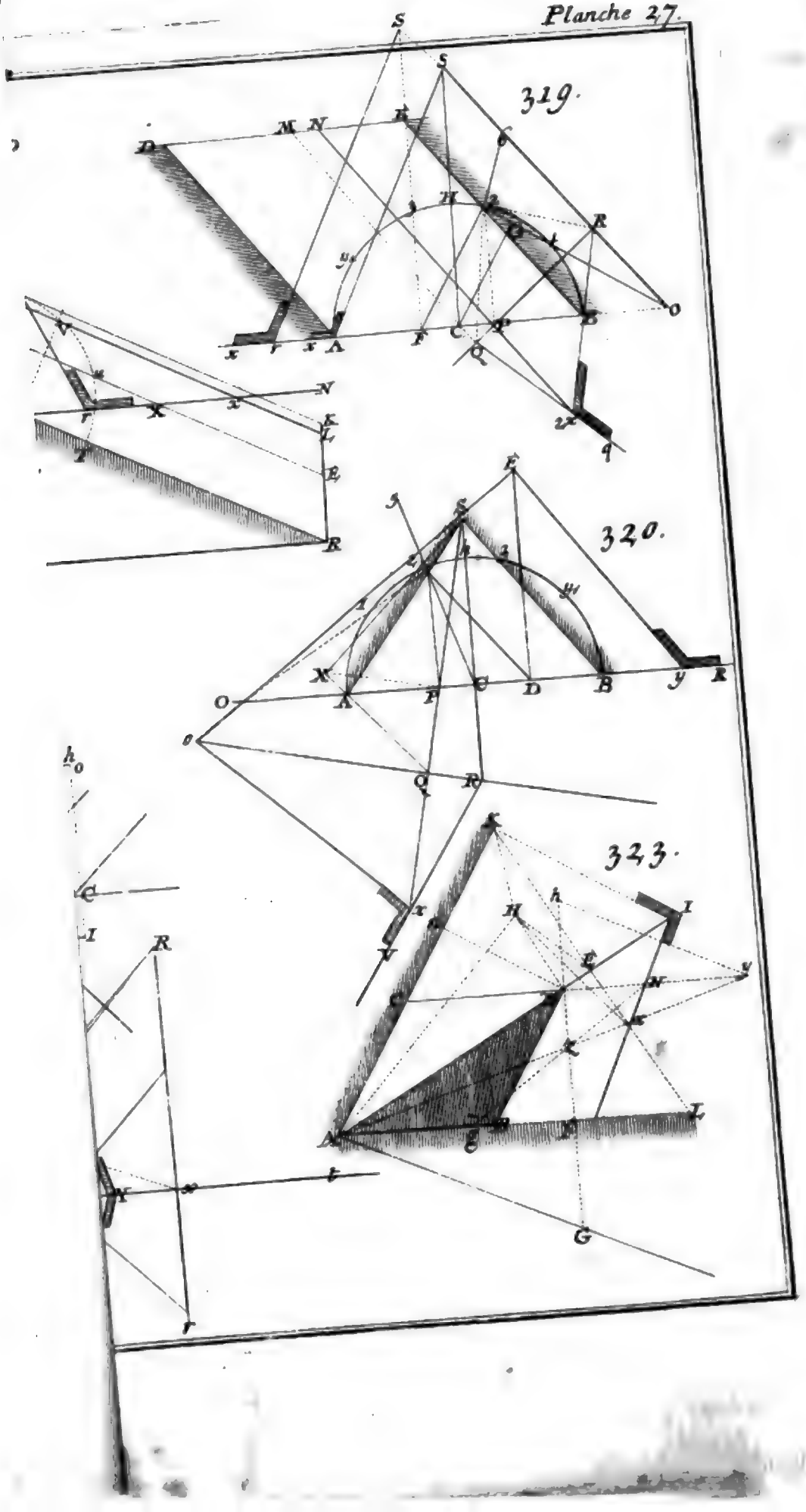


Digitized by Google


292.
291.
293.
294.
295.
296.
299.
300.
301.
302.


304.
305.
306.
307.
309
310.
312.
313.
314.
315.
317.

Digitized by Google


319.
320.
323.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google